دولة ليبيا

وزارة التعليم

مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للصف التاسع من مرحلة التعليم الأساسي

دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

العام الدراسي
1440 - 1441 هـ
2019 - 2020 م

تمهيد

تركز سلسلة رياضيات التعليم الأساسي والثانوي على دمج مهارات التفكير، وتقانة المعلومات، والتربية الوطنية ضمن تعليم وتعلم الرياضيات.

وتتكون السلسلة من ثلاثة كتب للشق الثاني من مرحلة التعليم الأساسي، وثلاثة كتب للصفوف الثلاثة من مرحلة التعليم الثانوي . وقد رتبت المادة ترتيبًا تربويًّا سليمًا يُدعَّم فيه التفكير المجرد بأمثلة ملموسة. تُعرض على سبيل المثال في الفصل الخاص بالمعادلات الآنية، الحلول البيانية للمعادلات الآنية الخطية مع الحلول الجبرية. وتوفر في ذلك المدخل الحلول البيانية الأمثلة التصويرية الملموسة، فتساعد الطلبة على فهم الحلول التي تم التوصل إليها جبريًّا بشكل أفضل.

وقد روعي تقديم المفاهيم الواحد تلو الآخر لكي يستوعبها الطلبة بسهولة. وعُزِّز فهم المفاهيم بالاستخدام الحكيم للأمثلة المحلولة والتدريبات متدرجة الصعوبة.

تُرَكِّز كتب مرحلة النعليم الأساسي على إتقان وتطبيق المهارات الأساسية بحيث يُكوِّن أساس سليم للدراسات التالية. وتتضمن المهارات الأساسية التقدير، والحسابات الذهنية، ومعالجة البيانات.

وتُستخدم في كل جزء من السلسلة أنشطة لإرشاد الطلبة في كيفية استخدام مهارات التفكير مثل الاستقراء، ولاكتشاف القوانين والنظريات الرياضية بأنفسهم، وليتعرفوا كذلك على كيفية استخدام برامج الحاسوب في عدد من الأنشطة.

ويتم حث الطلبة من خلال نشاطات وأمثلة محلولة مناسبة على استخدام استراتيجيات حل المشكلات، وتشجيع التعلم الذاتي مثل التقدير، وبناء النموذج، وإنشاء الجدول، وإعداد القائمة النظامية، والعمل إلى الخلف، واستخدام المعادلات، وتبسيط المشكلة، وتستخدم حيثما أمكن الأشكال البيانية لتذليل صعوبة المشكلات اللفظية ولجعلها أكثر طواعية للحل.

ولجعل الطلبة يألفون الكتب قبل استخدامها، نورد فيما يلي الملامح المميزة لهذه السلسلة:

* يبدأ كل فصل "بمقدمة" قصيرة عن الموضوع، تليها قائمة بنواتج التعلم يمكن للطلبة استخدامها في تأكيد ما تعلموه بنهاية كل فصل من الكتاب.

* يقدم للطلبة "أمثلة محلولة" لتعزيز فهم المفاهيم ولتعريفهم بأنواع عديدة من المسائل، بما فيها التي تساعدهم على مراقبة تفكيرهم الذاتي.

* تتضمن "التمرينات متدرجة الصعوبة" أسئلة مناسبة لمدى واسع من القدرات. وصُمِّمت الأسئلة بشكل يجعل الطلبة يستخدمون التفكير المنطقي الاستدلالي والاستقرائي لحل المشكلات الرياضية. (ويمكن أن يختار المعلمون مسائل مختلفة للطلبة من ذوي القدرات المختلفة).

* إن "الرياضيات الممتعة" أو "استقصاء الرياضيات" والموجودة في نهاية كل فصل من الكتاب (فيما عدا فصول المراجعة) مخصصة لغرس وتنمية مهارات التفكير. وستعرض أيضًا هذه الأنشطة بعض القضايا الوطنية ذات الصلة على الطلبة.

* وتوجد ورقة للمراجعة في نهاية كل فصل من الكتاب (فيما عدا فصول المراجعة) حتى يتمكن الطلبة من قياس مستوى كفايتهم باستمرار. ويجب أن يكون جميع الطلبة قادرين على إجابة الأسئلة في القسم (أ) بينما يستطيع الطلبة متوسطو القدرة من التعامل مع الفقرات في القسم (ب). أما الطلبة ذوي القدرة الأعلى فيوفر لهم القسم (جـ) التحدي المطلوب.

وبالإضافة للملامح الرئيسة لكل فصل، استخدمت امتحانات تقويمية في الكتاب كمادة للمراجعة العامة لتساعد على إعداد الطلبة للامتحانات. وركزت خمسة فصول في كتاب الصف الثاني من مرحلة التعليم الثانوي على المراجعة. بينما يحتوي كتاب الصف الثالث من مرحلة التعليم الثانوي على 15 قسمًا في الفصل الثامن للمراجعة. تتراوح بين الحساب والجبر إلى التحويل وحل المشكلات.

تُعَرَّف في جميع أنحاء هذه السلسلة:

* مهارات وعمليات التفكير
* تقانة المعلومات
* التربية الوطنية

عن طريق الأيقونات التالية:

لتطبيق مهارات التفكير

لتطبيق تقانة المعلومات

لرسائل التربية الوطنية

ودُعِّمَتْ هذه السلسلة من الكتب بمصادر لجميع المعلمين والطلاب. متوافرة ومتاحة لدى الموقع [http//www.teol. com.sg]

وتشير الأيقونة التالية والموجودة في كل جزء من الكتاب إلى وجود مصادر على شبكة الإنترنت لها صلة بالموضوع قيد الدراسة.

مواقع شبكة المعلومات الدولية المتعلقة بالمتن هي أيضًا متوافرة ومتاحة لدى الموقع ويُستدل عليه بالأيقونة التالية

ونأمل أن تساعد المادة المقدمة في السلسلة الطلبة على تقدير أهمية وقدرة الرياضيات في أنشطتهم اليومية، وربما في مهنتهم المستقبلية، وأن يستمتعوا باستخدام سلسلة رياضيات التعليم الأساسي و الثانوي.

المحتويات

الرموز الرياضية
Mathematical Notation

1- رموز المجموعة

W	ك	: مجموعة الأعداد الكلية {0، 1، 2، 3...}
Z	ص	: مجموعة الأعداد الصحيحة {0، ±1، ±2، ±3..}
Z^+	$ص^+$	: مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة {1، 2، 3...}
R	ح	: مجموعة الأعداد الحقيقية
Q	ن	: مجموعة الأعداد النسبية

2- رموز الربط (المقارنة)

$=$	: تساوي
$\neq$	: لا تساوي
$\equiv$	: تكافئ
$\approx$	: تقريبًا
$\propto$	: يتناسب
$>$	: أقل من
$\geq$	: أقل من أو يساوي
$\not<$	: ليست أكبر من
$<$	: أكبر من
$\leq$	: أكبر من أو يساوي
$\not>$	: ليست أقل من
∞	: ما لا نهاية

يتم عرض القيم العددية في النظام الدولي للوحدات كما يلي:

1,000	تكتب 1000
12,005	تكتب 12005
1,000,500	تكتب 1000500
0.00394	تكتب 0.00394

3- العمليات

أ + ب	: أ زائد ب
أ − ب	: أ ناقص ب
أ × ب، أب، أ.ب	: تعني أ مضروب في ب
$\frac{أ}{ب}$، أ ÷ ب، أ/ب	: أ مقسوم على ب
أ : ب	: نسبة أ إلى ب
$\sqrt{أ}$	: الجذر التربيعي الموجب للعدد الحقيقي أ حيث أ > 0

4- نظام الوحدات العالمية SI Units

يستخدم نظام الوحدات العالمية سبع وحدات أساسية، وتُشتق جميع الوحدات الأخرى من هذه الوحدات الأساسية بضرب أو قسمة وحدة في وحدة أخرى.

الكمية الفيزيائية	اسم الوحدة الأساسية	رمز الوحدة
طول	متر	م
كتلة	كيلو جرام	كجم
زمن	الثانية	ث
التيار الكهربائي	أمبير	أم
درجات حرارة الترمومتر	كيلفين	ك
شدة الإضاءة	شمعة	سـ
كمية المادة	مول	مل

تستخدم الوحدات الثلاث الأخيرة أساسًا في الأعمال العلمية المتخصصة، أما في الأغراض الشائعة فيتم قياس الحرارة على مقياس سلسيوس (المئوي). وتكون فواصل الحرارة على مقياسي كلفين وسلسيوس متشابهة.

بعض جداول التحويل
Some Conversion Tables

الطول

10 ملليمتر (مم) = 1سم (سم)
10 سنتيمتر = 1 ديسمتر (دس)
10 ديسمتر = 1 متر (م)
10 متر = 1 ديكامتر (dam) (دام)
10 ديكامتر = 1 هيكتومتر (هكم)
10 هيكتو متر = 1 كيلومتر (كم)

الكتلة

10 مليجرام (ملجم) = سنتيجرام (س. ج)
10 سنتيجرام = 1 ديسجرام (د ج)
10 ديسيجرام = 1 جرام (جم)
10 جرام = 1 ديكاجرام
10 ديكاجرام = 1 هيكتو جرام (هـ ج)
10 هكتوجرام = 1 كيلو جرام (كجم)
1000 كيلو جرام = 1 طن (ط)

المساحة

1 هكتار (هك) = 10000 $م^2$
100 هكتار = 1 $كم^2$

الحجم والسعة

1000 $سم^3$ = 1 لتر (ل)

الزمن

الدقيقة (د) = 60 ثانية (ث)
الساعة (س) = 60 دقيقة
1 يوم = 24 ساعة
1 أسبوع = 7 أيام
1 عام = 365 يوم
1 سنة كبيسة = 366 يوم

1 إيجاد المفكوك والتحليل الجبري

Algebraic Expansion and Factorisations

رينيه ديكارت فرنسي ، ولد عام 1596، كان أول عالم رياضيات يستخدم الحروف أ، ب، حـ للأعداد المعروفة. كما قرر أن الحروف التى فى نهاية الأبجدية مثل س، ص، ع يجب أن تكون رموزًا للأعداد المجهولة. ويعتبر "ديكارت" أيضًا أول من كتب (س^2) بدلًا من س س، (س^3) لتحل مكان س س س.

في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادرًا على:

- إيجاد مفكوك حاصل ضرب مقدارين جبريين، باستخدام قانون التوزيع.
- إيجاد مفكوك المقادير التى على الصورة (أ+ب)^2، (أ−ب)^2، (أ+ب) (أ−ب) بالتعرف على نماذج تلك النتائج.
- تحليل المقادير الجبرية ذات العوامل المشتركة.
- تحليل المقادير الجبرية على الصورة أ س + ب س + أ ص + ب ص باستخدام خاصية (التجميع).
- تحليل المقادير التربيعية التي تحتوي على متغير واحد أو متغيرين.
- تحليل المقادير التي هي الفرق بين مربعين.
- **تحليل المقادير التي هي الفرق بين المكعبين ومجموع المكعبين.**

1-1 إيجاد المفكوك باستخدام قانون التوزيع (مراجعة) Expansion Using Distributive Law (Revision)

تعلمنا في الكتاب السابق من هذه السلسلة، أن عملية الضرب في الحساب يمكن توزيعها على الجمع والطرح فمثلًا:

2× (5+ 3) = 2 × 5 + 2 × 3

= 10 + 6 = 16

وبالمثل ، في الجبر يمكننا تطبيق قانون التوزيع لفك الأقواس فعلى سبيل المثال:

2(3أ + 4ب) = 2 × (3أ + 4ب)

= 2 × 3أ + 2 × 4ب

= 6أ + 8ب

تذكر أن القواعد الخاصة بالضرب الجبري تشبه قواعد الضرب الحسابي، فعلى سبيل المثال

(+2) (+3) = 6	(+أ) (+ب) = أب
(-2) (-3) = 6	(-أ) (-ب) = أب
(+2) (-3) = -6	(+أ) (-ب) = - أب
(-2) (+3) = -6	(-أ) (+ب) = - أب

مثال 1:

أوجد مفكوك:

(أ) 2(س + 1)   (ب) 4(3س - 5)

الحل

(أ) 2 (س + 1) = 2 × س + 2 × 1

= 2س + 2

(ب) 4 (3س - 5) = 4 × 3س + 4 × (-5)

= 12 س - 20

مثال 2:

أوجد مفكوك

(أ) -2(أ + 5)   (ب) -3(2ب - 7)

الحل

(أ) -2(أ + 5) = -2 × أ - 2 × 5

= -2أ - 10

(ب) -3(2ب - 7) = -3 × 2ب - 3 × (-7)

= -6ب + 21

ملحوظة

إذا كان العدد المضروب في القوس سالبًا فإن إشارات ما بداخل القوس تتغير عند فك الأقواس.

مثال 3:

أوجد مفكوك:

(أ) أ (أ + 3)　　　(ب) ب (2ب − 3)

(جـ) − حـ (حـ + 4)　　　(د) (2ى + 1) ى

الحل

(أ) أ (أ + 3) = أ × أ + أ × 3
= أ^2 + 3 أ

(ب) ب (2ب − 3) = ب × 2 ب + ب × (−3)
= 2ب^2 − 3 ب

(جـ) −حـ (حـ + 4) = − حـ × حـ − حـ × 4
= − حـ^2 − 4حـ

(د) (ى + 1) ى = ى × ى + 1 × ى
= ى^2 + ى

مثال 4:

أوجد مفكوك ثم اختصر:

(أ) 4(2أ − 3) + 3 (أ + 2)　　　(ب) 2(أ + 3ب) − 3 (ب − أ)

الحل

(أ) 4(2أ − 3) + 3 (أ + 2) = 8أ − 12 + 3أ + 6
= 11أ − 6

(ب) 2(أ + 3ب) − 3 (ب − أ) = 2أ + 6ب − 3ب + 3أ
= 5أ + 3 ب

تمرين 1-1 أ

1- أوجد مفكوك :

(أ) 4 (أ + 3)　　　(ب) 2 (حـ − 3)

(جـ) 7 (4ف + 3)　　　(د) 6 (7ق − 5)

(هـ) 5 (5 − ع)　　　(و) − 4 (ك + 4)

(ز) − 8 (م − 2)　　　(ح) − 5 (3س + 8)

(ط) − 7 (5ر − 3)　　　(ي) 5(2ذ − 3 ت + ى)

(ك) 8 (ت − 3ى + 2ض)

2- أوجد مفكوك:

(أ) ب (ب + 7)　　　(ب) ى (ى − 4)

(جـ) ف (3ف + 4)　　　(د) 3 هـ (4هـ − 5)

(هـ) − ع (2ع + 3)　　　(و) − ص (4ص + 1)

(ز) − 4ك (3ك − 5)　　　(ح) (4ن + 3) ن

(ط) (6 − 5ر) ر

3- **أوجد مفكوك** ثم اختصر:

(أ) 5(س + 4) + 2(س + 7)
(ب) 3(ت − 5) + 8(ت − 1)
(جـ) 4(ر + 4) + 5(2ر + 3)
(د) 5(2ص − 5) + 8(3ص − 1)
(هـ) 11(ت + 1) − 2(ت + 5)
(و) 6(3ن + 5) − 3(2ن − 5)
(ز) 3(3د − 5) − 7(2د + 3)
(ح) 3(4 − 5أ) − 2(5 − 4أ)
(ط) 3(2 − ت) − 3(3 − 4ت)

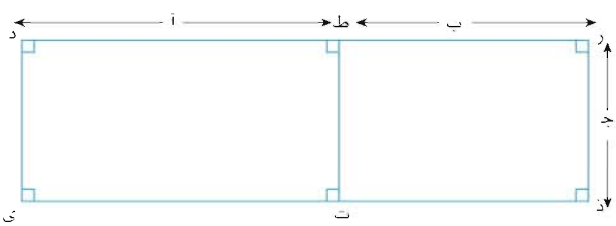
4- **أوجد مفكوك** ثم اختصر:

(أ) س(س + 1) + 2(س + 1)
(ب) ص(ص − 4) + 3(ص − 4)
(جـ) أ(أ + 3) − 3(أ + 3)
(د) ر(ر + 4) − 4(ر + 4)
(هـ) ب(ب + 7) − 7(ب + 7)
(و) ك(ك + 5) + 5(ك + 5)
(ز) أ(أ − 4) − 4(أ − 4)
(ح) حـ(حـ − 5) − 5(حـ − 5)

1-1-1 إيجاد مفكوك (أ + ب)(حـ + د) Expansion of (a + b) (c + d)

أنشطة

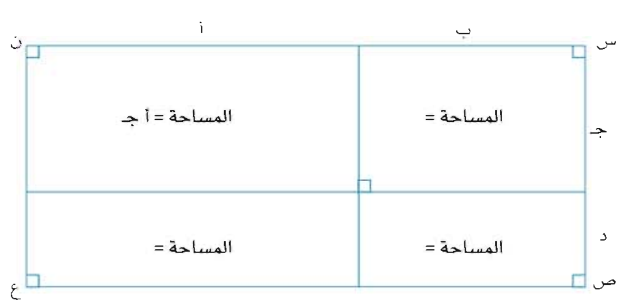
1- أطوال أضلاع المستطيل مبينة في الرسم التالي.



ملحوظة
حل هذا المثال
(أ) يتضمن استخدام الرسم البياني.
(ب) يستخدم لتبسيط المشكلة للنشاط رقم 2 في الصفحة التالية.

(أ) احسب مساحة **(i)** المستطيل د ط ت ى **(ii)** المستطيل ط ر ذت.
(ب) اجمع مساحة المستطيلين السابقين للحصول على مساحة المستطيل د ر ذى .
(جـ) أوجد طول در.
(د) استخدم الطول در لحساب مساحة المستطيل د ر ذ ى .
(هـ) اكتب استنتاجاتك من النتائج (ب)، (د).

2- أطوال أضلاع المستطيل مبينة كما هو موضح في الرسم التالي.



ملحوظة
حل هذه المسألة يتضمن استخدام نموذج أو رسم

(أ) انقل الشكل السابق ثم أكمل مساحة كل مستطيل.
(ب) اجمع كل المساحات للحصول على مساحة المستطيل ن س ص ع.
(جـ) اكتب فيما يلي أطوال **(i)** ن س **(ii)** س ص وعندئذ احسب مساحة المستطيل ن س ص ع.
(د) من (ب)، (جـ) اكتب استنتاجاتك

سوف ننتقل الآن إلى استخدام الطريقة الجبرية لإيجاد مفكوك (أ + ب) (حـ + د).

نفرض حـ + د = ك

∴ (أ + ب) (حـ + د) = (أ + ب) ك

= أ ك + ب ك

= أ (حـ + د) + ب (حـ + د)

= أ حـ + أ د + ب حـ + ب د

ملحوظة

استبدل ك بـ (حـ + د)

أو بالفك المباشر

(أ + ب) (حـ + د) = أ حـ + أ د + ب حـ + ب د

لإيجاد مفكوك مقدار في صورة (أ + ب) (حـ + د)، فإن كل حد في القوس الأول يجب ضربه في كل حد في القوس الثاني

(أ + ب) (حـ + د) = أ حـ + أ د + ب حـ + ب د

مثال 5:

أوجد مفكوك:

(أ) (س + 2) (س + 5)　　　(ب) (س + 3) (س − 5)

(جـ) (س − 2) (س + 3)　　　(د) (س − 4) (س − 6)

الحل

(أ) (س + 2) (س + 5) = س^2 + 5س + 2س + 10

= س^2 + 7س + 10

(ب) (س + 3) (س − 5) = س^2 − 5س + 3س − 15

= س^2 − 2س − 15

(جـ) (س − 2) (س + 3) = س^2 + 3س − 2س − 6

= س^2 + س − 6

(د) (س − 4) (س − 6) = س^2 − 6س − 4س + 24

= س^2 − 10س + 24

مثال 6:

أوجد مفكوك:

(أ) $(2\text{أ}+3)(\text{أ}+4)$ (ب) $(3\text{ب}+2)(\text{ب}-3)$

(جـ) $(2\text{جـ}-3)(4\text{جـ}+5)$ (د) $(\text{د}-2)(3\text{د}-4)$

الحــل

(أ) $(2\text{أ}+3)(\text{أ}+4) = 2\text{أ}(\text{أ}+4) + 3(\text{أ}+4)$

$= 2\text{أ}^2 + 8\text{أ} + 3\text{أ} + 12$

$= 2\text{أ}^2 + 11\text{أ} + 12$

(ب) $(3\text{ب}+2)(\text{ب}-3) = 3\text{ب}(\text{ب}-3) + 2(\text{ب}-3)$

$= 3\text{ب}^2 - 9\text{ب} + 2\text{ب} - 6$

$= 3\text{ب}^2 - 7\text{ب} - 6$

(جـ) $(2\text{جـ}-3)(4\text{جـ}+5) = 2\text{جـ}(4\text{جـ}+5) - 3(4\text{جـ}+5)$

$= 8\text{جـ}^2 + 10\text{جـ} - 12\text{جـ} - 15$

$= 8\text{جـ}^2 - 2\text{جـ} - 15$

(د) $(\text{د}-2)(3\text{د}-4) = \text{د}(3\text{د}-4) - 2(3\text{د}-4)$

$= 3\text{د}^2 - 4\text{د} - 6\text{د} + 8$

$= 3\text{د}^2 - 10\text{د} + 8$

تمرين 1-ب

1- أوجد مفكوك مايلي:

(أ) $(\text{أ}+2)(\text{أ}+3)$ (ب) $(\text{ب}+4)(\text{ب}+5)$

(جـ) $(\text{جـ}+2)(\text{جـ}+9)$ (د) $(\text{د}+7)(\text{د}+3)$

(هـ) $(\text{ح}+3)(\text{ح}-5)$ (و) $(\text{ف}+3)(\text{ف}-7)$

(ز) $(\text{ق}-8)(\text{ق}-4)$ (ح) $(\text{هـ}-4)(\text{هـ}-7)$

(ط) $(\text{ع}-5)(\text{ع}-3)$ (ى) $(\text{ك}-5)(\text{ك}+11)$

(ك) $(\text{م}+3)(\text{م}-3)$ (ل) $(\text{ط}+2)(\text{ط}+2)$

(م) $(\text{ذ}-2)(\text{ذ}-2)$

2- أوجد مفكوك:

(أ) $(3\text{أ}+2)(\text{أ}+4)$

(ب) $(\text{س}+1)(5\text{س}+9)$

(جـ) $(5\text{ص}-3)(\text{ص}-4)$

(د) $(\text{جـ}+5)(3\text{جـ}-1)$

(هـ) $(5\text{هـ}-3)(\text{هـ}+3)$

(و) $(4\text{ب}-1)(2-3\text{ب})$

3- أوجد مفكوك:

(أ) $(\text{أ}+\text{ب})(\text{جـ}+2)$

(ب) $(\text{م}+\text{ن})(\text{ن}+3)$

(جـ) $(\text{س}+2\text{ص})(\text{ص}+2)$

(د) $(\text{ل}+\text{م})(\text{م}-\text{ن})$

(هـ) $(\text{أ}-\text{ب})(\text{جـ}+\text{د})$

(و) $(\text{ص}+2\text{س})(\text{س}+\text{ع})$

(ز) $(2\text{ص}+\text{ع})(\text{ع}+\text{س})$

(ح) $(3\text{س}-2\text{ص})(\text{س}+\text{ع})$

2-1-1 إيجاد مفكوك المربعات الكاملة Expansion of Perfect Squares

تماماً كما أن $2^2 = 4$، $3^2 = 9$، $س^2 = س \times س$ مربعات كاملة،
فإن $(أ + ب)^2 = (أ + ب)(أ + ب)$ أيضاً مربع كامل.

ملحوظة
المربع الكامل هو المقدار الناتج من حاصل ضرب أي مقدار في نفسه.

مثال 7:

أوجد مفكوك:

(أ) $(س + 4)^2$ (ب) $(س - 3)^2$

الحــل

(أ) $(س + 4)^2 = (س + 4)(س + 4)$
$= س(س + 4) + 4(س + 4)$
$= س^2 + 4س + 4س + 16$
$= س^2 + 8س + 16$

(ب) $(س - 3)^2 = (س - 3)(س - 3)$
$= س(س - 3) - 3(س - 3)$
$= س^2 - 3س - 3س + 9$
$= س^2 - 6س + 9$

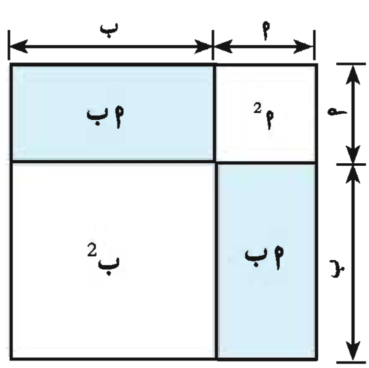
عموماً $(أ + ب)^2 = (أ + ب)(أ + ب)$
$= أ(أ + ب) + ب(أ + ب)$
$= أ^2 + أب + أب + ب^2$
إذن $= أ^2 + 2أب + ب^2$

$(أ + ب)^2 = أ^2 + 2أب + ب^2$ مربع كامل


نشاط

الهدف:
يهدف هذا النشاط إلى اكتشاف العلاقة $(أ + ب)^2 = أ^2 + 2أب + ب^2$ بطريقة هندسية.

خطوات العمل:



1 - ارسم مربعاً طول ضلعه (أ + ب) كما مبين في الشكل.

2 - قسمه إلى أشكال كما هو مبين في الشكل وأحسب مساحة كل شكل على حدة.

الإستنتاج:

من الشكل السابق نلاحظ أن:

$$(\text{أ}+\text{ب})^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{أ ب} + \text{أ ب}$$

$$\therefore (\text{أ}+\text{ب})^2 = \text{أ}^2 + \text{أ ب} + \text{أ ب} + \text{ب}^2$$

$$= \text{أ}^2 + 2\,\text{أ ب} + \text{ب}^2$$

بالمثل: $(\text{أ}-\text{ب})^2 = (\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}-\text{ب})$

$= \text{أ}(\text{أ}-\text{ب}) - \text{ب}(\text{أ}-\text{ب})$

$= \text{أ}^2 - \text{أب} - \text{أب} + \text{ب}^2$

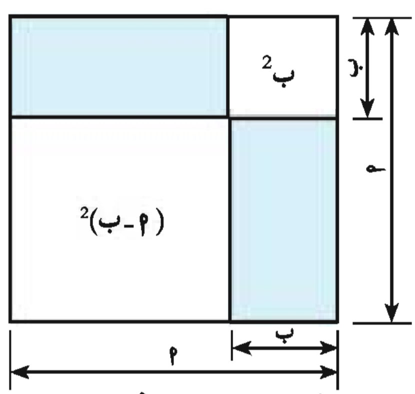
إذن $= \text{أ}^2 - 2\,\text{أب} + \text{ب}^2$

$(\text{أ}-\text{ب})^2 = \text{أ}^2 - 2\,\text{أب} + \text{ب}^2$ مربع كامل

نشاط

الهدف:
يهدف هذا النشاط إلى اكتشاف العلاقة $(\text{أ}-\text{ب})^2 = \text{أ}^2 - 2\,\text{أب} + \text{ب}^2$ بطريقة هندسية.

خطوات العمل:



1 - ارسم مربعاً كما مبين في الشكل طول ضلعه أ .

2 - قسمه إلى مساحات كما هو مبين في الشكل وأحسب مساحة كل منها.

الإستنتاج:

من الشكل السابق نلاحظ أن:

$$(\text{أ}-\text{ب})^2 = \text{أ}^2 - \left(\text{أ ب} + \text{أ ب} + \text{ب}^2\right)$$

$$\therefore (\text{أ}-\text{ب})^2 = \text{أ}^2 - \left(\text{أ ب} - \text{ب}^2 + \text{أ ب} - \text{ب}^2 + \text{ب}^2\right)$$

$$= \text{أ}^2 - \left(2\,\text{أ ب} - 2\,\text{ب}^2 + \text{ب}^2\right)$$

$$= \text{أ}^2 - \left(2\,\text{أ ب} - \text{ب}^2\right)$$

$$= \text{أ}^2 - 2\,\text{أ ب} + \text{ب}^2$$

مثال 8:

أوجد مفكوك:

(أ) $(3ى + 4)^2$ (ب) $(2ن - 3)^2$

(جـ) $(4س + ص)^2$ (د) $(3م - ن)^2$

ملحوظة

$(3ى)^2 \neq 3ى^2$

$(3ى)^2 = 3ى \times 3ى = 9ى^2$

الحل

سوف نستخدم

$(أ + ب)^2 = أ^2 + 2أب + ب^2$

كذلك $(أ - ب)^2 = أ^2 - 2أب + ب^2$

لإيجاد مفكوك المربعات الكاملة في المثال أعلاه.

(أ) $(3ى + 4)^2 = (3ى)^2 + 2(3ى)(4) + 4^2$

$= 9ى^2 + 24ى + 16$

$$\begin{array}{c}
(أ + ب)^2 = أ^2 + 2أب + ب^2 \\
(3ى + 4)^2 = (3ى)^2 + 2(3ى)(4) + 4^2
\end{array}$$

تحل 3ى محل أ، 4 محل ب

بمعنى آخر

(ب) $(2ن - 3)^2 = (2ن)^2 - 2(2ن)(3) + 3^2$

$= 4ن^2 - 12ن + 9$

$$\begin{array}{c}
(أ - ب)^2 = أ^2 - 2أب + ب^2 \\
(2ن - 3)^2 = (2ن)^2 - 2(2ن)(3) + 3^2
\end{array}$$

(جـ) $(4س + ص)^2 = (4س)^2 + 2(4س)(ص) + ص^2$

$= 16س^2 + 8س ص + ص^2$

(د) $(3م - ن)^2 = (3م)^2 - 2(3م)(ن) + ن^2$

$= 9م^2 - 6م ن + ن^2$

تمرين 1 - جـ

أوجد مفكوك كل ما يأتي:

1- $(س + 1)^2$ 2- $(س + 5)^2$ 3- $(س + 8)^2$ 4- $(س - 3)^2$

5- $(س - 5)^2$ 6- $(س + ص)^2$ 7- $(م + ن)^2$ 8- $(ذ - ت)^2$

9- $(2س + 1)^2$ 10- $(3م + 2)^2$ 11- $(5أ - 2)^2$

2-1 الفرق بين المربعات الكاملة Difference of Perfect Squares

مثال 9:

أوجد مفكوك

(أ) (س + 4) (س − 4)   (ب) (س − 3) (س + 3)

الحل

(أ) (س + 4) (س − 4) = س (س − 4) + 4 (س − 4)

= س^2 − 4س + 4س − 16

= س^2 − 16

(ب) (س − 3) (س + 3) = س (س + 3) − 3 (س + 3)

= س^2 + 3س − 3س − 9

= س^2 − 9

عموماً (أ + ب) (أ − ب) = أ (أ − ب) + ب (أ − ب)

= أ^2 − أ ب + ب أ − ب^2

= أ^2 − ب^2

إذن

(أ + ب) (أ − ب) = أ^2 − ب^2

الذى هو **الفرق بين المربعين الكاملين** أ^2، ب^2

فى المثال التالى سوف نستخدم هذه المتطابقة.

ملحوظة

(أ) لاحظ أن س^2 = س × س

16 = 4^2

∴ ينتج عن إيجاد المفكوك الفرق بين المربعين الكاملين س^2، 16

(ب) ينتج عن إيجاد المفكوك الفرق بين المربعين الكاملين س^2، 9.

مثال 10:

أوجد مفكوك:

(أ) (هـ + 6) (هـ − 6)   (ب) (2ك − 3) (2ك + 3)

الحل

(أ) (هـ + 6) (هـ − 6) = هـ^2 − 6^2

= هـ^2 − 36

(ب) (2ك − 3) (2ك + 3) = (2ك)^2 − 3^2

= 4ك^2 − 9

ملحوظة

(أ + ب) (أ − ب) = أ^2 − ب^2

(هـ + 6) (هـ − 6) = هـ^2 − 6^2

إنها (2ك)^2 **وليس** 2ك^2

تمرين 1 د

أوجد مفكوك:

1- (س + 1) (س − 1)   2- (ص + 2) (ص − 2)

3- (م + 10) (م − 10)   4- (أ + 5) (أ − 5)

5- (ب − 5) (ب + 5)   6- (د + ط) (د − ط)

7- (2د − 1) (2د + 1)   8- (3أ + 4) (3أ − 4)

3-1 المكعب وجذره التكعيبي Full Cube and Cubic Root

بالنظر إلى: $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ ، $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$\text{س}^3 = \text{س} \times \text{س} \times \text{س}$ ، $\text{ع}^3 = \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}$ **مكعبات كاملة**

فإن: $\text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} = \text{أ}^3$ ∴ أ^3 مكعب كامل.

$2\text{ب} \times 2\text{ب} \times 2\text{ب} = 8\text{ب}^3$ ∴ 8ب^3 مكعب كامل.

$3\text{س} \times 3\text{س} \times 3\text{س} = 27\text{س}^3$ ∴ 27س^3 مكعب كامل.

المكعب الكامل: هو المقدار الناتج من حاصل ضرب أي عدد في نفسه مرتين.

الجذر التكعيبي لمقدار:

$\sqrt[3]{\text{أ}^3} = \text{أ}$ لأن $\text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} = \text{أ}^3$ ،

$\sqrt[3]{8\text{ب}^3} = 2\text{ب}$ لأن $2\text{ب} \times 2\text{ب} \times 2\text{ب} = 8\text{ب}^3$ ،

$\sqrt[3]{\frac{1}{125}\text{أ}^3\text{ب}^6} = \frac{1}{5}\text{أ}\text{ب}^2$ لأن $\frac{1}{5}\text{أ}\text{ب}^2 \times \frac{1}{5}\text{أ}\text{ب}^2 \times \frac{1}{5}\text{أ}\text{ب}^2 = \frac{1}{125}\text{أ}^3\text{ب}^6$.

> **ملحوظة**
> الجذر التكعيبي لأي رمز جبري مرفوع إلى أية قوة هو نفس الرمز الجبري مرفوعاً إلى ثلث القوة الأولى.

1-3-1 الفرق بين المكعبات الكاملة Difference of Perfect Cube

مثال 11:

أوجد مفكوك:

(أ) $(\text{س} - 2)(\text{س}^2 + 2\text{س} + 4)$ (ب) $(\text{م} + \text{ل})(\text{م}^2 + \text{م}\,\text{ل} + \text{ل}^2)$

الحل

(أ) $(\text{س} - 2)(\text{س}^2 + 2\text{س} + 4) = \text{س}^3 + 2\text{س}^2 + 4\text{س} - 4\text{س} - 8$

$= \text{س}^3 - 8$

(ب) $(\text{م} + \text{ل})(\text{م}^2 + \text{م}\,\text{ل} + \text{ل}^2) = \text{م}^3 + \text{م}^2\text{ل} + \text{م}\,\text{ل}^2 - \text{م}^2\text{ل} - \text{م}\,\text{ل}^2 - \text{ل}^3$

$= \text{م}^3 - \text{ل}^3$

> **ملحوظة**
> (أ) لاحظ أن $\text{س}^3 = \text{س} \times \text{س} \times \text{س}$
> $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
> ∴ ينتج عن إيجاد المفكوك الفرق بين المكعبين الكاملين س^3 ، 8
> (ب) ينتج عن إيجاد المفكوك الفرق بين المكعبين الكاملين م^3 ، ل^3

عموماً $(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ}^2 + \text{أ}\,\text{ب} + \text{ب}^2) = \text{أ}^3 - \text{ب}^3$

2-3-1 الجموع بين المكعبات الكاملة Total of Perfect Cube

مثال 12:

أوجد مفكوك:

(أ) $(3 + \text{س})(9 - 3\text{س} + \text{س}^2)$ (ب) $(2\text{ص} + 3\text{ع})(4\text{ص}^2 - 6\text{ص}\,\text{ع} + 9\text{ع}^2)$

الحـل

(أ) $(3 + \text{س})(9 - 3\text{س} + \text{س}^2) = 27 - 9\text{س} + 3\text{س}^2 + 9\text{س} - 3\text{س}^2 - \text{س}^3$

$= 27 - \text{س}^3$

(ب) $(2\text{ص} + 3\text{ع})(4\text{ص}^2 - 6\text{ص}\,\text{ع} + 9\text{ع}^2)$

$= 8\text{ص}^3 - 12\text{ص}^2\text{ع} + 18\text{ص}^2\text{ع} + 12\text{ص}^2\text{ع} - 18\text{ص}^2\text{ع} + 27\text{ع}^3$

$= 8\text{ص}^3 - 27\text{ع}^3$

ملحوظة

(أ) ينتج عن إيجاد المفكوك الجموع بين المكعبين الكاملين 27 ، س^3

(ب) ينتج عن إيجاد المفكوك الجموع بين المكعبين الكاملين 8ص^3 ، 27ع^3

عموماً $(\text{أ} + \text{ب})(\text{أ}^2 - \text{أ}\,\text{ب} + \text{ب}^2) = \text{أ}^3 + \text{ب}^3$

تمرين 1 هـ

أوجد مفكوك:

1- $(\text{أ} + 2)(\text{أ}^2 - 2\text{أ} + 4)$

2- $(4 + \text{م})(16 - 4\text{م} + \text{م}^2)$

3- $(2\text{ب} - 1)(4\text{ب}^2 + 2\text{ب} + 1)$

4- $(3\text{م} - 2\text{س})(9\text{م}^2 + 6\text{م}\,\text{س} + 4\text{س}^2)$

4-1 العامل المشترك الأعلى لحدود المقادير الجبرية Highest Common Factor of Terms of Algebraic Expressions

درسنا في كتاب الصف السابع العوامل المشتركة والعامل المشترك الأعلى (ع.م.أ) بين عددين أو أكثر. على سبيل المثال،

عوامل العدد 30 هي 1 ، 2 ، 3، 5 ، 6، 10 ، 15، 30

عوامل العدد 40 هي 1 ، 2 ، 4 ، 5 ، 8، 10 ، 20، 40

سوف تلاحظ أن العوامل 1، 2 ، 5 ، 10 عوامل مشتركة بين 30، 40 ولهذا نقول إن 1، 2، 5، 10 تسمى **العوامل المشتركة** بين 30، 40. أكبر تلك العوامل المشتركة هو 10 ويسمى **العامل المشترك الأعلى** (ع. م. أ.) بين 30، 40.

نستخدم عمومًا **التحليل إلى العوامل الأولية** لإيجاد العامل المشترك الأعلى

$30 = 2 \times 3 \times 5$ ← ضع دائرة حول العوامل المشتركة الأولية المتناظرة.

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

∴ العامل المشترك الأعلى بين 30، 40 = 2×5 ← اضرب العوامل المشتركة الأولية في بعض.

= 10

وبالمثل يمكن استخدام التحليل إلى العوامل الأولية لإيجاد العامل المشترك الأعلى للمقادير الجبرية.

مثال 13:

أوجد العامل المشترك الأعلى بين كل من :

(أ) 3أ، 3ب (ب) 5أ، 10

(جـ) $د^2$، 6د (د) $4م^2$، 6م

(هـ) $أ^2ب^2$، 3أب

الحل

(أ) 3أ = 3 × أ

3ب = 3 × ب

∴ العامل المشترك الأعلى بين 3أ، 3ب = 3

(ب) 5أ = 5 × أ

10 = 2 × 5

∴ العامل المشترك الأعلى بين 5أ، 10= 5

(جـ) $د^2$ = د × د

6د = 6 × د

∴ العامل المشترك الأعلى بين $د^2$، 6د = د

(د) $4م^2$ = 2 × 2 × م × م

6م = 2 × 3 × م

∴ العامل المشترك الأعلى بين $4م^2$ ، 6م = 2 × م

= 2م

(هـ) $أ^2ب^2$ = أ × أ × ب × ب

3أب = 3 × أ × ب

∴ العامل المشترك الأعلى بين $أ^2ب^2$ ، 3أب = أ × ب = أب

تمرين 1-و

1- أي من الأعداد الآتية أعداد أولية؟

3، 6، 7، 10، 11، 21، 29، 43، 56، 1.

2- عبر عن كل ما يأتي بدلالة عوامله الأولية.

(أ) 21 (ب) 46 (جـ) 74

(د) 124 (هـ) 1440 (و) 360

3- أوجد العامل المشترك الأعلى بين كل من :

(أ) 20، 25 (ب) 49، 98

(جـ) 24، 84 (د) 36، 72

(هـ) 45، 63 (و) 72، 108

4- أوجد العامل المشترك الأعلى بين كل من :

(أ) 2س ، س (ب) 12أ، 6

(جـ) 24م، 12ن (د) 14م، 7م م

(هـ) 21ر، 9ر^2 (و) أ^2، أ

(ز) ص، ص^2 (ح) 2 ص، 2ص^2

(ط) 12 ى، 6ى^2 (ى) أب، أب^2

(ك) أب، أ^{2}ب (ل) م ن، م^{2}ن^2

(م) 4م^{2}ن^2، 6م^{2}ن

5-1 التحليل Factorisation

رأينا فى الجزء 2-1 أنه باستخدام قانون التوزيع أ (ب + حـ) = أ ب + أحـ.
الإجراء العكسي أ ب + أ حـ = أ (ب + حـ) يسمى "**إخراج العامل المشترك**".
اعتبر المقدار 3س + 6، عوامل 3 س هى 3 ، س وعوامل 6 هى 3، 2 لذلك 3 هو العامل المشترك الأعلى بين 3س ، 6

∴ 3س + 6 = 3 × س + 3 × 2

لكن 3(س + 2) = 3 × س + 3 × 2 (قانون التوزيع)

∴ 3س + 6 = 3 × س + 3 × 2

= 3 (س + 2)

رأينا من المثال السابق أن العامل المشترك (الأعلى) استخرج ووضع قبل القوس. المقدار داخل القوس تم الحصول عليه عن طريق قسمة كل حد على العامل المشترك الأعلى.

كتابة المقادير الجبرية كحاصل ضرب لعواملها تسمى عملية **تحليل**.
المقدار المحلل هو أبسط صورة لذلك المقدار.

مثال 14:

حلل كلًّا ما يأتي بإخراج العامل المشترك الأعلى:

(أ) 4س + 8 (ب) س^2 – س

(جـ) 6أ + 9 (د) –3م – 12

(هـ) 2أ + 4ب – 8حـ (و) 9س^2 + 24س ص – 12س

(ز) س (س + 2) + 3(س + 2) (ح) ك (2ك – 3) + (2ك – 3)

الحـل

(أ) 4س + 8 = 4 × س + 4 × 2
= 4(س + 2)

(ب) س^2 − س = س × س − س × 1
= س (س − 1)

(جـ) 6أ + 9 = 3 × 2أ + 3 × 3
= 3 (2أ + 3)

(د) −3م − 12 = (−3 × م) + (−3 × 4)
= −3 (م + 4)

(هـ) 2أ + 4ب − 8حـ = 2 × أ + 2 × 2ب − 2 × 4حـ
= 2(أ + 2ب − 4حـ)

(و) 9س^2 + 24 س ص − 12س = 3س × 3س + 3س × 8ص + 3س × (−4)
= 3س (3س + 8ص − 4)

(ز) (س + 2) تعتبر عاملًا مشتركًا بين س (س + 2)، 3 (س + 2) فيمكن استخراجها
∴ س (س + 2) + 3 (س + 2) = (س + 2) (س + 3)

(ح) (2ك − 3) عامل مشترك بين ك (2ك − 3)، (2ك − 3)
∴ ك (2ك − 3) + (2ك − 3) = ك (2ك − 3) + 1 (2ك − 3)
= (2ك − 3) (ك + 1)

ملحوظة

(ز) لاحظ أن الإجابة يمكن مراجعتها باستخدام قانون التوزيع.

(ح) لاحظ أن (2ك − 3) يمكن كتابتها 1(2ك − 3).

تمرين 1-ز

1- حلل كلًّا مما يلي بإخراج العامل المشترك الأعلى.

(أ) 3س + 12 (ب) 5 س + 15
(جـ) 7س + 49 (د) 3 س + 24
(هـ) 56 + 7س (و) 98 + 49 س
(ز) 4س − 16 (ح) 9 س − 36

2- حلل كلًّا مما يلي بإخراج العامل المشترك الأعلى.

(أ) 6س + 21 (ب) 4م + 6
(جـ) 8م + 12 (د) 10ص + 25
(هـ) 18د − 27

3- حلل كلًّا مما يلي بإخراج العامل المشترك الأعلى.

(أ) س^2 + 4س (ب) ر^2 − 8ر
(جـ) 5ت^2 − 7 ت (د) 3 د − 4د^2
(هـ) 2ت^2 + 6ت (و) 5 ص^2 − 15ص
(ز) 15 ص + 10ص^2

4- حلل كلًّا مما يلي بإخراج العامل المشترك الأعلى (السالب).

(أ) −3أ − 6 (ب) −8 د − 48
(جـ) −12م − 24 (د) −13س + 26
(هـ) −16س + 8 (و) −س^2 − 3 س
(ز) −4ص − ص^2 (ح) −3د^2 − د

5- حلل كلًّا مما يأتي:

(أ) س (س + 1) + 2 (س + 1)
(ب) ت (ت − 2) + 2 (ت − 2)
(جـ) ل (ل + 3) − 3 (ل + 3)
(د) ذ (ذ + 6) − 6 (ذ + 6)
(هـ) ب (4ب − 3) − 3 (4ب − 3)
(و) ص (4ص + 1) − 2 (4ص + 1)
(ز) س (1 − 3س) + 2 (1 − 3س)
(ح) ص (ص + 1) + (ص + 1)
(ط) ت (ت + 3) + (ت + 3)

6- حلل كلًّا مما يلي:

(أ) أ^2 + أ ب + 4أ
(ب) ص^2 + ص ع − 3ص
(جـ) د^2 + د ط − 7 د
(د) ر^2 + ذ ر − 4ر
(هـ) أ^{2}ب^2 + أب + 2أ
(و) س^2 ص − 3س ص + س
(ز) أ^{2}ب^2 − 3أب^2 + 4أب

1-5-1 التحليل بالتجميع Factorisation by Grouping

إذا حللنا المقدار أ جـ + أ د + ب جـ + ب د سوف تلاحظ عدم وجود عامل مشترك بين الحدود الأربعة. ولكن يمكن تحليلها عن طريق تجميع الحدود مع عامل مشترك كما يلي:

أ جـ + أ د + ب جـ + ب د = أ (جـ + د) + ب (جـ + د)
= (جـ + د) (أ + ب)

حدود بينها عامل مشترك أ — حدود بينها عامل مشترك ب

> **ملحوظة**
> (جـ + د) مشترك بين الحدين

سوف تلاحظ أن التحليل أعلاه هو الإجراء المعاكس لإيجاد المفكوك.

(أ + ب) (جـ + د) = أ (جـ + د) + ب (جـ + د)
= أ جـ + أ د + ب جـ + ب د

> **ملحوظة**
> ارجع إلى القسم 2 - 1 - 1

مثال 15:

حلل:

(أ) أ جـ + أ د + 2 جـ + 2د

(ب) 3ى ز − 6ى ص + س ز − 2س ص

(جـ) م² د + 3 م² ط − 2ن د − 6ن ط

(د) هـ س + ك ص − هـ ص − ك س

الحل

(أ) أ جـ + أ د + 2 جـ + 2 د = أ (جـ + د) + 2(جـ + د)
= (جـ + د) (أ + 2)

(ب) 3ى ز − 6ى ص + س ز − 2 س ص = 3ى (ز − 2ص) + س (ز − 2ص)
= (ز − 2ص) (3ى + س)

(جـ) م² د + 3م² ط − 2ن د − 6ن ط = م² (د + 3 ط) − 2 ن (د + 3 ط)
= (د + 3ط) (م² − 2ن)

(د) هـ س + ك ص − هـ ص − ك س = هـ س − هـ ص − ك س + ك ص
= هـ (س − ص) − ك (س − ص)
= (س − ص) (هـ − ك)

> **ملحوظة**
> رتب الحدود التي لها عوامل مشتركة معًا.
>
> لاحظ أن
> −2ن (د + 3ط) = −2ن د − 6ن ط
>
> −ك (س − ص) = −ك س + ك ص

تمرين 1-ح

1- حلل كلًّا مما يلي:

(أ) أ (ع + 1) + 2(ع + 1)

(ب) ب (ص + 2) + 4(ص + 2)

(جـ) جـ (س − 3) + 3(س − 3)

(د) ح (ن + 5) − 6(ن + 5)

(هـ) ق (ت − 6) − 7(ت − 6)

(و) م² (2ر + 1) + (2ر + 1)

(ز) 2ك (3 + د) − 3(3 + د)

(ح) د (ز − س) − ح (ز − س)

(ط) 2ف (ت + 3ى) − ق (ت + 3ى)

2- حلل كلًّا مما يلي:

(أ) م د + م ط − ن د − ن ط

(ب) 2أ ص + 2أ ع − ب ص − ب ع

(جـ) حـ س + حـ ى + س^2 + ى س

(د) 3ح^2 + ح س + 3 ح ز + ز س

(هـ) ف ى + ف ت + و ى + و ت

(و) 4هـ ذ − 2هـ ر − 2ك ذ + ك ر

(ز) م د + م ط − د − ط

(ح) 2ن ص + 2ن ع − ص − ع

3- حلل 3ى ز + 12ى + ز + 4

2-5-1 تحليل المقادير التربيعية الثلاثية Factorisation of Quadratic Expressions

المقدار الذي على الصورة أس^2 + ب س + حـ (حيث أ، ب، حـ ثوابت وحيث أ ≠ 0) يسمى **مقدارًا تربيعيًّا ثلاثيًّا**. أحد طرق تحليل المقدار التربيعي هو استخدام عكس قانون التوزيع. على سبيل المثال

س^2 + 7س + 12 = س^2 + 4س + 3س + 12

= س (س + 4) + 3 (س + 4) (باستخدام التجميع)

= (س + 4) (س + 3)

سوف تلاحظ أن 7س قسمت إلى 3س + 4 س ويجب التأكد من أن في الإجابة النهائية ناتج العددين داخل القوس هو **الحد الثابت** للمقدار التربيعي، وفي هذه الحالة 4 × 3 = 12 ولعمل ذلك بطريقة منهجية سوف ندرس "**طريقة التبادل**" أو طريقة المقص.

مثال 16:

حلل 2س^2 + 7 س + 3

الحــل

الخطوة الأولى

حدد العوامل الممكنة للحدود في س^2 وكذلك للحد الثابت.

2س^2 + 7س + 3

↑ ↑

س × 2س (+1) × (+3)

الخطوة 2

اكتب العوامل رأسيًّا كما هو موضح.

س	+1
2س	+3

الخطوة 3

استخدم الضرب التبادلي للعوامل واكتب ناتج العملية في العمود الأخير.

$$\begin{array}{r|ll} 2س & +1 & س \\ 3س & +3 & 2س \\ \hline & & \end{array}$$

الخطوة 4

اجمع العمود الأخير. ولا تقبل العملية إن لم يكن المجموع مساوٍ للحد في س في المقدار المعطى.

$$\begin{array}{r r|ll} \text{اجمع} \left\{ \right. & 2س & +1 & س \\ & 3س & +3 & 2س \\ \hline & 7س \neq 5س & & \end{array}$$

$\therefore$ مرفوض

الخطوة 5

بادل أماكن 1، 3 واستخدم الضرب التبادلي ثم اجمع العمود الأخير مرة أخرى.

$$\begin{array}{r r|ll} & 6س & +3 & س \\ & س & +1 & 2س \\ \hline \text{مقبول} & 7س & & \end{array}$$

الخطوة 6

بما أن الخطوة (5) قُبلت، فإن عوامل المقدار التربيعي هي تلك الموضوعة في $\boxed{}$.

$$\begin{array}{r|l} 6س & \boxed{+3 \quad س} \\ س & \boxed{+1 \quad 2س} \\ \hline 7س & \end{array}$$

$\therefore$ 2س^2 + 7س + 3 = (س + 3) (2س + 1)

في المثال **16**، قصدنا كتابة الخطوات بطريقة مطولة حتى يمكنك تتبعها. مع التدريب الكافي يمكن تمثيل معظم الخطوات ذهنيًّا كما هو موضح في الأمثلة التالية.

مثال 17:

حلل $أ^2 + 11أ + 30$

الحل

$أ^2 + 11أ + 30$

أ × أ   1 × 30 أو 2×15 أو 5 × 6 أو 3 × 10

محاولة 1

أ	1	أ
أ	30	30أ
		31أ ≠ 11أ

محاولة 2

أ	2	2أ
أ	15	15أ
		17أ ≠ 11أ

محاولة 3

أ	5	5أ
أ	6	6أ
		11أ

∴ $أ^2 + 11أ + 30 = (أ + 5)(أ + 6)$

مثال 18:

حلل $ص^2 - 8ص + 12$.

الحل

$ص^2 - 8ص + 12$

ص × ص   2 × 6 أو (−2) × (−6) إلخ

محاولة 1

ص	2	2ص
ص	6	6ص
		8ص ≠ −8ص

محاولة 2

ص	−2	−2ص
ص	−6	−6ص
		−8ص

∴ $ص^2 - 8ص + 12 = (ص - 2)(ص - 6)$

لاحظ أن الحد (−8ص) يشير إلى أن عاملي الحد الثابت الموجب (12) سالبان، ولذا يجب التعبير عن العدد (12) كما يلي (−3) × (−4) أو (−2) × (−6) بدلاً من 3 × 4 أو 2×6 .

مثال 19:

حلل $2م^2 + م - 3$.

الحل

$2م^2 + م - 3$

م × 2م   1× (−3) أو (−1) × 3.

محاولة 1			محاولة 2		
م	1	2م	م	-1	-2م
2م	-3	-3م	2م	3	$+3\text{م}$
		$-\text{م} \neq \text{م}$			م

$\therefore\ 2\text{م}^2 + \text{م} - 3 = (\text{م} - 1)(2\text{م} + 3)$

في المثال التالي، سوف نتخطى العمليات المرفوضة، وبالتدريب الكافي سوف تستطيعه أنت كذلك.

مثال 20:

حلل:

(أ) $\text{س}^2 + 7\text{س} + 10$
(ب) $2\text{ص}^2 + 8\text{ص} + 6$
(جـ) $3 - \text{م} - 2\text{م}^2$
(د) $2\text{د}^2 + 3\text{د}\text{ر} + \text{ر}^2$

الحل

(أ) $\text{س}^2 + 7\text{س} + 10 = (\text{س} + 2)(\text{س} + 5)$

لاحظ أن الحدود الثلاثة 2ص^2، 8ص، 6 لها نفس العامل المشترك 2. دائمًا استخرج أولًا العامل المشترك الأعلى.

(ب) $2\text{ص}^2 + 8\text{ص} + 6 = 2(\text{ص}^2 + 4\text{ص} + 3)$

$= 2(\text{ص} + 1)(\text{ص} + 3)$

(جـ) $3 - \text{م} - 2\text{م}^2 = (1 - \text{م})(3 + 2\text{م})$

$1 \times 3 \qquad -\text{م} \times 2\text{م}$

لاحظ أن بإمكانك مراجعة إجابتك باستخدام قانون التوزيع لفك إجابتك والتأكد من الحصول على المقدار الأصلي.

(د) $2\text{د}^2 + 3\text{د}\text{ر} + \text{ر}^2 = (\text{د} + \text{ر})(2\text{د} + \text{ر})$

$\text{د} \times 2\text{د} \qquad \text{ر} \times \text{ر}$

ملحوظة

(أ)

س	2	2س
س	5	5س
		7س

(ب)

ص	1	ص
ص	3	3ص
		4ص

(جـ)

1	$-\text{م}$	-3م
3	2م	2م
		$-\text{م}$

(د)

د	ر	$2\text{د}\text{ر}$
2د	ر	$\text{د}\text{ر}$
		$3\text{د}\text{ر}$

تمرين 1-ط

1- حلل كلًّا مما يأتي:

(أ) $\text{ع}^2 + 3\text{ع} + 2$
(ب) $\text{س}^2 + 7\text{س} + 6$
(جـ) $\text{ن}^2 + 12\text{ن} + 36$
(د) $\text{ذ}^2 + 10\text{ذ} + 21$
(هـ) $\text{د}^2 - 12\text{د} + 36$
(و) $\text{م}^2 - 7\text{م} + 12$
(ز) $\text{هـ}^2 + \text{هـ} - 12$
(ح) $\text{ق}^2 + 5\text{ق} - 6$
(ط) $\text{ف}^2 + 4\text{ف} - 12$
(ى) $\text{ح}^2 + \text{ح} - 6$
(ك) $\text{ك}^2 - 5\text{ك} - 24$
(ل) $\text{حـ}^2 - 4\text{حـ} - 12$
(م) $\text{أ}^2 - \text{أ} - 12$

2- حلل كلًّا مما يأتي:

(أ) 2أ^2 + 5أ + 2

(ب) 3ب^2 + 10ب + 3

(جـ) 12حـ^2 + 17حـ + 6

(د) 12ح^2 + ح − 6

(هـ) 6ف^2 + 5ف − 6

(و) 3و^2 − 4و + 1

(ز) 4هـ^2 − 17هـ + 4

3- حلل:

(أ) ى^2 + 9ى ذ + 20ذ^2

(ب) أ^2 + 7أب + 10ب^2

(جـ) 48حـ^2 + 8حـ ع − ع^2

(د) 48ذ^2 + 2ذ ص − ص^2

(هـ) ح^2 − 4ح س + 4س^2

(و) ف^2 − 6ف س + 9س^2

(ز) 5و^2 − 8و ن − 4ن^2

(ح) 6هـ^2 − هـ ى − 12ى^2

3-5-1 تحليل الفرق بين مربعين Factorisation of a Difference of Two Squares

رأينا في الفصل 2-2 أنه باستخدام قانون التوزيع (أ+ب) (أ−ب) = أ^2−ب^2 ، يمكن استخدام الإجراء العكسي أ^2−ب^2 = (أ+ب) (أ−ب) لتحليل المقادير التي هي الفرق بين المربعين.

ملحوظة

الجذر التربيعي لأي رمز جبري مرفوع إلى أية قوة هو نفس الرمز الجبري مرفوعاً إلى نصف القوة الأولى.

الجذر التربيعي لمقدار:

$\sqrt{أ^2}$ = أ لأن أ × أ = أ^2،

$\sqrt{4أ^2}$ = 2أ لأن 2أ × 2أ = 4أ^2،

$\sqrt{\frac{1}{9}أ^2ب^2}$ = $\frac{1}{3}$أب لأن $\frac{1}{3}$أب × $\frac{1}{3}$أب = $\frac{1}{9}$أ^{2}ب^2 .

نشاط

الهدف:

يهدف هذا النشاط إلى اكتشاف العلاقة أ^2-ب^2 = (أ−ب) (أ+ب) بطريقة هندسية.

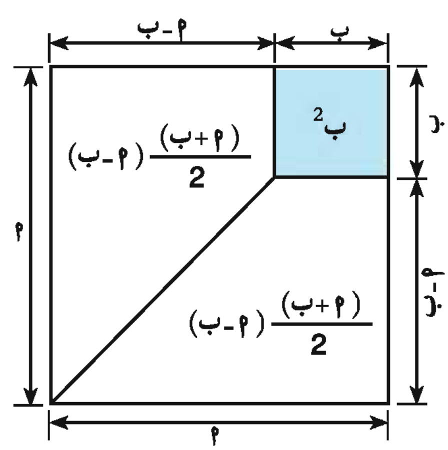
خطوات العمل:

1 - ارسم مربعاً طول ضلعه أ .

2 - قسم هذا المربع إلى مساحات كما موضح في الشكل وأحسب مساحة كل منها.

الإستنتاج:

من الشكل السابق نلاحظ أن:



$$\boxed{أ^2} - \boxed{ب^2} = \boxed{\frac{(أ+ب)\ (أ-ب)}{2}} + \boxed{\frac{(أ+ب)\ (أ-ب)}{2}}$$

∴ أ^2-ب^2 = $\frac{(أ+ب)}{2}$ (أ-ب) + $\frac{(أ+ب)}{2}$ (أ-ب)

= 2× $\frac{(أ+ب)\ (أ-ب)}{2}$

= (أ+ب) (أ−ب)

> **ملحوظة**
> الفرق بين مربعين كاملين

مثال 21:

حلل:

(أ) $س^2 - 4$ (ب) $أ^2 - 64$ (جـ) $4م^2 - 25$ (د) $2ص^2 - 18$

الحل

(أ) $س^2 - 4 = س^2 - 2^2$

$= (س - 2)(س + 2)$

(ب) $أ^2 - 64 = أ^2 - 8^2$

$= (أ - 8)(أ + 8)$

(جـ) $4م^2 - 25 = (2م)^2 - 5^2$

$= (2م - 5)(2م + 5)$

(د) $2ص^2 - 18 = 2(ص^2 - 9)$

$= 2(ص^2 - 3^2)$

$= 2(ص - 3)(ص + 3)$

> **ملحوظة**
> استخرج دائمًا أي عامل مشترك كخطوة أولى.

مثال 22:

حلل:

(أ) $م^2 - 9ن^2$ (ب) $4أ^2 - 9ب^2$

(جـ) $(حـ + 2)^2 - 9$ (د) $ص^4 - 16$

الحل

(أ) $م^2 - 9ن^2 = م^2 - (3ن)^2 = (م - 3ن)(م + 3ن)$

(ب) $4أ^2 - 9ب^2 = (2أ)^2 - (3ب)^2 = (2أ - 3ب)(2أ + 3ب)$

(جـ) $(حـ + 2)^2 - 9 = (حـ + 2)^2 - 3^2 = (حـ + 2 - 3)(حـ + 2 + 3)$

$= (حـ - 1)(حـ + 5)$

(د) $ص^4 - 16 = ص^4 - 4^2 = (ص^2)^2 - 4^2$

$= (ص^2 - 4)(ص^2 + 4)$

$= (ص^2 - 2^2)(ص^2 + 4)$

$= (ص - 2)(ص + 2)(ص^2 + 4)$

مثال 23:

من دون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

(أ) $73^2 - 27^2$ (ب) $6.4^2 - 3.6^2$

الحل

(أ) $73^2 - 27^2 = (73 - 27)(73 + 27)$

$= 46 \times 100 = 4600$

(ب) $6.4^2 - 3.6^2 = (6.4 - 3.6)(6.4 + 3.6)$

$= 2.8 \times 10 = 28$

تمرين 1-ي

1- حلل كلًّا مما يأتي:

(أ) $أ^2 - 49$ (ب) $ب^2 - 25$

(جـ) $16 - ح^2$ (د) $144 - د^2$

(هـ) $4ع^2 - 81$ (و) $16ص^2 - 25$

(ز) $49 - 100ك^2$ (ح) $121 - 25س^2$

(ط) $25م^2 - 1$ (ي) $64ن^2 - 1$

(ك) $5س^2 - 500$ (ل) $2د^2 - 32$

(م) $108 - 3ز^2$ (ن) $64 - 4ر^2$

2- حلل:

(أ) $أ^2 - ع^2$ (ب) $ب^2 - ص^2$

(جـ) $ح^2 - 4س^2$ (د) $16ح^2 - ز^2$

(هـ) $49هـ^2 - 64ذ^2$ (و) $(ر + 1)^2 - 4$

(ز) $(ك - 2)^2 - 100$ (ح) $(أ - 4)^2 - 25$

(ط) $(م + 3)^2 - 144$ (ي) $169 - (ن - 4)$

(ك) $ب^4 - ص^4$ (ل) $ي^4 - 81$

3- من دون استعمال الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

(أ) $88^2 - 12^2$ (ب) $77^2 - 23^2$

(جـ) $9.8^2 - 0.2^2$ (د) $8.7^2 - 1.3^2$

(هـ) $6.54^2 - 3.46^2$ (و) $5.43^2 - 4.57^2$

(ز) $(\frac{3}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2$ (ح) $(\frac{5}{8})^2 - (\frac{3}{8})^2$

(ط) $\frac{69^2 - 44^2}{4^2 + 3^2}$ (ي) $\frac{78^2 - 22^2}{8^2 + 6^2}$

4- حلل:

(أ) $ز^2 - 25$ (ب) $س^4 - 13س^2 + 36$

5- حلل:

(أ) $4أ - 6ب$ (ب) $9م^2 - 1$

(جـ) $ت^2 - 10ت + 25$

4-5-1 تحليل الفرق بين المكعبين ومجموع المكعبين

Factorisation of a Differnce of Two Cubes and Total Cubes

رأينا في البند 1-3 أنه باستخدام القانون:

$$(أ \mp ب)(أ^2 \pm أب + ب^2) = أ^3 \mp ب^3$$

مثال 24:

حلل:

(أ) $س^3 - 27$ (ب) $ص^3 + 125$ (جـ) $2ب^3 - 16$ (د) $م^3 - \frac{1}{64}$

الحل

(أ) $س^3 - 27 = س^3 - 3^3$

$= (س - 3)(س^2 + 3س + 9)$

(ب) $ص^3 + 125 = ص^3 - 5^3$

$= (ص + 5)(ص^2 - 5ص + 25)$

(جـ) $2ب^3 - 16 = 2(ب^3 - 8)$

$= 2(ب^3 - 2^3)$

$= 2(ب - 2)(ب^2 + 2ب + 4)$

(د) $م^3 - \frac{1}{64} = م^3 - (\frac{1}{4})^3$

$= (م - \frac{1}{4})(م^2 + \frac{1}{4}م + \frac{1}{16})$

ملحوظة

إستخراج دائماً إلى عامل مشترك كخطوة أولى.

مثال 25:

حلل:

(أ) $م^{3} - ن^{3}$ (ب) $8أ^{3} + ب^{3}$ (جـ) $\frac{1}{27}س^{3} - 27ص^{3}$

الحل

(أ) $م^{3} - ن^{3} = (م - ن)(م^{2} + م ن + ن^{2})$

(ب) $8أ^{3} + ب^{3} = (2أ + ب)(4أ^{2} - 2أ ب + ب^{2})$

(جـ) $\frac{1}{27}س^{3} - 27ص^{3} = (\frac{1}{3}س - 3ص)(\frac{1}{9}س^{2} + س ص + 9ص^{2})$

تمرين 1ـك

1- حلل كلاً مما يأتي:

(أ) $ص^{3} + 27$

(ب) $64 - ع^{3}$

(جـ) $2ز^{2} - 16$

(د) $\frac{1}{125} + م^{3}$

(هـ) $\frac{27}{8}س^{3} - \frac{8}{27}$

(و) $ى^{3} - ل^{3}$

2- حلل:

(أ) $(س + ص)^{3} - ص^{3}$

(ب) $(أ - 4)^{3} - 125$

(جـ) $(2 - ك)^{3} + 216$

(د) $729م^{3} - 1$

3- حلل:

(أ) $س^{6} - ص^{6}$

(ب) $م^{3}ن^{3} - ك^{3}$

4- من دون استعمال الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

(أ) $(\frac{1}{2})^{3} - (\frac{1}{3})^{3}$

(ب) $(2.31)^{3} - (1.01)^{3}$

ملخص

1- إيجاد مفكوك المقادير الجبرية باستخدام قانون التوزيع:

$أ(ب + حـ) = أ ب + أ حـ$

$(أ + ب)(حـ + د) = أ(حـ + د) + ب(حـ + د)$

$= أ حـ + أ د + ب حـ + ب د$

2- خمس صور مفيدة لإيجاد المفكوك:

$(أ + ب)^{2} = أ^{2} + 2أ ب + ب^{2}$

$(أ - ب)^{2} = أ^{2} - 2أ ب + ب^{2}$

(م ـ ب) (م + ب) = م^2 ـ ب^2

(م ـ ب) (م^2 + م ب + ب^2) = م^3 ـ ب^3

(م + ب) (م^2 ـ م ب + ب^2) = م^3 + ب^3

3- التحليل عكس عملية إيجاد المفكوك.

4- التحليل باستخدام العامل المشترك الأعلى:

مثال: 4س + 8 = 4 (س + 2)

5- التحليل باستخدام التجميع:

مثال: أ حـ + أ ى + ب حـ + ب ى = أ (حـ + ى) + ب (حـ + ى)

= (أ + ب) (حـ + د)

6- تحليل المقادير التربيعية:

مثال: 2س^2 + 7س + 3 = (س + 3) (2س + 1)

س	3	6 س
2 س	1	س
		7 س

7- تحليل الفرق بين المربعين:

مثال: س^2 - 4 = س^2 - 2^2

= (س - 2) (س + 2)

8- تحليل الفرق بين المكعبين ومجموع المكعبين:

مثال: س^3 - 27 = س^3 - 3^3

= (س - 3) (س^2 + 3س + 9)

9- استخرج دائماً العامل المشترك الأعلى في بدء عملية التحليل:

مثال: 2ص^2 + 8ص + 6 = 2(ص^2 + 4ص + 3)

= 2(ص + 1) (ص + 3)

استقصاء الرياضيات

التربيع الذهني

عرض سعيد على محمد كيفية تربيع الأعداد المختلفة ذهنيًا وقد استخدم المثال التالي ليبين ذلك.

(أ)	(ب)	(جـ)
25^2	35^2	45^2
4	9	16
2 +	3 +	4 +
6	12	20
$\therefore 25^2 = 625$	$35^2 = 1225$	$45^2 = 2025$

هل يمكنك إيجاد كيفية الحصول على:

(i) 55^2 (ii) 65^2 (iii) 15^2؟

لاحظ محمد أن جميع الأعداد المطلوب تربيعها كان رقم الآحاد بها (5)، فحاول نفس الطريقة مع الأعداد حيث رقم الآحاد مختلفًا.

(أ)	(ب)
24^2	16^2
4	1
2 +	1 +
6	2
$24^2 = 576 \neq 616$	$16^2 = 256 \neq 236$

أمعن محمد التفكير في سبب نجاح الطريقة السابقة فقط مع الأعداد التي رقم آحادها (5). استطاع في النهاية باستخدام الجبر أن يفهم لماذا لا تصلح تلك الطريقة إلا مع الأعداد التي رقم آحادها (5)، فهل تستطيع أنت ذلك؟

ورقة المراجعة 1

القسم (أ)

1- أوجد مفكوك:

(أ) 3(أ+2)

(ب) 4(3ب−2)

(جـ) −5(4س+3)

(د) −6(5ص−4)

2- حلل:

(أ) 20جـ+15

(ب) 6−12د

(جـ) −8س−12

(د) −6ص+21

3- أوجد مفكوك:

(أ) 3(2أ−ب)

(ب) 4جـ(3+2جـ)

(جـ) −5س(س+ص)

(د) −2ص(3ص−1)

4- حلل:

(أ) 6س − 9ص

(ب) أ^{2}ب + أب^2

(جـ) 3س^2 − 6س

(د) −ك ص^2 − ك ص

القسم (ب)

5- أوجد مفكوك:

(أ) (م+2)(3م+4)

(ب) (3ن−5)(2ن+5)

(جـ) (د−3)(5د−7)

6- حلل:

(أ) هـ^2+3هـ+2

(ب) ك^2+5ك−6

(جـ) ر^2−ر−6

7- أوجد مفكوك:

(أ) (6أ+5)^2

(ب) (4−س)(4+س)

(جـ) (4−3ص)^2

8- حلل:

(أ) 4ح^2−36

(ب) 4س^2−4س+1

(جـ) 2ص^2+4ص+2

القسم (جـ)

9- حلل أ^2 − ب^2:

ثم أوجد قيمة

(أ) $4.99^2 - 1.01^2$

(ب) $\sqrt{26^2 - 24^2}$

من دون استخدام الآلة الحاسبة.

10-(أ) حلل:

(i) 10س^2−90

(ii) 5أ−أب+10−2ب

(ب) إذا كان س^2+ص^2=25، س ص=12، أوجد قيمة

(i) (س+ص)^2

(ii) (س−ص)^2

(iii) س^2−ص^2

2 الكسور والصيغ الجبرية
Algebraic Fractions and Formulae


الخوارزمي

علمنا في مقدمة الجزء الأول من الصف الثامن، أن "ديوفانتوس" يعتبر مؤسس علم الجبر (اللقب الذي يتقاسمه مع العالم العربي محمد بن موسى الخوارزمي) الذي ولد في خوارزم، وأقام في بغداد في عصر المأمون، وأشهر كتبه كتاب "الجبر والمقابلة"، وقد تُرجم إلى اللغة اللاتينية في سنة 1135 م، وقد دخلت على إثر ذلك كلمات مثل الجبر Algebra والصفر Zero إلى اللغات اللاتينية وفي كتابه "حساب الجبر والمقابلة" حل منهجي للمعادلات الخطية والتربيعية؛ كان لإسهاماته تأثير كبير على اللغة الإنجليزية ككلمة Algorism نظام العَدّ العربي، وكلمة Algorithm خوارزمية، تبعان منAlgoritm ، الشكل اللاتيني لاسمه، وأسمه أصل الكلمة في اللغة الأسبانية "Guarismo"، البرتغالية "Algarisma" وهما الاثنان بمعنى "رقم".

في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادرًا على:

- تبسيط الكسور الجبرية البسيطة.
- تبسيط الكسور الجبرية التي تتضمن تحليلات إضافية.
- إجراء عمليات الضرب والقسمة على الكسور الجبرية.
- إجراء عمليات الجمع والطرح على الكسور الجبرية ذات المقامات العددية.
- إجراء عمليات الجمع والطرح على الكسور الجبرية ذات المقامات الجبرية الخطية.
- حل المعادلات التي تتضمن كسورًا جبرية.
- التعبير عن الصيغة الجبرية بمتغير تابع مختلف.

1-2 الكسور الجبرية Algebraic Fractions

لقد عرفنا الكسور العددية مثل، $\frac{1}{2}$، $\frac{3}{4}$، $\frac{5}{10}$. وبالمثل يمكن أيضًا مقابلة الكسور الجبرية والتي على صورة

$$\frac{\text{أ}}{3}\ ،\ \frac{\text{أ}}{\text{ب}}\ ،\ \frac{\text{أ}}{\text{ب}^2}\ ،\ \frac{\text{أ}-\text{ب}}{2}\ ،\ \frac{\text{أ}}{\text{ب}+\text{جـ}}\ ،\ \frac{2\text{أ}^2+\text{ب}^2}{\text{أ}^2+\text{ب}^2}$$

والتي تكتب أيضًا بصورة $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ حيث س تسمى **بسطًا** وحيث ص، (ص $\neq$ صفر) تسمى **مقامًا**.

2-2 تبسيط الكسور الجبرية البسيطة
Simplification of Simple Algebraic Fractions

لتبسيط الكسور الجبرية، نتبع نفس الطريقة التي نتبعها في تبسيط الكسور العددية بحذف (أي قسمة) العوامل المشتركة في كل من البسط والمقام.

الكسر العددي	الكسر الجبري
$\frac{8}{12} = \frac{2 \times \cancel{4}^{1}}{3 \times \cancel{4}_{1}} = \frac{2}{3}$	$\frac{15\text{م}}{10} = \frac{3 \times \cancel{5}^{1} \times \text{م}}{2 \times \cancel{5}_{1}} = \frac{3\text{م}}{2}$

يمكن تبسيط الكسور الجبرية عن طريق "حذف" العوامل المشتركة في كلٍّ من البسط والمقام، مع ذكر شرط الاختصار إن لزم الأمر، والأمثلة توضح ذلك.

مثال 1:

اختصر الكسور الجبرية الآتية مع ذكر شرط الاختصار:

(أ) $\frac{8\text{أ}}{6}$ (ب) $\frac{4\text{ب}^{3}}{\text{ب}}$ (جـ) $\frac{21\text{جـ}\text{ء}}{7\text{ء}}$ (د) $\frac{6\text{ع}}{9\text{ء}\text{ع}}$

الحل

(أ) $\frac{8\text{أ}}{6} = \frac{4 \times \cancel{2}^{1} \times \text{أ}}{3 \times \cancel{2}_{1}} = \frac{4\text{أ}}{3}$

(ب) $\frac{4\text{ب}^{3}}{\text{ب}} = \frac{4 \times \cancel{\text{ب}}^{1} \times \text{ب} \times \text{ب}}{\cancel{\text{ب}}_{1}} = 4\text{ب}^{2}$ ، $\text{ب} \neq 0$

(جـ) $\frac{21\text{جـ}\text{ء}}{7\text{ء}} = \frac{3 \times \cancel{7}^{1} \times \text{جـ} \times \cancel{\text{ء}}^{1}}{\cancel{7}_{1} \times \cancel{\text{ء}}_{1}} = 3\text{جـ}$ ، $\text{ء} \neq 0$

(د) $\frac{6\text{ع}}{9\text{ء}\text{ع}} = \frac{\cancel{3}^{1} \times 2 \times \cancel{\text{ع}}^{1}}{3 \times \cancel{3} \times \text{ء} \times \cancel{\text{ع}}_{1}} = \frac{2}{3\text{ء}}$ ، $\text{ء} \neq 0$، $\text{ع} \neq 0$

مثال 2:

اختصر الكسور الجبرية الآتية مع ذكر شرط الاختصار:

(أ) $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{(\text{أ} - \text{ب})^{2}}$ (ب) $\frac{(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})}{(\text{أ} + \text{ب})}$

(جـ) $\frac{\text{ص} + \text{ع}}{\text{س}(\text{ص} + \text{ع})}$ (د) $\frac{(\text{س} - 2)(\text{س} + 3)}{(\text{س} - 2)^{2}}$

> **ملحوظة**
> القسمة على الصفر غير مسموح بها تعطي كمية غير معرّفة.

الحل

(أ) $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{(\text{أ} - \text{ب})^{2}} = \frac{\cancel{(\text{أ} - \text{ب})}^{1}}{\cancel{(\text{أ} - \text{ب})}_{1}(\text{أ} - \text{ب})}$

$= \frac{1}{\text{أ} - \text{ب}}$ ، $\text{أ} \neq \text{ب}$

(ب) $\frac{(\text{أ} - \text{ب})\cancel{(\text{أ} + \text{ب})}^{1}}{\cancel{(\text{أ} + \text{ب})}_{1}} = \text{أ} - \text{ب}$ ، $\text{أ} \neq -\text{ب}$

(جـ) $\frac{\cancel{(\text{ص} + \text{ع})}^{1}}{\text{س}\cancel{(\text{ص} + \text{ع})}_{1}} = \frac{1}{\text{س}}$ ، $\text{ص} \neq -\text{ع}$

(د) $\frac{(\text{س} - 2)(\text{س} + 3)}{(\text{س} - 2)^{2}} = \frac{\cancel{(\text{س} - 2)}^{1}(\text{س} + 3)}{\cancel{(\text{س} - 2)}_{1}(\text{س} - 2)}$ ، $\text{س} \neq 2$

$= \frac{\text{س} + 3}{\text{س} - 2}$

تمرين 2أ

1- اختصر مع ذكر شرط الاختصار:

(أ) $\frac{9}{12}$ (ب) $\frac{20}{15}$ (جـ) $\frac{45}{27}$

(د) $\frac{8\text{ ص}}{12}$ (هـ) $\frac{27\text{س}}{36}$ (و) $\frac{72\text{د}}{64}$

(ز) $\frac{\text{م ن}}{\text{ن}}$ (ح) $\frac{\text{هـ}}{\text{هـ ت}}$ (ط) $\frac{\text{ع}}{\text{ع}^2}$

2- اختصر كل كسر في أبسط صورة مع ذكر شرط الاختصار:

(أ) $\frac{8\text{ب}}{8\text{أب}}$ (ب) $\frac{12\text{ب حـ}}{6\text{ حـ}}$

(جـ) $\frac{14\text{حـ ى}}{21\text{ى}}$ (د) $\frac{18\text{ى}}{9\text{ى}^2}$

(هـ) $\frac{6\text{ح}^3}{2\text{ح}^2}$ (و) $\frac{18\text{ف}^2}{27\text{ف}^4}$

(ز) $\frac{\text{و ن}^2}{2\text{ و}^2\text{ن}}$ (ح) $\frac{3\text{ هـ}^3\text{ س}}{4\text{ هـ س}}$

(ط) $\frac{5\text{ ك س}^2}{10\text{ك}^3\text{ س}}$

3- اختصر ما يأتي مع ذكر شرط الاختصار:

(أ) $\frac{\text{د (أ - ب)}}{\text{د (أ + ب)}}$ (ب) $\frac{\text{ط (ب + حـ)}}{\text{ط (ب - حـ)}}$

(جـ) $\frac{\text{حـ (ر - ذ)}}{\text{ر (ر - ذ)}}$ (د) $\frac{\text{ى (ر + ذ)}}{\text{ذ (ر + ذ)}}$

(هـ) $\frac{\text{ح}^2}{\text{ح(ت + ى)}}$ (و) $\frac{\text{ف (ت - ى)}}{\text{ف}^3}$

(ز) $\frac{\text{و (ن + س)}}{\text{(ن + س)}^2}$ (ح) $\frac{\text{(ن - س)}^2}{\text{هـ(ن - س)}^2}$

(ط) $\frac{\text{(ك - 1)}^2}{\text{(ك - 1) (ك + 1)}}$ (ى) $\frac{\text{(م + 1) (م - 1)}}{\text{(م + 1)}^2}$

2-3 تبسيط الكسور الجبرية التي تتضمن عمليات تحليل إضافية

Simplification of Algebraic Fractions Involving Further Factorisation

الخطوة الأولى في تحليل المقادير الجبرية هي إخراج العوامل المشتركة لجميع حدود المقدار. على سبيل المثال،

$$2\text{س}^2 + 14\text{س} + 24 = 2\ (\text{س}^2 + 7\text{س} + 12)$$

$$= 2\ (\text{س} + 3)\ (\text{س} + 4)$$

المتطابقات الثلاث في اليسار مفيدة أيضًا في تحليل بعض المقادير التربيعية.

$$\text{أ}^2 + 2\text{أب} + \text{ب}^2 \equiv (\text{أ} + \text{ب})^2$$

$$\text{أ}^2 - 2\text{أب} + \text{ب}^2 \equiv (\text{أ} - \text{ب})^2$$

$$\text{أ}^2 - \text{ب}^2 \equiv (\text{أ} + \text{ب})(\text{أ} - \text{ب})$$

سوف توضح الأمثلة التالية تطبيق التحليل في تبسيط الكسور الجبرية.

مثال 3:

اختصر الآتي مع ذكر شرط الاختصار:

(أ) $\frac{\text{أ}^2 + \text{أ حـ}}{\text{أ}}$ (ب) $\frac{\text{ب}^2 + \text{ب حـ}}{\text{ب حـ} + \text{حـ}^2}$

(جـ) $\frac{3\text{ س} + 6}{6\text{ص} - 9}$ (د) $\frac{\text{س}^2 + 3\text{ س} + 2}{\text{س} + 2}$

الحل

(أ) $\frac{\text{أ}^2+\text{أ}\,\text{حـ}}{\text{أ}} = \frac{\cancel{\text{أ}}(\text{أ}+\text{حـ})}{\cancel{\text{أ}}} = \text{أ}+\text{حـ}$ ، $\text{أ} \neq 0$

(ب) $\frac{\text{ب}^2+\text{ب}\,\text{حـ}}{\text{ب}\,\text{حـ}+\text{حـ}^2} = \frac{\text{ب}\cancel{(\text{ب}+\text{حـ})}}{\text{حـ}\cancel{(\text{ب}+\text{حـ})}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$ ، $\text{ب} \neq -\text{حـ}$

(جـ) $\frac{3\text{س}+6}{6\text{ص}-9} = \frac{\cancel{3}(\text{س}+2)}{\cancel{3}(2\text{ص}-3)}$

$= \frac{\text{س}+2}{2\text{ص}-3}$ ، $\text{ص} \neq \frac{3}{2}$

(د) $\frac{\text{س}^2+3\text{س}+2}{\text{س}+2} = \frac{\cancel{(\text{س}+2)}(\text{س}+1)}{\cancel{(\text{س}+2)}}$

$= \text{س}+1$ ، $\text{س} \neq -2$

مثال 4:

اختصر :

(أ) $\frac{2\text{ى}-6}{\text{ى}^2-6\text{ى}+9}$ (ب) $\frac{\text{ز}^2+2\text{ز}+1}{\text{ز}+1}$ (جـ) $\frac{\text{س}-\text{ص}}{3\text{ص}-3\text{س}}$ (د) $\frac{\text{س}^2-4}{2-\text{س}}$

الحل

(أ) $\frac{2\text{ى}-6}{\text{ى}^2-6\text{ى}+9} = \frac{2\cancel{(\text{ى}-3)}}{(\text{ى}-3)\cancel{(\text{ى}-3)}}$ ، $\text{ى} \neq 3$

$= \frac{2}{\text{ى}-3}$

(ب) $\frac{\text{ز}^2+2\text{ز}+1}{\text{ز}+1} = \frac{(\text{ز}+1)^2}{\text{ز}+1}$

$= \frac{(\text{ز}+1)\cancel{(\text{ز}+1)}}{\cancel{(\text{ز}+1)}} = \text{ز}+1$ ، $\text{ز} \neq -1$

(جـ) $\frac{\text{س}-\text{ص}}{3\text{ص}-3\text{س}} = \frac{\text{س}-\text{ص}}{3(\text{ص}-\text{س})}$

$= \frac{-\cancel{(\text{ص}-\text{س})}}{3\cancel{(\text{ص}-\text{س})}} = -\frac{1}{3}$ ، $\text{ص} \neq \text{س}$

(د) $\frac{\text{س}^2-4}{2-\text{س}} = \frac{\text{س}^2-2^2}{2-\text{س}}$

$= \frac{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}{2-\text{س}} = \frac{-\cancel{(2-\text{س})}(\text{س}+2)}{\cancel{(2-\text{س})}} = -(\text{س}+2)$ ، $\text{س} \neq 2$

ملحوظة

تصور ذهنيًا:

$\text{ى}^2-6\text{ى}+9 = \text{ى}^2-2\text{ى}(3)+3^2$

$\text{أ}^2-2\text{أ}\text{ب}+\text{ب}^2$

$\text{أ}^2-2\text{أ}\text{ب}+\text{ب}^2 = (\text{أ}-\text{ب})^2$

$\therefore \text{ى}^2-2\text{ى}(3)+3^2 = (\text{ى}-3)^2$

$\text{أ}^2+2\text{أ}\text{ب}+\text{ب}^2 = (\text{أ}+\text{ب})^2$

$\text{ز}^2+2\text{ز}(1)+1^2 = (\text{ز}+1)^2$

$-(\text{ص}-\text{س}) = -\text{ص}+\text{س}$

$= \text{س}-\text{ص}$

$\text{س}^2-2^2 = (\text{س}-2)(\text{س}+2)$

$\text{أ}^2-\text{ب}^2 = (\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}+\text{ب})$

$-(\text{س}-2) = -\text{س}+2 = 2-\text{س}$

تمرين 2ب

1- حلل ما يلي:

(أ) $\text{أ}^2+5\text{أ}+6$ (ب) $\text{س}^2-\text{س}-6$

(جـ) $\text{حـ}^2+4\text{حـ}+4$ (د) $\text{س}^2-6\text{س}+9$

(هـ) ح^2-16 (و) 2ص^2-18

(ز) $2\text{و}^2+8\text{و}+6$ (ح) $3\text{ع}^2+3\text{ع}-18$

2- اختصر ما يلي في أبسط صورة مع ذكر شرط الاختصار:

(أ) $\frac{\text{أ}\,\text{د}}{\text{أ}\,\text{د}-\text{أ}^2}$ (ب) $\frac{\text{ب}^2-\text{ب}\,\text{ط}}{\text{ب}\,\text{ط}-\text{ط}^2}$

(جـ) $\frac{9\text{حـ}-6}{6\text{ر}+3}$ (د) $\frac{4\text{ك}+8\text{ذ}}{2\text{ك}-4\text{ذ}}$

(هـ) $\frac{2(\text{ح}-\text{ت})}{3(\text{ت}-\text{ح})}$ (و) $\frac{2\text{ف}-3\text{ى}}{3\text{ى}-2\text{ف}}$

(ز) $\frac{2\text{ج}-4\text{ت}}{6\text{ت}-3\text{ج}}$ (ح) $\frac{2\text{هـ}-4\text{س}}{12\text{س}-6\text{هـ}}$

(ط) $\frac{3\text{ك}-\text{ك}\,\text{س}}{2\text{س}-6}$ (ى) $\frac{3-6\text{ص}}{2\text{م}\,\text{ص}-\text{م}}$

3- اختصر ما يأتي مع ذكر شرط الاختصار:

(أ) $\frac{\text{أ}^2+3\text{أ}+2}{2\text{أ}+4}$ (ب) $\frac{\text{ب}^2-3\text{ب}+2}{3\text{ب}-6}$

(جـ) $\frac{\text{ر}^2-4}{\text{ر}^2+2\text{ر}}$ (د) $\frac{\text{ذ}^2-9}{\text{ذ}^2-3\text{ذ}}$

(هـ) $\frac{\text{ح}^2+4\text{ح}+4}{2\text{ح}^2+4\text{ح}}$ (و) $\frac{\text{ف}^2-6\text{ف}+9}{3\text{ف}^2-9\text{ف}}$

(ز) $\frac{\text{ن}^2-16}{\text{ن}-4}$ (ح) $\frac{\text{س}^2-10\text{س}+25}{\text{س}-5}$

(ط) $\frac{\text{هـ}^2-4\text{حـ}^2}{2\text{حـ}-\text{هـ}}$ (ي) $\frac{9\text{ى}^2-\text{ك}^2}{\text{ك}-3\text{ى}}$

(ك) $\frac{2\text{س}^2-2\text{س}-12}{3-\text{س}}$ (ل) $\frac{4-\text{س}^2}{3\text{س}+6}$

4-2 ضرب وقسمة الكسور الجبرية

Multiplication and Division of Algebraic Fractions

لاحظ حاصل الضرب التالي:

$$\frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{15}_{3}} \times \frac{\cancel{40}^{8}}{\cancel{49}_{7}} = \frac{8\times 1}{7\times 3} = \frac{8}{21}$$

في المثال السابق، لاحظ أنه عند ضرب الكسور في الحساب،

- تُحذف العوامل المشتركة في البسط والمقام.
- تُضرب العوامل المتبقية في كل من البسط والمقام في بعضها.

وبالمثل يمكننا استخدام نفس القواعد لضرب الكسور الجبرية.

على سبيل المثال: $\frac{\cancel{4}^{1}\cancel{\text{س}}^{1}\,\text{ص}}{\cancel{\text{س}}_{1}} \times \frac{3\cancel{\text{س}}^{1}}{\cancel{8}\cancel{\text{س}}_{1}} = \frac{\text{ص}\times 3}{2} = \frac{3\text{ص}}{2}$

ولقسمة كسر جبري على آخر استبدل العلامة (÷) إلى (×) واقلب المقسوم عليه ثم استأنف الضرب.

على سبيل المثال $\frac{5\text{ع}}{6} \div \frac{2\text{ع}\,\text{ن}}{12} = \frac{\cancel{5}^{1}\cancel{\text{ع}}}{\cancel{6}_{1}} \times \frac{\cancel{12}^{1}}{\cancel{2}_{1}\cancel{\text{ع}}_{1}\,\text{ن}} = \frac{5}{\text{ن}}$

مثال 5:

اختصر ما يلي:

(أ) $\frac{5\text{أ}}{12} \times \frac{4}{\text{أ}}$ (ب) $\frac{8\text{د}\,\text{ط}}{9\text{ر}} \times \frac{3\text{ر}}{4\text{د}}$

الحل

(أ) $\frac{\cancel{5}\,\cancel{\text{أ}}^{1}}{\cancel{12}_{3}} \times \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{\text{أ}}_{1}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

(ب) $\frac{\cancel{8}^{2}\cancel{\text{د}}^{1}\,\text{ط}}{\cancel{9}_{3}\cancel{\text{ر}}_{1}} \times \frac{\cancel{3}^{1}\cancel{\text{ر}}^{1}}{\cancel{4}_{1}\cancel{\text{د}}_{1}} = \frac{2\text{ط}}{3}$

مثال 6:

اختصر:

(أ) $\frac{6\text{هـ}}{7} \div \frac{2\text{ك}}{14}$ (ب) $\frac{4\text{أ}\text{حـ}}{7} \div \frac{16\text{حـ}}{5\text{أ}}$

الحل

(أ) $\frac{6\text{هـ}}{7} \div \frac{2\text{ك}}{14} = \frac{6\text{هـ}}{\cancel{7}_{1}} \times \frac{\cancel{14}^{\cancel{2}\,1}}{\cancel{2}_{1}\text{ك}}$

$= \frac{6\text{هـ}}{\text{ك}}$

(ب) $\frac{4\text{أ}\text{حـ}}{7} \div \frac{16\text{حـ}}{5\text{أ}} = \frac{\cancel{4}^{1}\text{أ}\,\cancel{\text{حـ}}^{1}}{7} \times \frac{5\text{أ}}{\cancel{16}_{4}\cancel{\text{حـ}}_{1}}$

$= \frac{5\text{أ}\times\text{أ}}{4\times 7} = \frac{5\text{أ}^2}{28}$

مثال 7:

اختصر :

(أ) $\frac{\text{م} + \text{ن}}{\text{ن}} \times \frac{\text{م ن}}{\text{3م} + \text{3ن}}$ (ب) $\frac{\text{2س}^2 - \text{5س} + 2}{\text{س} - 1} \times \frac{1}{\text{2س} - 1}$

الحل

(أ) $\frac{\text{م} + \text{ن}}{\text{ن}} \times \frac{\text{م ن}}{\text{3م} + \text{3ن}} = \frac{\cancel{(\text{م} + \text{ن})}^{1}}{\cancel{\text{ن}}_{1}} \times \frac{\text{م} \cancel{\text{ن}}^{1}}{3\cancel{(\text{م} + \text{ن})}_{1}}$

$= \frac{\text{م}}{3}$

(ب) $\frac{\text{2س}^2 - \text{5س} + 2}{\text{س} - 1} \times \frac{1}{\text{2س} - 1} = \frac{(\text{س} - 2)\cancel{(\text{2س} - 1)}^{1}}{\text{س} - 1} \times \frac{1}{\cancel{(\text{2س} - 1)}_{1}}$ ، $\text{س} \neq \frac{1}{2}$

$= \frac{\text{س} - 2}{\text{س} - 1}$

مثال 8:

اختصر :

(أ) $\frac{\text{3أ} - \text{ب}}{\text{أ}} \div \frac{\text{3أب} - \text{ب}^2}{\text{2ب}}$ (ب) $\frac{\text{ص}^2 - \text{5ص} + 6}{\text{ص} + 3} \div (\text{ص} - 2)$

الحل

(أ) $\frac{\text{3أ} - \text{ب}}{\text{أ}} \div \frac{\text{3أب} - \text{ب}^2}{\text{2ب}} = \frac{\text{3أ} - \text{ب}}{\text{أ}} \times \frac{\text{2ب}}{\text{3أب} - \text{ب}^2}$

$= \frac{\cancel{(\text{3أ} - \text{ب})}^{1}}{\text{أ}} \times \frac{2\cancel{\text{ب}}^{1}}{\cancel{\text{ب}}_{1}\cancel{(\text{3أ} - \text{ب})}_{1}}$

$= \frac{2}{\text{أ}}$ ، $\text{3أ} \neq \text{ب}$

(ب) $\frac{\text{ص}^2 - \text{5ص} + 6}{\text{ص} + 3} \div (\text{ص} - 2) = \frac{\text{ص}^2 - \text{5ص} + 6}{\text{ص} + 3} \times \frac{1}{\text{ص} - 2}$

$= \frac{(\text{ص} - 3)\cancel{(\text{ص} - 2)}^{1}}{\text{ص} + 3} \times \frac{1}{\cancel{(\text{ص} - 2)}_{1}}$

$= \frac{\text{ص} - 3}{\text{ص} + 3}$ ، $\text{ص} \neq 2$

ملحوظة

$\text{ص} - 2 = \frac{\text{ص} - 2}{1}$

تمرين 2 جـ

1- اختصر ما يأتي مع ذكر شرط الاختصار:

(أ) $\frac{\text{3هـ}}{11} \times \frac{22}{\text{هـ}}$ (ب) $\frac{\text{6ذ}}{7} \times \frac{28}{\text{ذ}}$

(جـ) $\frac{\text{7ر ذ}}{\text{14 ت}} \times \frac{\text{3ت}}{\text{ر}}$ (د) $\frac{\text{3هـ ك}}{\text{ق}} \times \frac{\text{5ق}}{\text{6ك}}$

(هـ) $\frac{\text{7ق}}{15} \times \frac{\text{3ق هـ}}{2}$ (و) $\frac{8}{\text{7 س ص}} \times \frac{21}{\text{4س}}$

2- اختصر ما يأتي مع ذكر شرط الاختصار:

(أ) $\frac{\text{2أ}}{3} \div \frac{\text{أ}}{3}$ (ب) $\frac{\text{5م ن}}{6} \div \frac{\text{2ن}}{12}$

(جـ) $\frac{\text{س ص}}{36} \div \frac{\text{ص}}{4}$ (هـ) $\frac{\text{س ص}}{3} \div \frac{\text{ص ع}}{3}$

(و) $\frac{\text{9أ}}{\text{م ن}} \div \frac{\text{3أ}}{\text{4م}}$ (ز) $\frac{\text{6ت}}{\text{7 ص}} \div \frac{\text{9ت}}{\text{8ص ع}}$

(ح) $\frac{\left(\frac{\text{2أب}}{\text{جـ}}\right)}{\left(\frac{\text{6ب}}{\text{4جـ}}\right)}$ (ط) $\frac{\left(\frac{\text{8 ص}}{\text{9 ع}}\right)}{\left(\frac{\text{4 ص}}{\text{5 س ع}}\right)}$

3- اختصر ما يأتي:

(أ) $\frac{أ^2 - 3أب}{2ب} \times \frac{4أ}{أ - 3ب}$

(ب) $\frac{هـ^2 + هـك}{هـك - ك^2} \times \frac{هـ - ك}{هـ + ك}$

(جـ) $\frac{رذ^2}{2ر - 4ذ} \div \frac{ر^2ذ}{3ر - 6ذ}$

(د) $\frac{3م}{3م + ن} \div \frac{3م^2}{3من + ن^2}$

(هـ) $\frac{ى^2 + ى - 6}{ى + 3} \times \frac{ى}{2ى - 4}$

(و) $\frac{2ن^2 + 13ن + 15}{6ن + 9} \times \frac{ن}{ن + 5}$

(ز) $\frac{س^2 + 3س + 2}{س + 3} \div \frac{س + 2}{س^2 + 3س}$

(ح) $\frac{س^2 - 4س - 45}{س - 5} \div \frac{س - 9}{س}$

(ط) $\frac{ص - 4}{ص + 5} \times \frac{ص^2 - 25}{3ص - 12}$

(ى) $\frac{ع^2 - 4ع + 4}{2ع - 4} \div (ع + 2)$

5-2 جمع وطرح الكسور الجبرية ذات المقامات العددية

Addition and Subtraction of Algebraic Fractions with Numerical Denominators

نعلم أنه ينبغي قبل جمع أو طرح الكسور العددية توحيد مقاماتها أولًا.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} + \frac{2 \times 3}{5 \times 3}$$
$$= \frac{5}{15} + \frac{6}{15}$$
$$= \frac{5 + 6}{15} = \frac{11}{15}$$

بالمثل نعبر عن الكسور الجبرية بتوحيد مقاماتها قبل جمعها أو طرحها.

$$\frac{أ}{3} + \frac{2أ}{5} = \frac{أ \times 5}{3 \times 5} + \frac{2أ \times 3}{5 \times 3}$$
$$= \frac{5أ}{15} + \frac{6أ}{15}$$
$$= \frac{5أ + 6أ}{15} = \frac{11أ}{15}$$

لجمع أو طرح الكسور الجبرية:

1- أوجد المضاعف المشترك الأدنى للمقامات.

2- أعد كتابة الكسور الجبرية بعد توحيد مقاماتها باستخدام المضاعف المشترك الأدنى الذي حصلت عليه.

3- بعد ذلك اجمع أو اطرح البسوط كما هو مطلوب.

مثال 9:

اختصر ما يلي:

(أ) $\frac{5\text{أ}}{9} + \frac{\text{أ}}{9}$ (ب) $\frac{\text{ب}}{6} + \frac{2\text{ب}}{5}$

(جـ) $\frac{\text{ك}}{10} + \frac{4\text{ك}}{5}$ (د) $\frac{\text{هـ}}{3} + \frac{5\text{هـ}}{12} + \frac{3\text{هـ}}{16}$

الحــل

(أ) $\frac{5\text{أ}}{9} + \frac{\text{أ}}{9} = \frac{5\text{أ} + \text{أ}}{9}$

$= \frac{6\text{أ}}{9} = \frac{2\text{أ}}{3}$

(ب) $\frac{\text{ب}}{6} + \frac{2\text{ب}}{5} = \frac{\text{ب} \times 5}{6 \times 5} + \frac{2\text{ب} \times 6}{5 \times 6}$

$= \frac{5\text{ب}}{30} + \frac{12\text{ب}}{30}$

$= \frac{5\text{ب} + 12\text{ب}}{30} = \frac{17\text{ب}}{30}$

(جـ) $\frac{\text{ك}}{10} + \frac{4\text{ك}}{5} = \frac{\text{ك}}{10} + \frac{4\text{ك} \times 2}{5 \times 2}$

$= \frac{\text{ك}}{10} + \frac{8\text{ك}}{10}$

$= \frac{\text{ك} + 8\text{ك}}{10} = \frac{9\text{ك}}{10}$

(د) $\frac{\text{هـ}}{3} + \frac{5\text{هـ}}{12} + \frac{3\text{هـ}}{16} = \frac{\text{هـ} \times 16}{3 \times 16} + \frac{5\text{هـ} \times 4}{12 \times 4} + \frac{3\text{هـ} \times 3}{16 \times 3}$

$= \frac{16\text{هـ}}{48} + \frac{20\text{هـ}}{48} + \frac{9\text{هـ}}{48}$

$= \frac{16\text{هـ} + 20\text{هـ} + 9\text{هـ}}{48}$

$= \frac{45\text{هـ}}{48} = \frac{15\text{هـ}}{16}$

ملحوظة

الكسران لهما نفس المقام.

المضاعف المشترك الأدنى لـ 5، 6 هو
$= 5 \times 6 = 30$

5	5	10
	1	2

∴ المضاعف المشترك الأدنى لـ 10، 5 هو
$= 5 \times 2 = 10$

3	3	12	16
4	1	4	16
	1	1	4

∴ المضاعف المشترك الأدنى لـ 3، 12، 16 هو $= 3 \times 4 \times 4 = 48$

مثال 10:

اختصر:

(أ) $\frac{9\text{أ}}{10} - \frac{4\text{أ}}{10}$ (ب) $\frac{2\text{ب}}{5} - \frac{\text{ب}}{3}$

(جـ) $\frac{5\text{هـ}}{12} - \frac{3\text{هـ}}{16}$ (د) $\frac{13\text{ك}}{15} - \frac{5\text{ك}}{12} - \frac{\text{ك}}{10}$

الحــل

(أ) $\frac{9\text{أ}}{10} - \frac{4\text{أ}}{10} = \frac{9\text{أ} - 4\text{أ}}{10}$

$= \frac{5\text{أ}}{10} = \frac{\text{أ}}{2}$

ملحوظة

الكسران لهما نفس المقام.

(ب) $\frac{2ب}{5} - \frac{ب}{3} = \frac{2ب \times 3}{5 \times 3} - \frac{ب \times 5}{3 \times 5}$

$= \frac{6ب}{15} - \frac{5ب}{15}$

$= \frac{6ب - 5ب}{15} = \frac{ب}{15}$

(جـ) $\frac{5هـ}{12} - \frac{3هـ}{16} = \frac{5هـ \times 4}{12 \times 4} - \frac{3هـ \times 3}{16 \times 3}$

$= \frac{20هـ}{48} - \frac{9هـ}{48}$

$= \frac{20هـ - 9هـ}{48} = \frac{11هـ}{48}$

(د) $\frac{13ك}{15} - \frac{5ك}{12} - \frac{ك}{10} = \frac{13ك \times 4}{15 \times 4} - \frac{5ك \times 5}{12 \times 5} - \frac{ك \times 6}{10 \times 6}$

$= \frac{52ك}{60} - \frac{25ك}{60} - \frac{6ك}{60}$

$= \frac{52ك - 25ك - 6ك}{60}$

$= \frac{21ك}{60} = \frac{7ك}{20}$

ملحوظة

المضاعف المشترك الأدنى لـ 3،5 هو

$= 5 \times 3$

$= 15$

4	12	16
	3	4

المضاعف المشترك الأدنى لـ 12، 16 هو

$= 4 \times 3 \times 4 = 48$

2	10	12	15
3	5	6	15
5	5	2	5
	1	2	1

∴ المضاعف المشترك الأدنى لـ 10، 12، 15 هو

$= 2 \times 3 \times 5 \times 2 = 60$

تمرين 2د

1- اختصر

(أ) $\frac{4أ}{15} + \frac{8أ}{15}$ (ب) $\frac{جـ}{4} + \frac{جـ}{6}$

(جـ) $\frac{5ح}{9} + \frac{ح}{6}$ (د) $\frac{2ر}{9} + \frac{ر}{15}$

(هـ) $\frac{7ت}{9} + \frac{8ت}{21}$

2- اختصر:

(أ) $\frac{7ف}{9} - \frac{4ف}{9}$ (ب) $\frac{2ق}{5} - \frac{4ق}{5}$

(جـ) $\frac{5هـ}{12} - \frac{3هـ}{8}$ (د) $\frac{7ك}{12} - \frac{7ك}{16}$

(هـ) $\frac{11م}{24} - \frac{11م}{16}$ (و) $\frac{4ص}{15} - \frac{9ص}{10}$

3- اختصر ما يأتي

(أ) $\frac{أ}{2} + \frac{3أ}{4} + \frac{5أ}{8}$ (ب) $ب + \frac{2ب}{3} + \frac{4ب}{5}$

(جـ) $\frac{4م}{5} + \frac{3م}{4} - \frac{م}{3}$ (د) $\frac{14ر}{15} - \frac{7ر}{12} - \frac{ر}{10}$

(هـ) $\frac{ى}{2} - \frac{3ى}{4} + \frac{5ى}{6}$

مثال 11:

اختصر :

(أ) $\frac{أ + 2}{3} + \frac{أ}{2}$ (ب) $\frac{ب + 4}{3} + \frac{ب - 2}{5}$

(جـ) $\frac{هـ + 1}{3} - \frac{هـ}{4}$ (د) $\frac{2ك + 5}{3} - \frac{ك + 3}{9}$

الحـل

(أ) $\frac{أ + 2}{3} + \frac{أ}{2} = \frac{2 \times (أ + 2)}{6} + \frac{3 \times أ}{6}$

$= \frac{2(أ + 2) + 3أ}{6}$

$= \frac{2أ + 4 + 3أ}{6}$

$= \frac{5أ + 4}{6}$

ملحوظة

المضاعف المشترك الأدنى لـ 2، 3 هو 6. كل بسط (أ + 2) يجب ضربه في 2.

(ب) $\frac{\text{ب}+4}{3}+\frac{\text{ب}-2}{5}=\frac{5(\text{ب}+4)}{15}+\frac{3(\text{ب}-2)}{15}$

$=\frac{5(\text{ب}+4)+3(\text{ب}-2)}{15}$

$=\frac{5\text{ب}+20+3\text{ب}-6}{15}$

$=\frac{8\text{ب}+14}{15}=\frac{2(4\text{ب}+7)}{15}$

(جـ) $\frac{\text{هـ}+1}{3}-\frac{\text{هـ}}{4}=\frac{4(\text{هـ}+1)}{12}-\frac{3\text{هـ}}{12}$

$=\frac{4(\text{هـ}+1)-3\text{هـ}}{12}$

$=\frac{4\text{هـ}+4-3\text{هـ}}{12}$

$=\frac{\text{هـ}+4}{12}$

ملحوظة

البسط كاملًا (ك + 3) يجب أن يكون في أقواس.

(د) $\frac{2\text{ك}+5}{3}-\frac{\text{ك}+3}{9}=\frac{3(2\text{ك}+5)}{9}-\frac{(\text{ك}+3)}{9}$

$=\frac{3(2\text{ك}+5)-(\text{ك}+3)}{9}$

$=\frac{6\text{ك}+15-\text{ك}-3}{9}$

$=\frac{5\text{ك}+12}{9}$

تمرين 2هـ

1- اختصر ما يلي:

(أ) $\frac{\text{أ}+2}{3}+\frac{\text{أ}}{4}$ (ب) $\frac{\text{ب}+8}{3}+\frac{\text{ب}}{5}$

(جـ) $\frac{\text{جـ}-1}{3}+\frac{\text{جـ}}{8}$ (د) $\frac{\text{ى}-4}{4}+\frac{\text{ى}}{5}$

(هـ) $\frac{2\text{ح}}{3}+\frac{\text{ح}-1}{4}$ (و) $\frac{4\text{ف}}{5}+\frac{\text{ف}+1}{2}$

2- اختصر مايلي:

(أ) $\frac{\text{هـ}+1}{2}+\frac{\text{هـ}+2}{3}$ (ب) $\frac{\text{ك}+4}{3}+\frac{\text{ك}-2}{5}$

(جـ) $\frac{2\text{م}+1}{3}+\frac{\text{م}-3}{4}$ (د) $\frac{\text{ن}-3}{5}+\frac{2\text{ن}-1}{3}$

(هـ) $\frac{\text{ر}-3}{9}+\frac{\text{ر}-2}{3}$ (و) $\frac{\text{ذ}-2}{10}+\frac{\text{ذ}-1}{5}$

(ز) $\frac{2\text{س}-\text{ص}}{6}+\frac{\text{ص}-\text{س}}{10}$ (ح) $\frac{\text{س}-\text{ع}}{8}+\frac{\text{ع}-2\text{س}}{12}$

3- اختصر:

(أ) $\frac{\text{أ}+3}{3}-\frac{\text{أ}}{3}$ (ب) $\frac{4\text{ب}+5}{7}-\frac{4\text{ب}}{7}$

(جـ) $\frac{2\text{جـ}-3}{8}-\frac{\text{جـ}}{8}$ (د) $\frac{\text{ح}}{7}-\frac{\text{ح}+3}{7}$

(هـ) $\frac{\text{ف}}{10}-\frac{\text{ف}-5}{10}$ (و) $\frac{7\text{ق}}{9}-\frac{1-2\text{ق}}{9}$

(ز) $\frac{\text{هـ}}{3}+\frac{\text{هـ}-5}{3}$

4- اختصر

(أ) $\frac{\text{هـ}+5}{3}-\frac{\text{هـ}}{7}$ (ب) $\frac{2-5\text{ن}}{2}-\frac{3}{5}$

(جـ) $\frac{4\text{ط}}{7}-\frac{\text{ط}-2}{6}$ (د) $\frac{4+\text{ر}}{3}-\frac{3-\text{ر}}{4}$

(هـ) $\frac{\text{ذ}-3}{2}-\frac{3+\text{ذ}}{3}$

5- اختصر

(أ) $\frac{\text{ى}+3}{4}-\frac{\text{ى}+2}{8}$ (ب) $\frac{4\text{ض}+1}{5}-\frac{\text{ض}+3}{10}$

(جـ) $\frac{6\text{س}-5}{3}-\frac{\text{س}+2}{12}$ (د) $\frac{2\text{هـ}-3}{15}-\frac{\text{هـ}+5}{10}$

(هـ) $\frac{2\text{ك}+7}{8}-\frac{\text{ك}-3}{12}$ (و) $\frac{\text{م}+2}{6}-\frac{2\text{م}-3}{8}$

(ز) $\frac{4\text{ن}-5}{12}-\frac{6\text{ن}+7}{16}$

6-2 جمع وطرح الكسور الجبرية ذات المقامات الجبرية

Addition and Subtraction of Algebraic Fractions with Algebraic Denominators

الكسور المتضمنة في الجمع والطرح في التدريبين الأخيرين لها مقامات عددية مثل 4 في $\frac{1}{4}$ أو 3 في $\frac{\text{أ}+2}{3}$. نفس القاعدة يتم تطبيقها عند جمع وطرح الكسور ذات المقامات الجبرية مثل أ في $\frac{4}{\text{أ}}$، أو أ + 2 في الكسر $\frac{\text{ب}}{\text{أ}+2}$.

> يجب أن يكون للكسور الجبرية نفس المقام قبل جمعها أو طرحها.

$$\frac{4}{\text{أ}} + \frac{3}{\text{أ}} = \frac{4+3}{\text{أ}}$$
$$= \frac{7}{\text{أ}}$$

> طريقة إيجاد المضاعف المشترك الأدنى في المقامات الجبرية هي نفس الطريقة كما في حالة المقامات العددية .

$$\frac{1}{3\text{أ}} + \frac{2}{5\text{أ}} = \frac{1\times5}{3\text{أ}\times5} + \frac{2\times3}{5\text{أ}\times3}$$
$$= \frac{5}{15\text{أ}} + \frac{6}{15\text{أ}}$$
$$= \frac{5+6}{15\text{أ}}$$
$$= \frac{11}{15\text{أ}}$$

ملحوظة

أ | 3أ ، 5أ
3 ، 5

∴ المضاعف المشترك الأدنى لكل من 3أ ، 5أ
= أ × 3 × 5
= 15أ

مثال 12:

بسِّط واختصر كلًّا مما يلي إلى كسر وحيد:

(أ) $\frac{7}{\text{أ}} - \frac{2}{\text{أ}}$ (ب) $\frac{5}{\text{م}} + \frac{3}{2\text{م}}$

(جـ) $\frac{8}{\text{هـ}} + \text{هـ}$ (د) $\frac{3}{\text{س}} - \frac{\text{س}}{2}$

الحل

(أ) $\frac{7}{\text{أ}} - \frac{2}{\text{أ}} = \frac{7-2}{\text{أ}}$
$= \frac{5}{\text{أ}}$

(ب) $\frac{5}{\text{م}} + \frac{3}{2\text{م}} = \frac{5\times2}{\text{م}\times2} + \frac{3}{2\text{م}}$
$= \frac{10}{2\text{م}} + \frac{3}{2\text{م}}$
$= \frac{13}{2\text{م}}$

(جـ) $\frac{8}{\text{هـ}} + \text{هـ} = \frac{8}{\text{هـ}} + \frac{\text{هـ}}{1}$
$= \frac{8}{\text{هـ}} + \frac{\text{هـ}\times\text{هـ}}{1\times\text{هـ}}$
$= \frac{8}{\text{هـ}} + \frac{\text{هـ}^2}{\text{هـ}}$
$= \frac{\text{هـ}^2+8}{\text{هـ}}$

(د) $\frac{3}{\text{س}} - \frac{\text{س}}{2} = \frac{3\times2}{\text{س}\times2} - \frac{\text{س}\times\text{س}}{2\times\text{س}}$
$= \frac{6}{2\text{س}} - \frac{\text{س}^2}{2\text{س}}$
$= \frac{6-\text{س}^2}{2\text{س}}$

ملحوظة

(ب) م | م ، 2م
1 2

∴ المضاعف المشترك الأدنى لكل من م ، 2م
= م × 1 × 2
= 2م

(جـ) المضاعف المشترك الأدنى لكل من هـ ، 1 هو هـ .

(د) المضاعف المشترك الأدنى لكل من س ، 2
= س × 2
= 2س

مثال 13:

عبر عن كل مما يلي ككسر وحيد في أبسط صورة

أ) [illegible] ب) [illegible]

جـ) [illegible] د) [illegible]

الحل

أ) [illegible]

ب) [illegible]

جـ) [illegible]

د) [illegible]

مثال 14:

عبر عن كل ما يلي ككسر وحيد في أبسط صورة

أ) $\frac{1}{س - 1} - \frac{1}{س + 2}$ ب) [illegible]

الحل

أ) [illegible]

$= \frac{(س + 2) - (س - 1)}{(س - 1)(س + 2)}$

$= \frac{3}{(س - 1)(س + 2)}$

ب) [illegible]

ملحوظة

المضاعف المشترك الأصغر لـ [illegible]

ملحوظة

المضاعف المشترك الأصغر لكل من [illegible]

المضاعف المشترك الأصغر لكل من [illegible]

المضاعف المشترك الأصغر لكل من [illegible]

ملحوظة

المضاعف المشترك الأصغر لكل من (س − 1)، (س + 2) = (س − 1)(س + 2)

ملحوظة

(س + 2)، (س + 1)(س + 2) [illegible]

المضاعف المشترك الأصغر = [illegible]

مثال 15:

عبر عن كلٍّ مما يأتي ككسر وحيد في أبسط صورة:

(أ) $\frac{4}{س+3} + \frac{1}{(س+3)^2}$ (ب) $\frac{5}{2أ+2ب} - \frac{4}{3أ+3ب}$

الحل

(أ) $\frac{4}{س+3} + \frac{1}{(س+3)^2} = \frac{4(س+3)}{(س+3)(س+3)} + \frac{1}{(س+3)^2}$

$= \frac{4(س+3)+1}{(س+3)^2}$

$= \frac{4س+12+1}{(س+3)^2}$

$= \frac{4س+13}{(س+3)^2}$

(ب) $\frac{5}{2أ+2ب} - \frac{4}{3أ+3ب} = \frac{5}{2(أ+ب)} - \frac{4}{3(أ+ب)}$

$= \frac{5\times 3}{2(أ+ب)\times 3} - \frac{4\times 2}{3(أ+ب)\times 2}$

$= \frac{15}{6(أ+ب)} - \frac{8}{6(أ+ب)}$

$= \frac{15-8}{6(أ+ب)}$

$= \frac{7}{6(أ+ب)}$

ملحوظة

$\begin{array}{c|c} س+3 & (س+3)^2 \text{ ، } س+3 \\ س+3 & (س+3) \text{ ، } 1 \end{array}$

∴ المضاعف المشترك الأدنى

$= (س+3) \times 1 \times (س+3)$

$= (س+3)^2$

حلل المقامات.

$\begin{array}{c|c} (أ+ب) & 3(أ+ب) \text{ ، } 2(أ+ب) \\ & 3 \quad\quad 2 \end{array}$

∴ المضاعف المشترك الأدنى

$= (أ+ب) \times 2 \times 3$

$= 6(أ+ب)$

تمرين 2 و

1- اختصر كلًّا مما يأتي ككسر وحيد في أبسط صورة.

(أ) $\frac{4}{15أ} + \frac{8}{15أ}$ (ب) $\frac{3}{9ي} - \frac{2}{9ي}$

(جـ) $2ع - \frac{3}{ع}$ (د) $\frac{3}{ص} + \frac{ص}{4}$

(هـ) $\frac{1}{3و} + \frac{1}{و}$ (و) $\frac{2}{س} - \frac{3}{4س}$

(ز) $\frac{4}{3ن} - \frac{1}{2ن}$ (ح) $\frac{أ}{ب} - \frac{ب}{أ}$

2- عبر عن كل مما يأتي ككسر وحيد في أبسط صورة.

(أ) $\frac{1}{س+1} + \frac{2}{س+2}$

(ب) $\frac{3}{س+2} + \frac{2}{س+3}$

(جـ) $\frac{4}{س+3} - \frac{1}{س+4}$

(د) $\frac{2}{س+4} - \frac{1}{س+5}$

(هـ) $\frac{3}{س-5} - \frac{1}{س+6}$

(و) $\frac{4}{س+6} - \frac{1}{س-7}$

(ز) $\frac{2}{س-4} - \frac{4}{(س-4)(س-5)}$

(ح) $\frac{3}{(س-2)(3س+4)} + \frac{2}{س-2}$

3- اختصر في أبسط صورة:

(أ) $\frac{3}{(س+2)} + \frac{1}{(س+2)^2}$

(ب) $\frac{3}{س+3} - \frac{1}{(س+3)^2}$

(جـ) $\frac{4}{3أ+3ب} - \frac{3}{4أ+4ب}$

(د) $\frac{5}{6أ-6ب} + \frac{2}{9أ-9ب}$

7-2 المعادلات التي تتضمن كسورًا جبرية
Equations Involving Algebraic Fractions

تأمل المعادلة $\frac{\text{س} + 1}{3} = \frac{\text{س}}{2}$ والتي تتضمن الكسور الجبرية. لحل هذه المعادلة يجب إيجاد قيمة س والتي تحقق المعادلة.

ملحوظة

اضرب كلا الطرفين × 3 للتخلص من المقام 3

اضرب كلا الطرفين في 2 للتخلص من المقام 2

احذف الأقواس.

لدينا $\frac{\text{س} + 1}{3} = \frac{\text{س}}{2}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{س}+1}{3} \times 3 &= 3 \times \frac{\text{س}}{2} \\ \text{س} + 1 &= \frac{3\text{س}}{2} \\ 2(\text{س} + 1) &= 2 \times \frac{3\text{س}}{2} \\ 2(\text{س} + 1) &= 3\text{س} \\ 2\text{س} + 2 &= 3\text{س} \end{aligned}\right\}(*)$$

$$2 = 3\text{س} - 2\text{س}$$

$$2 = \text{س}$$

$$\therefore \text{س} = 2$$

الخطوات المشار إليها بالعلامة * يمكن أن تحل محلها الخطوة التالية الأقصر حسابيًّا والتي **تسمى الضرب التبادلي كما يلي:**

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{س} + 1}{3} &= \frac{\text{س}}{2} \\ 2(\text{س} + 1) &= 3\text{س} \\ 2\text{س} + 2 &= 3\text{س} \end{aligned}\right\}(**)$$

$$3\text{س} - 2\text{س} = 2$$

$$\therefore \text{س} = 2$$

الأسهم ╳ هي إرشادات فقط. بعد إجراء بعض التمارين سوف تستطيع تجاهل هذه الأسهم.

مثال 16:

حل المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{\text{س}}{2} = \frac{3}{4}$

(ب) $\frac{5}{\text{س}} = \frac{2}{\text{س} - 3}$

(جـ) $\frac{2}{3\text{س} + 4} = \frac{1}{2\text{س} + 3}$

ملحوظة

استخدم الضرب التبادلي لحل المعادلات من (أ) إلى (حـ).

لاحظ أن استخدام الضرب التبادلي ليس دائمًا أقصر الطرق أو أبسطها كما هو موضح في المثال (16)!

الحل

الطريقة الأولى

(أ) $\frac{\text{س}}{2} = \frac{3}{4}$

$4 \times \text{س} = 2 \times 3$

$4\text{س} = 6$

$\text{س} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\therefore \text{س} = 1\frac{1}{2}$

أو

الطريقة الثانية

$\frac{\text{س}}{2} = \frac{3}{4}$

$2 \times \frac{\text{س}}{2} = \frac{3}{4} \times 2$

$\text{س} = \frac{3}{2}$

$\therefore \text{س} = 1\frac{1}{2}$

(ب) $\frac{5}{\text{س}} = \frac{2}{\text{س} - 3}$

$5(\text{س} - 3) = 2\text{س}$

$5\text{س} - 15 = 2\text{س}$

$5\text{س} - 2\text{س} = 15$

$3\text{س} = 15$

$\text{س} = 5$

(ب) تحقق

الطرف الأيمن $= \frac{5}{\text{س}} = \frac{5}{5} = 1$

الطرف الأيسر $= \frac{2}{\text{س} - 3} = \frac{2}{5 - 3}$

$= \frac{2}{2} = 1$

$\therefore$ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

(جـ) $\frac{2}{3\text{س} + 4} = \frac{1}{2\text{س} + 3}$

$2(2\text{س} + 3) = 1(3\text{س} + 4)$

$4\text{س} + 6 = 3\text{س} + 4$

$4\text{س} - 3\text{س} = 4 - 6$

$\text{س} = -2$

مثال 17:

حل المعادلة $\frac{\text{أ}-2}{3}-\frac{\text{أ}-3}{4}=1$

الحل

> **ملحوظة**
> المضاعف المشترك الأدنى لكل من 3 ، 4 هو 12. اضرب تبادليًّا.

$$\frac{\text{أ}-2}{3}-\frac{\text{أ}-3}{4}=1$$

$$\frac{4(\text{أ}-2)}{12}-\frac{3(\text{أ}-3)}{12}=1$$

$$4\text{أ}-8-3\text{أ}+9=12$$

$$\text{أ}+1=12$$

$$\text{أ}=12-1=11$$

مثال 18:

حل المعادلة $\frac{\text{س}-1}{2}+3=4\text{س}$.

الحل

> **ملحوظة**
> اضــرب في 2 عـلـى الـدوام.

$$\frac{\text{س}-1}{2}+3=4\text{س}$$

$$\text{س}-1+6=8\text{س}$$

$$-1+6=8\text{س}-\text{س}$$

$$5=7\text{س}$$

$$\therefore \text{س}=\frac{5}{7}$$

أو

$$\frac{\text{س}-1}{2}+3=4\text{س}$$

$$\frac{\text{س}-1+6}{2}=4\text{س}$$

$$\frac{\text{س}+5}{2}=\frac{4\text{س}}{1}$$

$\text{س}+5=8\text{س}$ (بالضرب التبادلي)

$$5=8\text{س}-\text{س}$$

$$5=7\text{س}$$

$$\therefore \text{س}=\frac{5}{7}$$

مثال 19:

استغرقت سيارة ساعتين لتقطع مسافة س كم، استغرقت سيارة نقل 3 ساعات في قطع نفس المسافة. فإذا كانت سرعة السيارة 10كم/ ساعة أكثر من سرعة السيارة النقل، احسب قيمة س.

الحل

> **ملحوظة**
> السرعة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$

سرعة السيارة = $\frac{\text{س}}{2}$ كم/ ساعة، سرعة السيارة النقل = $\frac{\text{س}}{3}$ كم/ ساعة

$$\therefore \frac{\text{س}}{2}-\frac{\text{س}}{3}=10$$

$$\frac{3\text{س}-2\text{س}}{6}=10$$

$$\frac{\text{س}}{6}=10$$

$\therefore$ س = 60 كم

مثال 20:

إذا خفض البسط بمقدار عدد وزيد المقام بمقدار نفس العدد في الكسر $\frac{13}{17}$، أصبح الناتج $\frac{1}{2}$ أوجد هذا العدد.

الحل

نفرض العدد المطلوب هو س

الكسر الجديد يصبح $\frac{13 - \text{س}}{17 + \text{س}}$

البسط خفض بمقدار س

المقام زيد بمقدار س

$\therefore \frac{13 - \text{س}}{17 + \text{س}} = \frac{1}{2}$

$2(13 - \text{س}) = 1 \times (17 + \text{س})$

$26 - 2\text{س} = 17 + \text{س}$

$26 - 17 = \text{س} + 2\text{س}$

$9 = 3\text{س}$

$\therefore \text{س} = \frac{9}{3} = 3$

$\therefore$ العدد المطلوب هو 3

ملحوظة

اضرب بطريقة تبادلية.

تمرين 2 ز

1- حل المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{\text{أ}}{3} = \frac{4}{5}$

(ب) $\frac{1}{2\text{ى}} = \frac{3}{4}$

(جـ) $\frac{3}{\text{ح}} - 3 = 2$

(د) $\frac{\text{س}}{2} - \frac{\text{س}}{3} = 4$

(هـ) $\frac{4}{3\text{ف}} + \frac{1}{6\text{ف}} = 1\frac{1}{2}$

(و) $\frac{4}{\text{س}} + \frac{2}{3\text{س}} = 1$

2- حل المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{2\text{هـ} + 1}{5} = \frac{\text{هـ}}{3}$

(ب) $\frac{\text{ص} - 3}{4} = \frac{\text{ص} + 4}{3}$

(جـ) $\frac{7}{\text{ك}} = \frac{5}{\text{ك} - 2}$

(د) $\frac{\text{م} - 2}{3} + 4 = 5\text{م}$

(هـ) $5\text{ن} + 4 = \frac{2\text{ن} + 1}{3}$

(و) $\frac{\text{ر} - 1}{3} - 1 = 2\text{ر}$

(ز) $5\text{د} - 8 = \frac{13\text{د} + 2}{3}$

3- حل المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{\text{س} - 3}{4} - \frac{\text{س} - 4}{5} = \frac{1}{2}$

(ب) $\frac{2\text{س} - 3}{6} + \frac{3\text{س} - 4}{8} = -1$

(جـ) $\frac{\text{س} + 1}{2} - \frac{3\text{س} - 5}{8} = 1\frac{1}{2}$

(د) $\frac{\text{س} - 3}{2} - \frac{\text{س} + 3}{4} = 5$

(هـ) $\frac{\text{ص} - 5}{6} + \frac{9\text{ص} + 1}{4} = 4$

(و) $\frac{4\text{ص} + 2}{3} - \frac{3\text{ص}}{7} = 7$

4- تسافر سيارة بسرعة س كم/ ساعة لمسافة 10كم فإذا زادت من سرعتها بمقدار 2كم/ ساعة، تستطيع أن تكمل 15كم في نفس الزمن المستغرق. احسب قيمة س.

5- قطعت سيارة مسافة س كم بسرعة 80كم/ ساعة وقطعت حافلة نفس المسافة س كم بسرعة 60كم/ ساعة. فإذا كان الفرق في الزمن المستغرق ساعتين. احسب قيمة س.

6- إذا زيد بسط الكسر $\frac{5}{19}$ بمقدار س وخُفّض مقامه بمقدار س على التوالي كان الناتج $\frac{3}{5}$.

(أ) عبر عن الكسر الجديد بدلالة س.

(ب) أوجد قيمة س.

7- إذا طرح عدد س من كلٍّ من بسط ومقام الكسر $\frac{13}{23}$ كان الناتج يساوي $\frac{1}{3}$ احسب قيمة س.

8- إذا كان مقام الكسر يزيد بمقدار 6 عن بسطه. فإذا كان البسط س.

(أ) عبر عن الكسر بدلالة س.

(ب) إذا زيد كل من البسط والمقام بمقدار 4 فإن الكسر الناتج يصبح $\frac{5}{7}$. أوجد قيمة س.

8-2 المعالجة بالصيغ الرياضية Manipulation with Formulae

المعادلة $\text{ح} = 2\pi\,\text{نق}$ تعطي القاعدة العامة لإيجاد المحيط ح للدائرة التي طول نصف قطرها نق.

المعادلة التي تعطي قاعدة عامة لنوع معين من المشكلات تسمى صيغة رياضية.

عادة ما يكون من المناسب **تحويل** الصيغ بالتعبير عنها **بمتغيرات** مختلفة.

تأمل المعادلة $\text{ح} = 2\pi\,\text{نق}$، المتغير التابع هو ح. ولكن إذا قسمنا الطرفين على 2π

$$\frac{\text{ح}}{2\pi} = \frac{\cancel{2\pi}\,\text{نق}}{\cancel{2\pi}}$$

$$\therefore\ \text{نق} = \frac{\text{ح}}{2\pi}$$

(الآن أصبح نق هو المتغير التابع، أو الهدف، أو موضوع الصيغة الرياضية).

وبالتالي قمنا بتحويل الصيغة الرياضية بجعل نق المتغير التابع. ولتحويل الصيغ الرياضية استخدم نفس القواعد التي تعلمتها في الفصل الثالث والخاصة بحل المعادلات الجبرية.

وسوف نستخدم المعادلات الآتية لتلخيص تلك القواعد:

$\text{ز} - 3 = \text{س} - 7$ ....(1)

$\text{ز} + 6 = \text{ص} + 8$ ....(2)

$\frac{\text{س}}{2} = \text{ر} + 5$ ....(3)

$3\text{ذ} = \text{ص} - 9$ ....(4)

في المعادلة 1

$$\text{ز} - 3 + 3 = \text{س} - 7 + 3$$
$$\text{ز} = \text{س} - 4$$

في المعادلة 2

$$\text{ز} + 6 - 6 = \text{ص} + 8 - 6$$
$$\text{ز} = \text{ص} + 2$$

في المعادلة 3

$$\frac{\text{س}}{2} \times 2 = (\text{ر} + 5) \times 2$$
$$\text{س} = 2(\text{ر} + 5)$$

في المعادلة 4

$$\frac{3\text{ذ}}{3} = \frac{\text{ص} - 9}{3}$$
$$\text{ذ} = \frac{\text{ص} - 9}{3}$$

ملحوظة

1- لحذف حد سالب من طرف، اجمع نظيره الموجب إلى الطرفين.

2- لحذف حد موجب من طرف، اجمع نظيره السالب إلى الطرفين.

3- لحذف مقام من طرف، اضرب الطرفين بالمقام.

4- لحذف معامل من طرف، اقسم الطرفين بالمعامل.

مثال 21:

بادل ترتيب الصيغ التالية إلى المتغير المحدد:

(أ) ن - ي = أ ب	اجعل ن المتغير التابع
(ب) ت = د + ل	اجعل ل المتغير التابع
(جـ) ف = م أ	اجعل أ المتغير التابع
(د) د = $\frac{ك}{ن}$	اجعل ك المتغير التابع
(هـ) ذ = $\frac{ى}{ت}$	اجعل ت المتغير التابع
(و) أ = $\frac{1}{2}$(أ + ب) هـ	اجعل أ المتغير التابع

الحـــل

(أ)
ن - ي = أ ب
ن - ي + ي = أ ب + ي
ن = أ ب + ي

(ب)
ت = د + ل
ت - د = د + ل - د
ت - د = ل
∴ ل = ت - د

(جـ)
ف = م أ
$\frac{ف}{م}$ = $\frac{م أ}{م}$
$\frac{ف}{م}$ = أ
∴ أ = $\frac{ف}{م}$

(د)
د = $\frac{ك}{ن}$
د × ن = $\frac{ك}{ن}$ × ن
د ن = ك
∴ ك = د ن

(هـ)
ذ = $\frac{ى}{ت}$
ذ × ت = $\frac{ى}{ت}$ × ت
ذ ت = ى
$\frac{ذ ت}{ذ}$ = $\frac{ى}{ذ}$
ت = $\frac{ى}{ذ}$

(و)
أَ = $\frac{1}{2}$(أ + ب) هـ
2 × أَ = 2 × $\frac{1}{2}$(أ + ب) هـ
2 أَ = (أ + ب) هـ
$\frac{2أَ}{هـ}$ = $\frac{(أ + ب) هـ}{هـ}$
$\frac{2أَ}{هـ}$ = أ + ب
$\frac{2أَ}{هـ}$ - ب = أ + ب - ب
$\frac{2أَ}{هـ}$ - ب = أ
∴ أ = $\frac{2أَ}{هـ}$ - ب

ملحوظة

(أ) اجمع ي إلى الطرفين.

(ب) اطرح د من الطرفين.

(جـ) اقسم الطرفين على م.

(د) اضرب الطرفين في ن.

(هـ) اضرب الطرفين في ت ثم قسم على ذ

(و) اضرب الطرفين في 2. اقسم الطرفين على هـ. اطرح ب من الطرفين.

مثال 22:

إذا فرضنا أن الصيغة ز = ى + أ ت

(أ) اجعل أ المتغير التابع للصيغة.

(ب) أوجد قيمة أ عندما ز = 50، ى = 20، ت = 2

الحـــل

(أ)

ز = ى + أ ت

ز - ى = أ ت

$\frac{\text{ز} - \text{ى}}{\text{ت}}$ = أ

∴ أ = $\frac{\text{ز} - \text{ى}}{\text{ت}}$

(ب) عندما يكون ز = 50، ى = 20، ت = 2

أ = $\frac{50 - 20}{2}$

أ = $\frac{30}{2}$

= 15

تمرين 2 ح

1 - بادل ترتيب كل من المعادلات التالية كما هو محدد:

(أ) س = ذ + حـ، حـ = ؟

(ب) د = ق - حـ ، حـ = ؟

(جـ) ل = $\frac{\text{ك}}{\text{ى}^2}$، ك = ؟

(د) أ = ل ب ، ب = ؟

(هـ) ز = π ع^2 هـ، هـ = ؟

(و) ز = $\frac{\text{حـ ت}}{\text{د}}$، ت = ؟

(ز) ز = ى + أ ت، ت = ؟

(ح) ز^2 = ى^2 + 2 أ ذ، أ = ؟

(ط) أ = $\frac{1}{2}$ (أ + ب) هـ ، ب = ؟

(ى) $\frac{1}{\text{ى}}$ + $\frac{1}{\text{ز}}$ = $\frac{1}{\text{ف}}$، ف = ؟

2 - إذا كان أ س + ب = حـ،

(أ) بادل ترتيب المعادلة بجعل س المتغير التابع لها.

(ب) أوجد قيمة س عندما

(i) أ = 2، ب = 5، حـ = 9

(ii) أ = 6، ب = 9، حـ = - 3

3 - إذا كان 5أ (س - 3ب) = 2ب

(أ) بادل ترتيب المعادلة بجعل س المتغير التابع لها.

(ب) أوجد قيمة س عندما

(i) أ = 1، ب = 10

(ii) أ = 0.1، ب = 2

4 - إذا كانت أ = $\frac{1}{2}$ب هـ، أوجد قيمة الآتي:

(أ) أ عندما ب = 6، هـ = 5

(ب) ب عندما أ = 10، هـ = 4

(جـ) هـ عندما أ = 15، ب = 6

5 - إذا كانت ز = π ع^2 هـ (استخدم π = $\frac{22}{7}$)، أوجد قيمة:

(أ) ز عندما ع = 2، هـ = 14

(ب) هـ عندما ز = 11، ع = 5

6 - إذا كانت ر = (1 + $\frac{\text{ع}}{100}$) س

(أ) اجعل ع المتغير التابع لها.

(ب) أوجد قيمة ع عندما ر = 54، س = 50

ملخص

1- عند ضرب الكسور الجبرية،

(أ) احذف العامل المشترك في كلٍّ من البسط والمقام.

(ب) العوامل المتبقية في البسط تضرب في بعضها والعوامل المتبقية في المقام تضرب أيضًا في بعضها.

2- عند قسمة كسر جبرى بآخر استبدل العلامة (÷) إلى (×) واقلب المقسوم عليه ثم استأنف كما في الضرب.

3- لجمع أو طرح الكسور الجبرية:

(أ) أوجد المضاعف المشترك الأدنى للمقامات.

(ب) عبر عن كل كسر جبري بمقام موحد باستخدام المضاعف المشترك الأدنى الذي أوجدته.

(جـ) عند ذلك اجمع أو اطرح البسط كما هو مطلوب.

4- عند حل المعادلات التي تتضمن كسورًا جبرية:

(أ) عبر عن الكسور الجبرية بنفس المقام باستخدام المضاعف المشترك الأدنى.

(ب) أوجد مفكوك البسط والمقام.

(جـ) أجر عملية الضرب التبادلي وحل المعادلة الناتجة.

5- مثال لصيغة رياضية: م = $\frac{1}{2}$ (أ + ب) ع حيث م هي المتغير التابع.

6- قواعد حل المعادلات وتحويل الصيغة الرياضية هي كما يلي.

- لحذف الحد السالب من أحد الطرفين. أضف المكافئ الموجب لكلا الطرفين.
- لحذف الحد الموجب من أحد الطرفين. أضف المكافئ السالب لكلا الطرفين.
- لحذف المقام من أحد الطرفين اضرب كلا الطرفين في المقام.
- لحذف المعامل من أحد الطرفين. اقسم كلا الطرفين على المعامل.

استقصاء الرياضيات

تأمل زوج الأعداد 3، 6

مجموع العددين:	3 + 6 = 9
حاصل ضرب العددين:	3 × 6 = 18

(*) بالنسبة لهذا الزوج من الأعداد(3، 6)فإن حاصل ضربهما مضاعف لمجموعهما.

أوجد زوجين آخرين من الأعداد الطبيعية تنطبق عليهما القاعدة (*).

لاشتقاق صورة عامة للعلاقة (*) دعنا نحدد زوجًا ثابتًا من الأعداد وليكن أ، ب بحيث أ ب = حـ (أ + ب) حيث حـ عدد مجهول. من اب = (أ + ب) حـ هل يمكنك إظهار أن

$\frac{1}{أ} + \frac{1}{ب} = \frac{1}{حـ}$ ؟

نصادف أحيانًا هذه الصورة من المعادلة الجبرية في الفيزياء. على سبيل المثال، في مجال الكهرباء، الصيغة $\frac{1}{ن} = \frac{1}{ر_1} + \frac{1}{ر_2}$ تستخدم لحساب المقاومة المجتمعة (ن) لمقاومتين $ر_1$، $ر_2$ متصلتين في دائرة كهربية على التوازي.

ومثال آخر هو معادلة العدسة: $\frac{1}{ى} + \frac{1}{ز} = \frac{1}{ف}$ حيث

ى : بعد الصورة

ز : بعد الجسم

ف : البعد البؤري للعدسة.

ورقة المراجعة 2

القسم أ

1- اختصر :

(أ) $\frac{24 أ ب}{16 ب}$ (ب) $\frac{(س + 2)}{س (س +2)}$

(جـ) $\frac{2 س}{أ ب} \times \frac{3أ}{4 حـ}$ (د) $\frac{3ن}{4} \div \frac{6م}{7}$

2- (أ) إذا كانت د = خ ى **فأجعل** خ المتغير التابع.

(ب) إذا كان 3 د = $\frac{2م}{ن}$ **فأجعل** ن المتغير التابع.

3- حل المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{هـ}{3} = \frac{4}{9}$ (ب) $\frac{3}{2ك} = 6$

4- حل المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{4}{م} = \frac{2}{م - 2}$ (ب) $\frac{1}{ن + 2} = \frac{3}{5ن + 8}$

القسم ب

5- اختصر :

(أ) $\frac{4ى}{9} + \frac{2ى}{9}$ (ب) $\frac{5ــس}{8} - \frac{ــس}{8}$ (جـ) $\frac{1}{ف} + \frac{1}{2ف}$

6- إذا كانت خ = $\frac{1}{3}$ π $س^2$ هـ

(أ) اجعل هـ المتغير التابع.

(ب) أوجد قيمة هـ عندما خ = 264، $س^2$ = 6.

(استخدم π = $\frac{22}{7}$)

7- إذا كان $\frac{1}{أ} + \frac{1}{ب} = \frac{1}{حـ}$

(أ) اجعل حـ المتغير التابع.

(ب) أوجد حـ عندما أ = -2، ب = 3.

8- حل المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{ى - 1}{4} - 2 = \frac{ى}{3}$

(ب) $\frac{ــس + 2}{ــس} = \frac{ــس}{ــس + 1}$

(جـ) $\frac{س}{2} - (س - 2) = \frac{5}{2}$

القسم جـ

9- (أ) **عبر عن كلٍّ مما يأتي في صورة كسر وحيد في أبسط صورة.**

(i) $\frac{5}{س + 1} - \frac{3}{(س + 1)(س - 2)}$

(ii) $\frac{1}{4س + 4} - \frac{1}{6س + 6}$

(ب) عادة ما يقود محمد سيارته صباحًا بدءًا من منزله بسرعة 75 كم / ساعة لمسافة س كم ليصل إلى مكتبه في الوقت المحدد. وفي أحد الأيام المطرة قطع مسافة س كم بسرعة قدرها 60 كم/ ساعة. فإذا وصل مكتبه متأخرًا 10 دقائق. احسب قيمة س.

10- (أ) إذا كان ص = م س + حـ،

(i) اجعل م المتغير التابع

(ii) أوجد قيمة م عندما ص = 6، س = 2

حـ = -4.

(ب) إذا كان $س^2 - ص^2 = 2$ أ ن.

(i) اجعل أ المتغير التابع

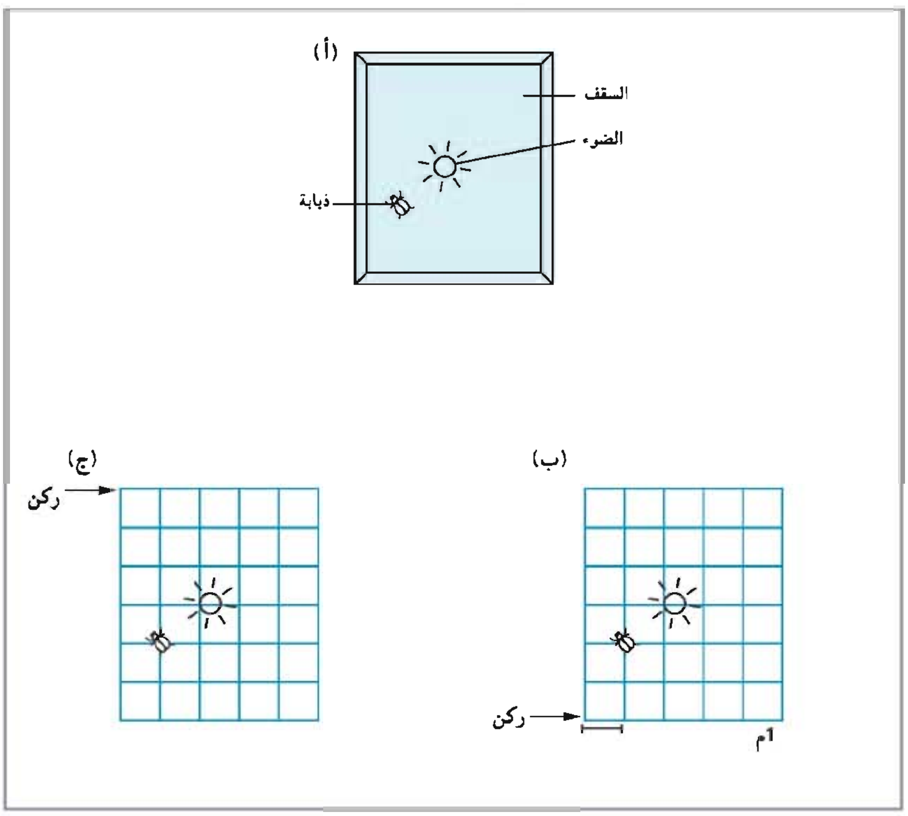
(ii) أوجد قيمة أ عندما ن = 5، س + ص = 10، س - ص = 2.

3

هندسة الإحداثيات

Coordinate Geometry

عاش "رينيه ديكارت" عالم رياضيات في فرنسا خلال القرن السابع عشر. بينما كان مستلقيًا على فراشه في يوم بارد، نظر إلى أعلى فرأى ذبابة تسير ببطء على السقف كما هو موضح في الشكل (أ) . وأراد تحديد طريقة ليصف مكان الذبابة.



وقرر أن أسهل طريقة تكون بتخيل السقف وكأنه مغطى بشبكة من الخطوط يبعد كل منها عن الآخر مسافة متر، عندئذ يمكنه تحديد موضع الذبابة بعدّ المربعات التي تبعدها عن كل حائط. وعليه إذا بدأ بالركن في (ب) يمكنه القول بأن الذبابة على بعد مربع واحد أفقيًّا ومربعين رأسيًّا.

وبالتساوي كان يمكنه البدء من أي الأركان الثلاثة الأخرى. بالبدء من الركن الأعلى في اليسار في (ج) يمكنه القول بأن الذبابة على بعد مربع أفقيًّا وأربعة مربعات لأسفل. من الركن الأعلى في اليمين، كانت الذبابة على بعد ٤ مربعات أفقيًّا و٤ مربعات لأسفل . ومن الركن الأسفل في اليمين، كانت الذبابة على بعد 4 مربعات أفقيًّا ومربعين لأعلى.

ولذا كان على ديكارت إرساء **قاعدة** حول المكان الذي يبدأ العد منه، وقرر البدء دائمًا من **الركن الأسفل في اليسار** كنقطة انطلاق وأن يتقدم دائمًا في **الاتجاه الأفقي ثم الرأسي**.

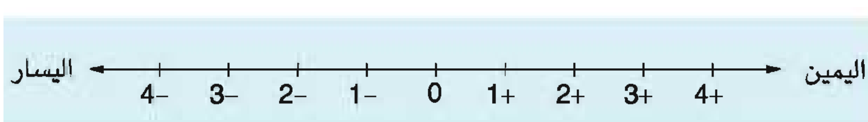
في نهاية هذا الفصل، سوف تكون قادرًا على:

- استخدام الزوج المرتب لكتابة الإحداثيات لنقطة معينة على المستوى الإحداثي.
- تحديد موقع النقطة بالإحداثيات المعطاة.
- تحديد ما إذا كانت نقطة معطاة تقع على الشكل البياني.
- رسم شكل بياني لمعادلة خطية.
- تمييز الخط المستقيم على الصورة ص = ح أو س = ح حيث ح ثابت.
- رسم شكل بياني لمعادلة غير خطية.
- حل الرسوم البيانية في المواقف العملية.

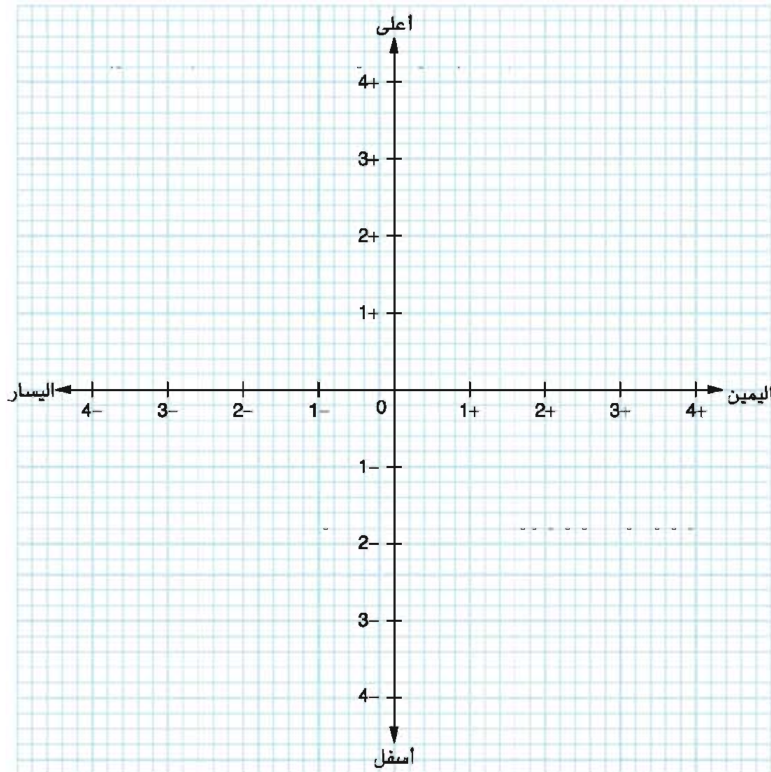
1-3 استخدام الأعداد الموجهة لوصف موضع نقطة على المستوى الديكارتي

Using Directed Numbers to Describe a Position on a Cartesian Plane

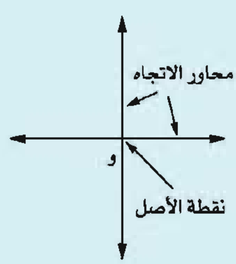
يحاول عالم الرياضيات دائمًا التعبير عن الأشياء بأبسط الطرق. لذا عندما يصف موضع نقطة فإنه قد يستخدم نظام **الأعداد الموجهة** لأن العدد الموجه يدل على **المسافة والاتجاه** من نقطة معينة . تذكر أنه على خط الأعداد (انظر الكتاب الأول) كما هو مبين أدناه يقع العدد **الموجب** (+) على يمين الصفر والعدد **السالب** (-) على يساره.



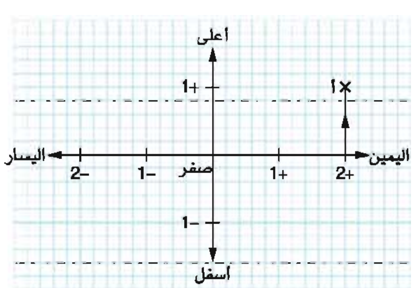
وكما أن اليمين واليسار عكس بعضهما كذلك أعلى (↑) وأسفل (↓). ولهذا يمكننا استخدام فكرة الأعداد الموجبة والسالبة بالنسبة للأعلى والأسفل على التوالي. ومن ثم نحصل على خطي أعداد بينهما زاوية قائمة يتقاطعان عند نقطتي الأصفار أو "**نقطة الأصل**" كما هو موضح بالصفحة التالية.



يمكن وصف **موضع نقطة** على سطح مستو بتعيين مقياسين للنقطة يتم تُحديدهما من **محوري الاتجاه**. هذان المحوران متعامدان بصفة عامة ويتقاطعان في نقطة تسمى **"نقطة الأصل"** ويشار إليها بالرمز (و).



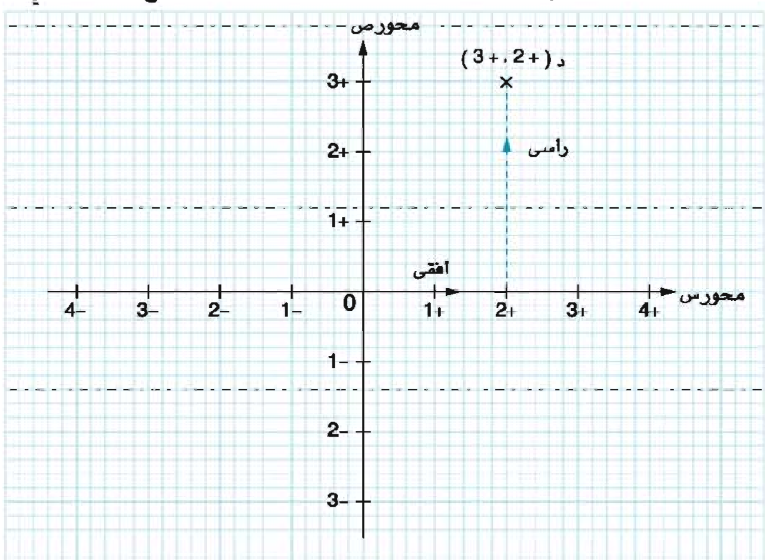
تأمل النقطة أ الموضحة في الشكل على اليسار.



النقطة أ على بعد خطوتين ناحية اليمين (+2) وخطوة إلى أعلى (+1) من نقطة الأصل. ومن ثم فإن موضع النقطة يكون (+2، +1). موضع النقطة **يُعطي كزوج مرتب** من الأعداد المطردة و"مرتب" هنا بمعنى أن **إشارات** اتجاه اليمين/اليسار تكتب دائمًا أولًا ثم تكتب **إشارات أعلى**/أسفل ثانيًا.

ولهذا، نحدد المسافة الرأسية والأفقية (1، 2، 3 ، ....) والاتجاه (+ ، -) من نقطة الأصل لتحديد **موضع نقطة** في مستوى الإحداثيات. بمعنى **كم تبعد إلى يمين أو يسار نقطة الأصل وكم ترتفع أو تنخفض عن نقطة الأصل.**

هذه الطريقة لوصف وضع النقطة في مستوى الإحداثيات هي التي استخدمها "ديكارت" وعلى شرفه تم تسمية المستوى الذي يرسم عليه المحاور (أو خطوط الأعداد) باسم **"المستوى الديكارتي"**. المحور الأفقي يسمى **محور السينات** بينما المحور الرأسي يسمى **محور الصادات**. انظر (الشكل 5-1). هذا النظام للأزواج المرتبة من الأعداد الموجهة يعتبر أبسط طريقة لتفسير موضع نقطة في المستوى.



شكل (5-1)

ولتلخيص ما سبق (ارجع إلى المستوى الديكارتي المعطى في شكل 5-1).

1- **محور السينات** هو خط أعداد أفقي و**محور الصادات** هو خط أعداد رأسي.

2- يتقاطع محورا الإحداثيات السيني والصادي في نقطة تسمى **نقطة الأصل** (يشار إليها بالرمز "و" وتتطابق مع العدد صفر على خطي الأعداد الأفقي والرأسي) ونقطة الأصل هي النقطة المرجعية لوصف موضع أي نقطة في المستوى.

3- على محور السينات، أي نقطة تكون على **يمين** نقطة الأصل تعتبر **موجبة** (+) الاتجاه بينما أي نقطة **على يسار** نقطة الأصل تكون **سالبة الاتجاه** (-).

4- بالنسبة لمحور الصادات، أي نقطة تقع **فوق** نقطة الأصل يكون اتجاهها موجبًا وتأخذ العلامة (+) وأي نقطة تقع **أسفل** نقطة الأصل يكون اتجاهها **سالبًا** وتأخذ العلامة (-).

5- يمتد كلا المحورين السيني والصادي إلى ما لا نهاية على كل من جانبي نقطة الأصل. وعادة ما نضع علامات الأسهم فقط على الاطراد الموجب، بمعنى "الأيمن" و "الأعلى".

6- موضع نقطة في مستوى الإحداثيات يُعطى بدلالة المسافات الأفقية والرأسية واتجاهها من نقطة الأصل. ويمكن وصفها عن طريق مقياسين مطردين يُعطيان في صورة **زوج مرتب**، كما هو موضح بالنقطة (د) في الشكل (5-1).

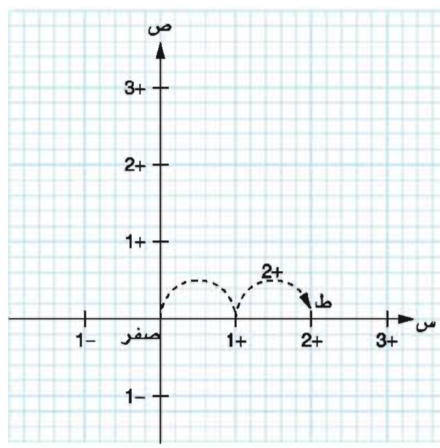
ارجع إلى الزوج المرتب (+2، +3) الذي يمثل موضع النقطة (د) في الشكل (5-1):

- العدد الأول من الزوج المرتب +2 يسمى **الإحداثي السيني** ويعطي قياسًا للمسافة الأفقية واتجاه النقطة من نقطة الأصل.
- العدد الثاني من الزوج المرتب +3 يسمى **الإحداثي الصادي** ويعطي قياسًا للمسافة الرأسية واتجاه النقطة بالنسبة لنقطة الأصل.

يوضح الشكلان (5 - 2) (أ) ، (ب) الخطوات المطلوبة للوصول إلى النقطة د (+2، +3).

أولًا تحرك وحدتين ناحية اليمين من نقطة الأصل حتى تصل إلى النقطة ط.

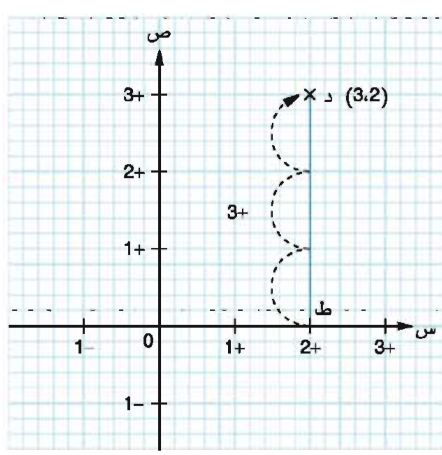
الإحداثي السيني يكون +2.



شكل (5 - 2 - أ)

بعد ذلك من النقطة ط تحرك 3 وحدات لأعلى. فيكون الموضع النهائي للنقطة د هو المحدد بالزوج المرتب (2، 3).

الإحداثي الصادي يكون +3.



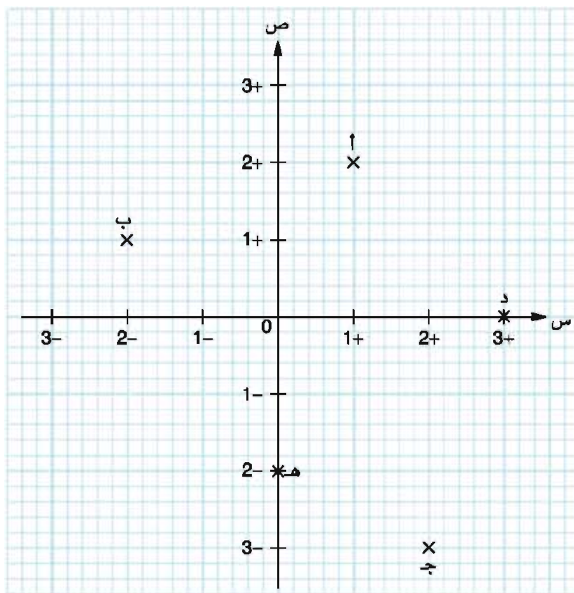
شكل (5-2-ب)

ترى من الشكل (5 - 2 - ب) أن النقطة د هي وحدتين يمين نقطة الأصل، 3 وحدات أعلى نقطة الأصل، وبدلاً من قول أن النقطة (د) موضعها (+2، +3). يمكن ببساطة القول إن **إحداثيي النقطة د هما** (2، 3).

يمكن التعبير عن إحداثيي أي نقطة في المستوى الديكارتي كزوج مرتب من الأعداد الموجهة التي تحدد موضع النقطة في المستوى. إحداثيا نقطة الأصل هما (0، 0).

مثال 1:

أعط إحداثيات النقط المشار إليها في المستوى الديكارتي أدناه.



الحل

بالنسبة للنقطة أ :

الإحداثي السيني 1 بمعنى وحدة واحدة على يمين نقطة الأصل،

الإحداثي الصادي 2 بمعنى وحدتين أعلى نقطة الأصل.

∴ إحداثيا النقطة أ هما (1، 2).

بالنسبة للنقطة ب :

الإحداثي السيني هو -2 بمعنى وحدتين على يسار نقطة الأصل،

الإحداثي الصادي هو 1 بمعنى وحدة واحدة أعلى نقطة الأصل.

∴ إحداثيا النقطة ب هما (-2، 1).

بالنسبة للنقطة حـ :

الإحداثي السيني هو 2 بمعنى وحدتين على يمين نقطة الأصل،

الإحداثي الصادي هو -3 بمعنى ثلاث وحدات أسفل نقطة الأصل.

∴ إحداثيا النقطة حـ هما (2، -3).

بالنسبة للنقطة ء

الإحداثي السيني هو 3 بمعنى ثلاثة وحدات على يمين نقطة الأصل،

الإحداثي الصادي هو 0 بمعنى أن النقطة تقع على محور **السيني**.

∴ إحداثيا النقطة ء هما (3، 0).

بالنسبة للنقطة هـ :

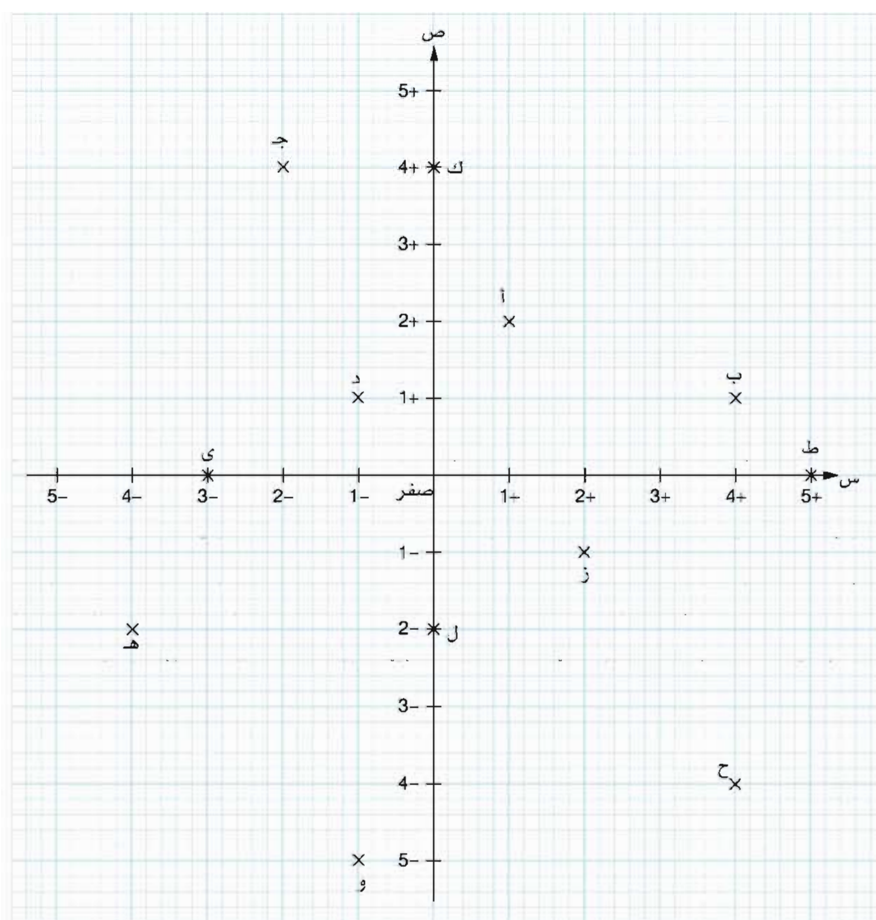
الإحداثي السيني هو 0 بمعنى أن النقطة لا على يمين ولا على يسار نقطة الأصل،

الإحداثي الصادي هو -2 بمعنى وحدتين أسفل نقطة الأصل.

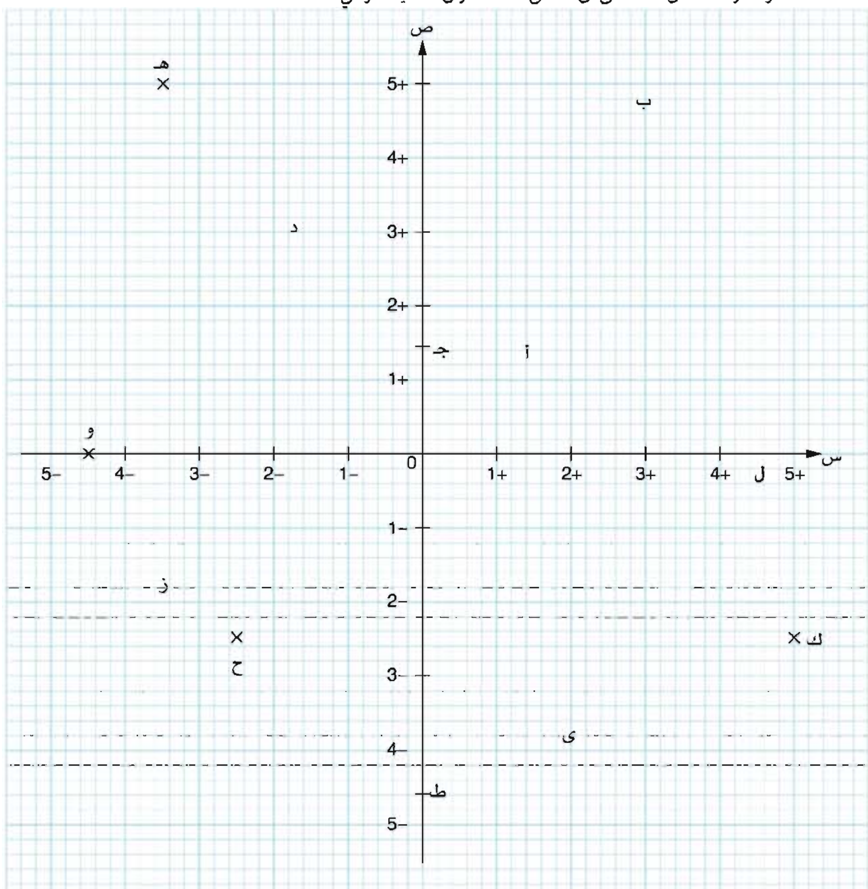
∴ إحداثيا النقطة هـ هما (0، -2).

تمرين 13

1- حدد إحداثيات النقط المرسومة من أ حتى ل على المستوى الديكارتي:



2- حدد إحداثيات النقط المرسومة من أ حتى ل على المستوى الديكارتي.



3- ارسم على قطعة من ورق الرسم البياني مجموعة من محاور الإحداثيات بحيث يكون المحور السيني والمحور الصادي كل منهما مرقمًا من -5 إلى 5، ثم حدد النقط التالية:

(أ) أ (3، 1) (ب) ب (4 ، 5)

(جـ) جـ (2، 0) (د) د (0 ، 0)

(هـ) هـ (-4، 2) (و) ز (-2، 0)

(ز) ى (2، -5) (ح) ك (0، -4)

(ط) ل (-3، -2)

4- ارسم على ورقة رسم بياني مجموعة من محاور الإحداثيات بحيث يكون كل من المحور السيني والمحور الصادي مرقمًا من (-5) إلى (5) ثم حدد النقط التالية:

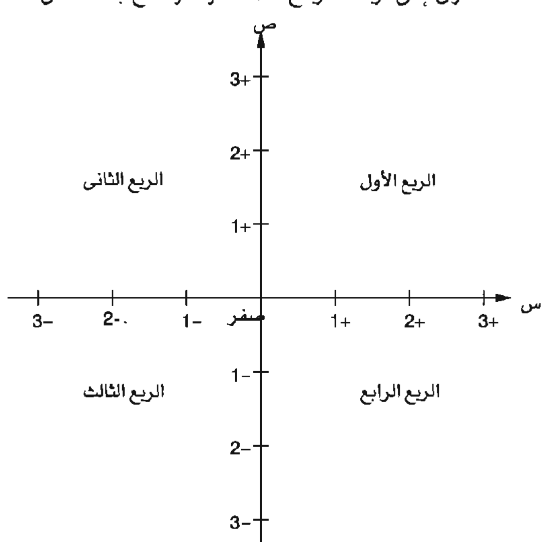
(أ) م (5، $3\frac{1}{2}$) (ب) ن ($4\frac{1}{2}$ ، -3)

(جـ) د (-$1\frac{1}{2}$، 3) (د) ط (-3، -$4\frac{1}{2}$)

(هـ) س (0، $2\frac{1}{2}$) (و) ذ ($4\frac{1}{2}$ ، 0)

(ز) ى (-$2\frac{1}{2}$، $1\frac{1}{2}$) (ح) ش (-$3\frac{1}{2}$، -$1\frac{1}{2}$)

5- برسم المحورين السيني والصادي يتم تقسيم المستوى إلى أربعة أرباع كما هو موضح بالشكل.



مستخدمًا الشكل أعلاه، انقل وأكمل الجدول التالي:

النقطة	الإحداثي السيني (موجب أو سالب)	الإحداثي الصادي (موجب أو سالب)	الربع الذي تقع فيه النقطة
أ (2 ،3)	موجب	موجب	الأول
ب (4 ،1 -)	سالب	موجب	الثاني
حـ (3- ،2)			
ى (1- ،4-)			
هـ (5- ،2)			
و (1 ، 3-)			
ز (2- ،5)			
ح (3- ،6 -)			
ط (4 ،2-)			
ى (5 ،1)			
ك (1- ،4)			

6- (أ) أرسم المستوى الديكارتي على ورقة رسم بياني ثم حدد النقط التالية:

(i) أ (4،0) (ii) ب (1 ، 2)

(iii) حـ (1 ،5)، (iv) ى (1- ،3)

(v) هـ (5- ، 4) (vi) و (3- ،0)

(vii) ز (5- ،4-) (viii) ح (2- ،3-)

(ب) صل النقاط المعطاة في (أ) بمجموعة من الخطوط المستقيمة بمعنى آخر، أ مع ب، ب مع حـ ، حـ مع ى . وهكذا في باقي النقط حتى ى مع أ.

(جـ) صف الشكل الذي حصلت عليه.

7- (أ) صل النقط المعطاة في (أ) بسلسلة من القطع المستقيمة (بمعنى) ارسم $\overline{أب}$، $\overline{بحـ}$، $\overline{حـى}$.

وهكذا حتى تنتهي بالنقطة ق **مع** ر.

(ب) صف الشكل الذي حصلت عليه.

8- (أ) على كل من المحورين السيني والصادي حدد النقاط التالية:

(i) أ (-3، -6) (ii) ب (-2، -4)

(iii) ى (0 ،0) (iv) هـ (1، 2)

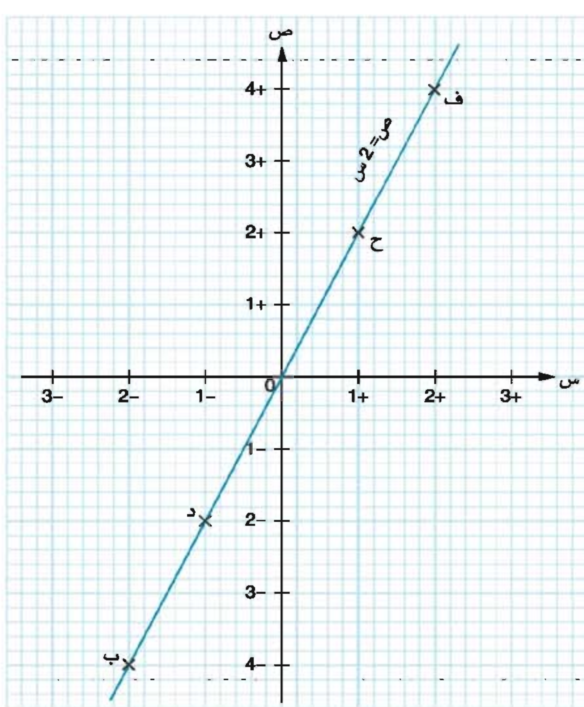
(v) و (2، 4)

(ب) ارسم القطع المستقيمة $\overline{أب}$، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حـى}$ ثم $\overline{وح}$

(جـ) صف النموذج الذي حصلت عليه.

2-3 النماذج الخطية ومعادلاتها Linear Patterns and Their Equations

تضمنت الأسئلة الثلاثة الأخيرة في التمرين (5أ) تعيين نقط في **المستوى الديكارتي** ثم ملاحظة النموذج الناتج من توصيل النقاط ببعضها البعض وبصفة خاصة فإن السؤال الأخير قدم **النموذج الخطي** بمعنى : تقع جميع النقط المحددة على نفس الخط المستقيم. وسوف ندرس في هذا الفصل تلك النماذج الخطية.



في الشكل المرسوم بأعلى، وبرسم وتوصيل النقط (ب) حتى (ف) نحصل على خط **مستقيم**.

لاحظ أن الإحداثي الصادي لكل نقطة يساوي ضعف قيمة الإحداثي السيني لنفس النقطة بمعنى:

عندما س = −2 فإن ص = 2 × (−2) = − 4

عندما س = 1 فإن ص = 2 × (1) = 2 وهكذا.

> يمكن كتابة العلاقة اللفظية السابقة **كتعبير رياضي**:
>
> ص = 2 س
>
> مثل هذا التعبير الرياضي يسمى **معادلة**. والمستقيم الذى يمر بتلك الأزواج المرتبة. يسمى **التمثيل البياني للمعادلة**:
>
> ص = 2 س.
>
> **كل نقطة تقع على هذا المستقيم تحقق المعادلة** ص =2 س، على سبيل المثال، لتكن النقطة د (0.5، 1) التي تقع على هذا المستقيم. هنا س =0.5، ص = 2 (0.5) = 1 وبناءً عليه فإن إحداثيات النقطة (د) **تحقق المعادلة** ص =2 س.

مثال 2:

ارسم الشكل البياني ص = 3 س لجميع قيم س المحصورة **من 3 الى -3**

الحل

الغرض من حصر قيم على محور السينات (−3 ≤ س ≤ 3) ليدلنا فقط على الجزء من الخط ص = 3 س المطلوب.

ولرسم الخط المستقيم سوف نحتاج فقط إلى إيجاد ورسم الإحداثيات لبعض النقط التي تنتمي إلى العلاقة المعطاة ثم رسم المستقيم المار بهذه النقط. وبما أن العلاقة تحدد أننا نريد قيم س التى تقع على المستقيم بين −3 ≤ س ≤ 3 فيكون من المناسب إيجاد تلك النقط ذات الإحداثي السيني −3، −2، −1، 0، 1، 2، 3 بمعنى آخر نريد إكمال الجدول التالي من القيم مستخدمين القاعدة المعطاة ص = 3 س:

س	3-	2-	1-	0	1	2	3
ص							
(س،ص)							

ولإكمال الجدول السابق. نعوض فقط عن **كل** قيمة س في **المعادلة** ص = 3 س.

عندما س = −3، فإن ص = 3 س

= 3 × (−3) = − 9

∴ نحصل على النقطة (−3، − 9)

وبالمثل عندما س = −2 فإن ص = 3 س.

= 3 × (−2) = − 6

∴ نحصل على النقطة (−2، − 6)

وأيضًا عندما س = −1، ص = 3 س = 3 × (−1) = −3، ∴ النقطة هي (−1، −3).

بالاستمرار بهذه الطريقة لقيم س = 0، 1، 2، 3 نحصل على النقاط (0،0)، (1، 3)، (2، 6)، (3، 9) ويصبح الجدول بعد التكملة كما يلي:

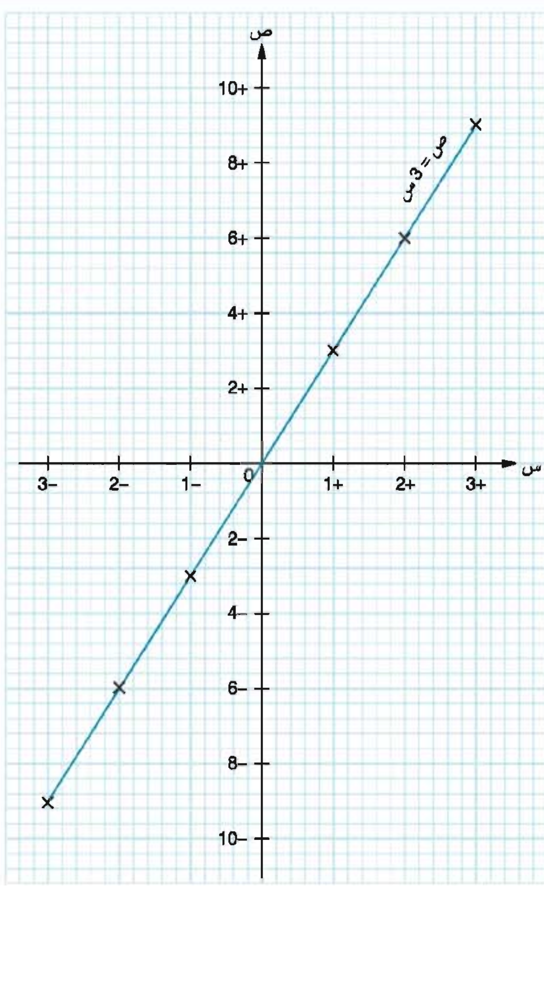
س	-3	-2	-1	0	1	2	3
ص=3س	-9	-6	-3	0	3	6	9
(س،ص)	(-3، -9)	(-2، -6)	(-1، -3)	(0،0)	(1، 3)	(2،6)	(3، 9)

ولرسم الشكل البياني للمعادلة ص = 3س، سوف نستخدم المقياس التالي:

- 1سم لكل وحدة على محور السينات.
- 1سم لكل وحدتين على محور الصادات.

يتم اختيار مقاييس مختلفة بالنسبة لمحور السينات ومحور الصادات لأن مدى القيم للمتغير ص أكبر من مدى القيم للمتغير س. يتم عمل هذا لإعطاء الرسم البياني فراغًا كافيًا.

وسبب آخر مهم هو أن الرسم البياني يجب أن يكون كبيرًا بدرجة كافية. من الأفضل أن تغطي المسافة الأفقية والرأسية بين النقطة الأولى والأخيرة 8سم من الفراغ أو أكثر.



ملحوظة

نخطط في هذا الفصل نقاطًا أكثر مما ينبغي للرسم البياني الخطي. وبالتدريب سوف نحتاج تخطيط نقاط أقل.

ملحوظة

لتخطيط رسم بياني اختر مقاييس مناسبة لمحور السينات ومحور الصادات.

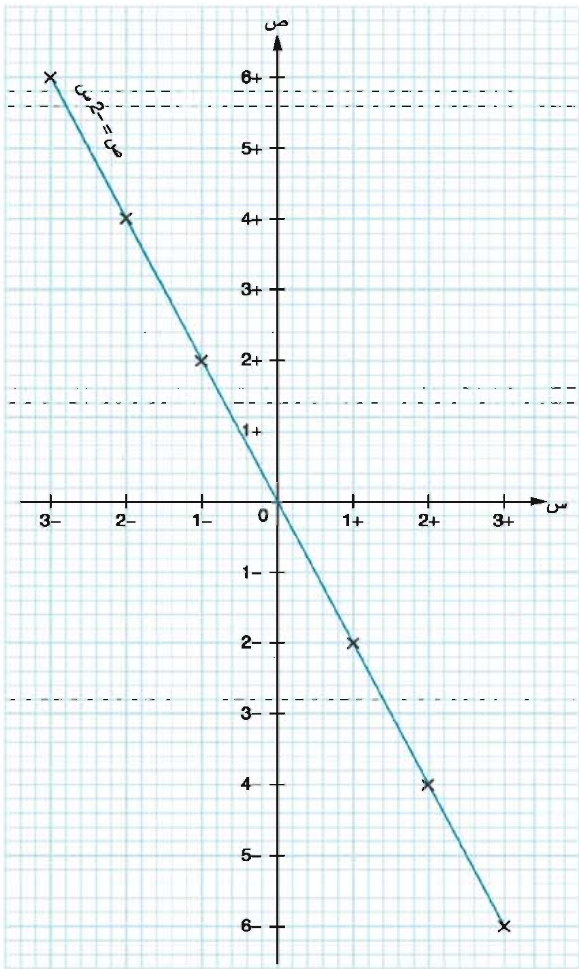
مثال 3:

ارسم الشكل البياني للمعادلة ص = -2س حيث -3 ≥ س ≥ 3 باستخدام مقياس رسم 1 سم لتمثل وحدة واحدة على كل من المحورين.

الحل

جدول قيم المعادلة ص = - 2 س.

س	3-	2-	1-	0	1	2	3
ص	6+	4+	2+	0	2-	4-	6-
(س،ص)	(6 ,3-)	(4 ,2-)	(2 ,1-)	(0,0)	(2- ,1)	(4- ,2)	(6- ,3)



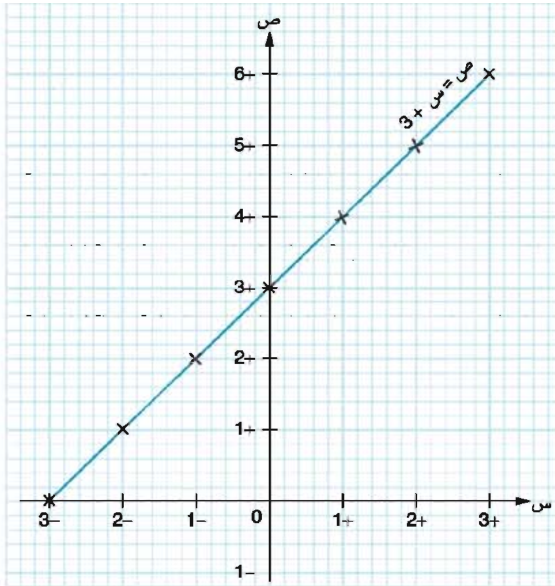
مثال 4:

ارسم الشكل البياني للمعادلة ص = س + 3 حيث -3 ≥ س ≥ 3 باستخدام مقياس رسم 1 سم ليمثل كل وحدة على محوري الإحداثيات.

الحل

يبين الجدول التالي قيم ص = س + 3

س	3-	2-	1-	0	1	2	3
ص	0	1	2	3	4	5	6
(س،ص)	(0,3-)	(1 ,2-)	(2 ,1-)	(3 ,0)	(4,1)	(5 ,2)	(6 ,3)



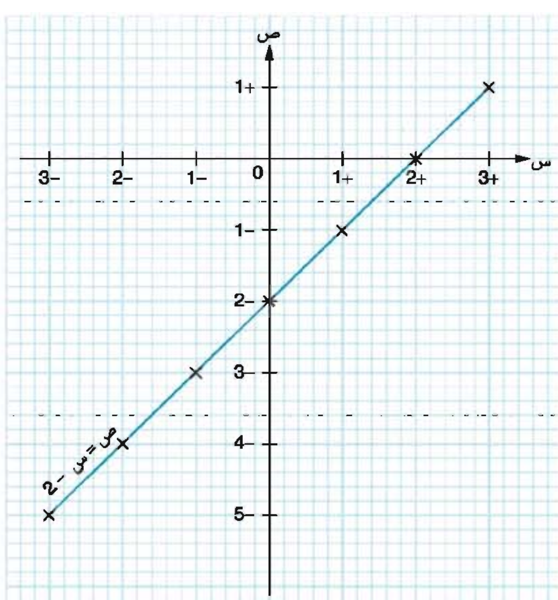
مثال 5:

ارسم الشكل البياني للعلاقة ص = س − 2 حيث −3 ≥ س ≥ 3 باستخدام مقياس رسم 1 سم ليمثل كل وحدة على محوري الإحداثيات.

الحل

جدول قيم المعادلة ص = س − 2.

س	3-	2 -	1 -	0	1	2	3
ص	5 -	4−	3 -	2−	1−	0	1
(س،ص)	(5 -،3-)	(4−،2-)	(3−،1−)	(2−،0)	(1−،1)	(0،2)	(1،3)



تمرين 3 ب

1 - انقل وأكمل كل جدول من الجداول الآتية للمعادلات المعطاة:

(أ) ص = 5 س

س	-2	-1	0	1	2
ص	-10			5	
(س،ص)				(1 ، 5)	

(ب) ص = - س

س	-3	-2	-1	0	1	2	3
ص		2					
(س،ص)							

(جـ) ص = -3 س

س	-2	-1	0	1	2
ص	6				
(س،ص)					

(د) ص = س + 5

س	-3	-2	-1	0	1
ص					
(س،ص)					

(هـ) ص = س - 3

س	-1	0	1	2	3
ص					
(س،ص)					

2 - مستخدمًا إجابتك على السؤال (1) ارسم الشكل البياني لكل من:

(أ) ص = 5 س حيث -2 ≤ س ≤ 2

(ب) ص = - س حيث -3 ≤ س ≤ 3

(جـ) ص = س + 5 حيث -3 ≤ س ≤ 3

(د) ص = س - 3 حيث -1 ≤ س ≤ 3

3 - ارسم الشكل البياني لكل من المعادلات الآتية:

(أ) ص = س حيث -3 ≤ س ≤ 3

(ب) ص = 6 س حيث -2 ≤ س ≤ 2

(جـ) ص = - 4 س حيث -2 ≤ س ≤ 2

(د) ص = س + 4 حيث -5 ≤ س ≤ 1

(هـ) ص = س - 5 حيث -1 ≤ س ≤ 5

مثال 6:

ارسم الشكل البياني للعلاقة ص = - س + 3 حيث -3 ≤ س ≤ 3 مستخدمًا مقياس رسم 1 سم لكل وحدة من المحورين السيني والصادي.

الحل

جدول قيم المعادلة ص = - س + 3

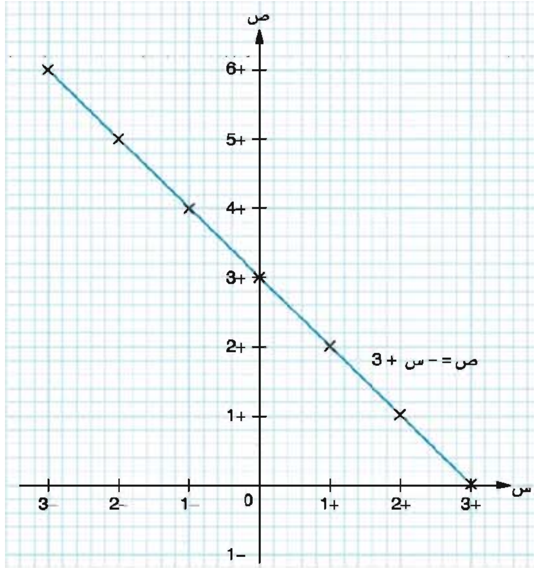
س	-3	-2	-1	0	1	2	3
- س +3	3 +3	2 +3	1 +3	0 +3	-1 +3	-2 +3	-3 +3
ص	6	5	4	3	2	1	0
(س،ص)	(-3، 6)	(-2، 5)	(-1، 4)	(0، 3)	(1، 2)	(2، 1)	(3، 0)

اجمع

يساعدنا الجدول السابق فى استخراج قيم ص بطريقة مرتبة بدلًا من تتابع العمل من النوع التالي:

"عندما س = -3 ، ص = - (-3) + 3 = 6"

والذي يجب عمله بالنسبة لكل قيمة من قيم س.



ملحوظة

تتراوح قيمة ص بين 0 و6

يُحذف في الأمثلة التالية الصف الأخير (س، ص)، تلاحظ الآن من الجدول أن الإحداثيات للنقاط التي سوف يتم رسمها (س، ص) يمكن قراءتها من صفوف القيم س، ص

مثال 7:

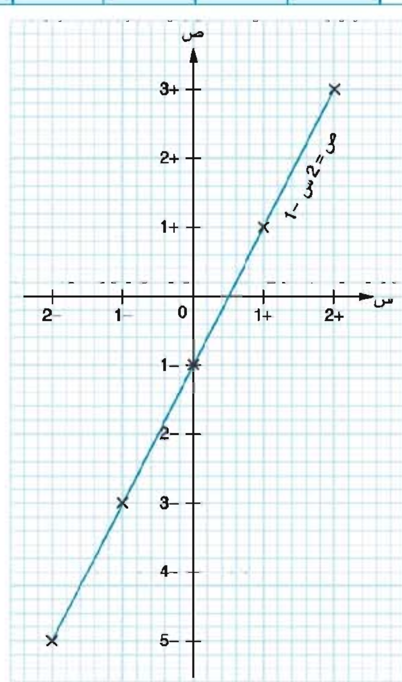
ارسم الشكل البياني للعلاقة ص = 2 س −1 حيث −2 ≤ س ≤2 . استخدم مقياس رسم 1سم لتثمل وحدة واحدة على كلا المحورين.

الحل

جدول قيم المعادلة ص = 2س −1 :

س	2 −	1 −	0	1	2
2س	4−	2−	0	2	4
1-	1 −	1 −	1−	1 −	1 −
ص	5 −	3 −	1 −	1	3

اجمع



مثال 8:

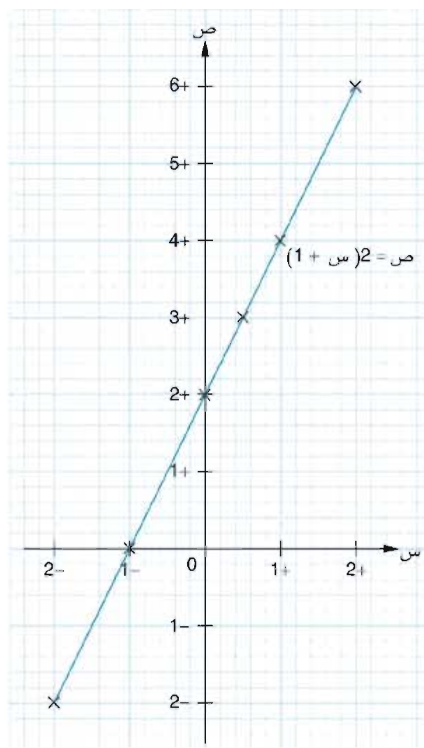
ارسم الشكل البياني للعلاقة ص = 2 (س +1) حيث -2 ≥ س ≥ 2. استخدم مقياس رسم 1سم ليمثل وحدة واحدة على كلا المحورين السيني والصادي.

الحل

جدول قيم العلاقة ص = 2 (س +1) ؛

س	2 -	1 -	0	1	2
س+1	1-	0	1	2	3
ص	2-	0	2	4	6

تضرب في 2
لأن
ص = 2 (س - 1)



مثال 9:

ارسم الشكل البياني للعلاقة س + ص = 2 حيث -2 ≥ س ≥ 2. استخدم 1 سم ليمثل وحدة واحدة على كلا المحورين السيني والصادي.

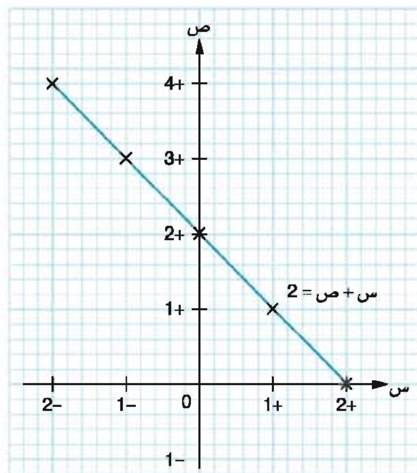
الحل

س + ص = 2 يمكن كتابة ص = -س + 2

جدول قيم العلاقة ص = - س +2 :

س	2-	1-	0	1	2
- س +2	2 +2	1 +2	0 +2	1- +2	2- +2
ص	4	3	2	1	0

اجمع



ملحوظة

عنون هذا الخط بمعادلته الأصلية س + ص = 2

تمرين 3 جـ

1 - كون جدولًا وارسم الشكل البياني لكل من المعادلات التالية حيث - 3≤ س ≤3

(أ) ص = 3 س - 2 **(ب)** ص = 2 س + 3

(جـ) ص = - س + 1 **(د)** ص = - س - 3

(هـ) ص = -2س - 5 **(و)** ص = -3س + 7

(ز) ص = 3 (س -2) **(ح)** ص = 2 (س + 3)

(ط) ص = - 4(س + 1) **(ى)** ص = - 3(س - 1)

(ك) س + ص = 1 **(ل)** س + ص = 3

2 - انقل وأكمل الجدول التالي للمعادلة ص = 4س + 5

س	2 -	1 -	0	1	2
ص		1		9	

استخدم مقياس رسم 2 سم يمثل وحدة من محور السينات و 1سم لكل وحدتين من محور الصادات.
ارسم الشكل البياني للمعادلة ص = 4 س + 5 عندما -2≤ س ≤ 2

3- احسب قيمة أ، ب فى الجدول التالي باستخدام المعادلة ص = 3س - 4

س	2-	1-	0	1	2
ص	10-	أ	4-	ب	2

استخدم مقياس رسم 2 سم ليمثل وحدة من محور السينات و 1سم لكل وحدة من محور الصادات لرسم المعادلة ص = 3س - 4 حيث -2≤ س ≤ 2

4- لكل من المعادلات الآتية كون جدولًا وارسم الشكل البياني عندما - 3 ≤ س ≤3 إرشاد: اجعل ص متغير المعادلة التابع.

(أ) 4 س + 2 ص = 5 (ب) 3 س +2ص = 6

(جـ) س -2 ص = 4 (د) 2 س + ص - 1 = 0

3-3 العلاقات الخطية الرأسية والأفقية

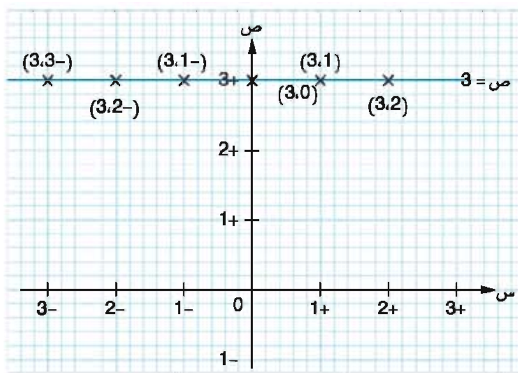
Horizontal and Vertical Linear Relationships

تأمل مجموعات النقاط التالية:

مجموعة I	(3 ،3-)	(1 ،3-)	(2 ،2-)	(3 ،2-)	(3 ،1 -)	(3 ،0)
مجموعة II	(2 ،1)	(3 ،1)	(0 ،2)	(3 ،2)	(2 ، 3)	(4 ، 3)

أي من النقط السابقة تطابق القاعدة ص = 3؟ لاحظ أن القاعدة لا تحصر القيم للمتغير س. مع ذلك فإن **قيمة** ص **يجب** أن تكون 3

وجدنا في المجموعة (I)، النقط (-3، 3) ، (-2، 3)، (- 1، 3)، (0، 3) جميعها تحقق القاعدة ص =3 بينما النقط (-3، 1) ، (-2، 2) لا تحقق . في المجموعة (II) فقط النقط (1 ، 3) ، (2، 3) تحقق القاعدة ص = 3، وعن طريق رسم النقط التي تحقق القاعدة ص =3 ، نحصل على:



تقع هذه النقط جميعًا على نفس الخط المستقيم **الأفقي**. يمثل هذا الخط الأفقي بيانيًا العلاقة ص = 3.

المعادلة التي على الصورة ص = حـ . حيث حـ عدد ثابت تمثل بيانيًا بخط مستقيم **أفقي**.

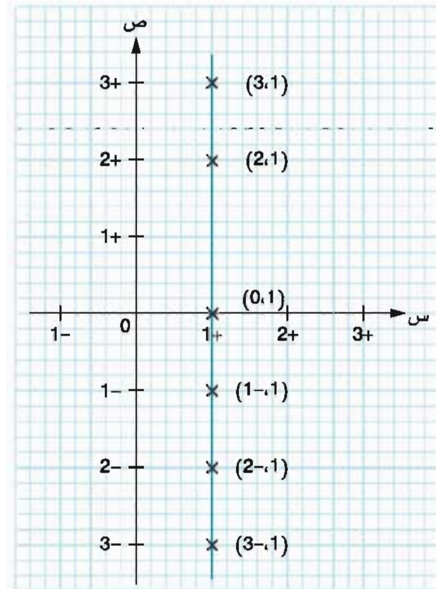
تأمل مجموعات النقاط التالية:

مجموعة I	(3- ،3-)	(3- ،1)	(2- ،1)	(2- ،0)	(1- ،1)	(0 ،1)
مجموعة II	(1 ،0)	(1 ،2)	(2 ،1)	(1 ،3)	(3 ،1)	(3 ،2)

أي من النقط السابقة تحقق القاعدة س = 1؟ لاحظ أن القاعدة لا تحصر القيم للمتغير ص ومع ذلك فإن قيمة س **يجب** أن تظل دائمًا كما هي = 1

من المجموعة (I) نجد أن النقط (1، -3) ، (1، -2) ، (1، - 1) ، (1، 0) جميعها تحقق القاعدة س = 1 بينما النقط (-3، 3) ، (0 ، -2) لا تحقق. في المجموعة (II) نجد أن النقطتين (1، 2)، (1، 3) كلاهما يحقق القاعدة المعطاة.

وبرسم النقط التي تحقق القاعدة س = 1 نحصل على:



تقع جميع هذه النقط على نفس الخط المستقيم **الرأسي**. يمثل هذا الخط الرأسي بيانيًّا المعادلة س = 1

المعادلة التي على الصورة س = حـ، حيث حـ عدد ثابت تمثل بيانيًّا بخط مستقيم رأسي.

تمرين 3 د

1 − (أ) أي من النقط المعطاة تحقق القاعدة:
(i) ص = − 2 (ii) س = 3؟

(3 ،3−)	(2− ،3−)	(1− ،3−)
(0 ،3−)	(1 ،3−)	(2 ،3−)
(3 ،3−)	(3− ،2−)	(2− ،2−)
(1− ،2−)	(0 ،2−)	(1 ،2−)
(2 ،2−)	(3 ،2−)	(3− ،1−)
(2− ،1−)	(1− ،1−)	(0 ،1−)
(1 ،1−)	(2 ،1−)	(3 ،1−)
(3− ،0)	(2− ،0)	(1− ،0)
(0 ،0)	(1 ،0)	(2 ،0)
(3 ،0)	(3− ،1)	(2− ،1)
(1− ،1)	(0 ،1)	(1 ،1)
(2 ،1)	(3 ،1)	(3− ،2)
(2− ،2)	(1− ،2)	(0 ،2)
(1 ،2)	(2 ،2)	(3 ،2)
(3− ،3)	(2− ،3)	(1− ،3)
(0 ،3)	(1 ،3)	(2 ،3)
(3 ،3)		

(ب) ارسم بيانيًّا وعلى ورق رسم مستقل النقط المعطاة في (أ) والتي تحقق القاعدة **(i)** و **(ii)**.

2 − (أ) أي من النقاط المعطاة تحقق القاعدة
(i) ص = 1 ، (ii) س = − 1؟

(3− ،3)	(2− ،3−)	(1− ،3−)
(0 ،3−)	(1 ،3−)	(2 ،3−)
(3 ،3−)	(3− ،2−)	(2− ،2−)
(1− ،2−)	(0 ،2−)	(1 ،2−)
(2 ،2−)	(3 ،2−)	(3− ،1−)
(2− ،1−)	(1− ،1−)	(0 ،1−)
(1 ،1−)	(2 ،1−)	(3 ،1−)
(3− ،0)	(2− ،0)	(1− ،0)
(0 ،0)	(1 ،0)	(2 ،0)
(3 ،0)	(3− ،1)	(2− ،1)
(1− ،1)	(0 ،1)	(1 ،1)
(2 ،1)	(3 ،1)	(3− ،2)
(2− ،2)	(1− ،2)	(0 ،2)

(1 ،2) (2 ،2) (3 ،2)
(3- ،3) (2- ،3) (1- ،3)
(0 ،3) (1 ،3) (2 ،3)
(3 ،3)

(ب) ارسم بيانيًّا على ورق رسم مستقل النقط المعطاة في (أ) والتي تحقق القاعدة (i) ، (ii).

3- ارسم الخطوط التالية على نفس المستوى الديكارتي حيث -3 ≤ س ≤ 3

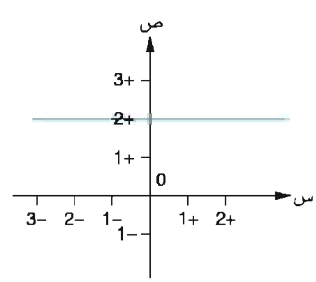
(أ) ص = 2 (ب) ص = 5
(ب) ص = -3 (د) ص = -5

4- ارسم الخطوط المستقيمة التالية على نفس المستوى الديكارتي حيث -3 ≤ **ص** ≤ 3

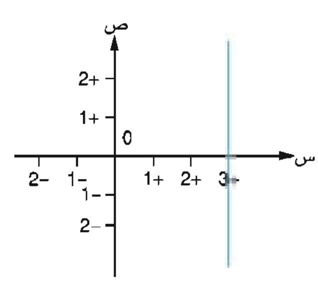
(أ) س = 3 (ب) س = 4
(ب) س = -2 (د) س = -7

5- حدد المعادلة لكل من الخطوط المستقيمة التالية:

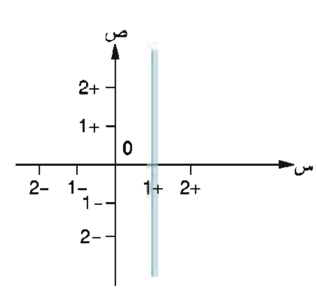
(أ)



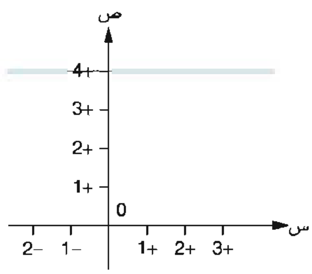
(ب)



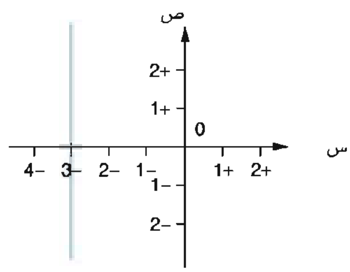
(جـ)



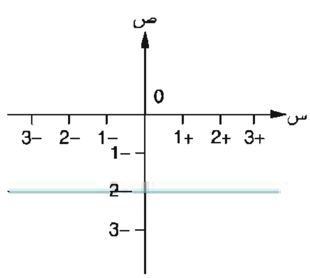
(د)



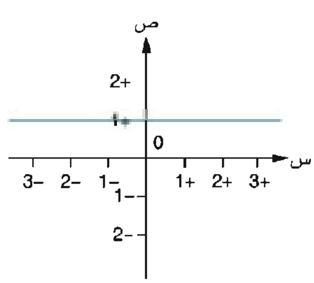
(هـ)



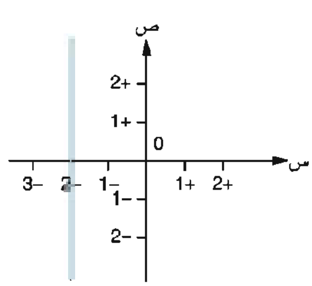
(و)



(ز)



(ح)

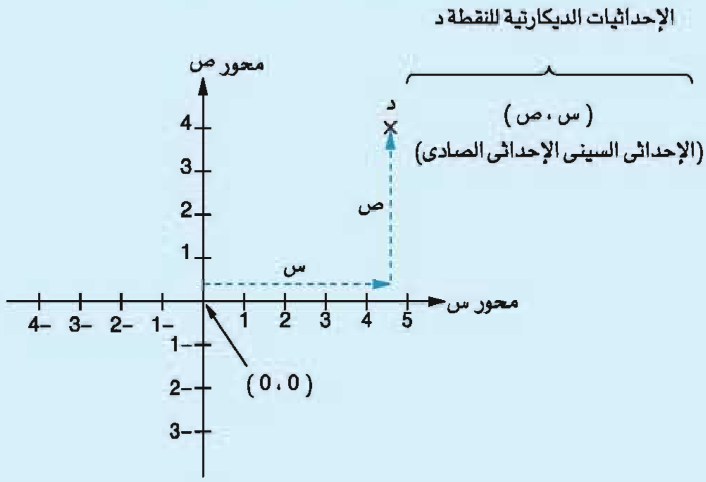


6- حدد معادلة كل من:

(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات.

ملخص

1- ملخص وصفي للمستوى الديكارتي والنظام الإحداثي:

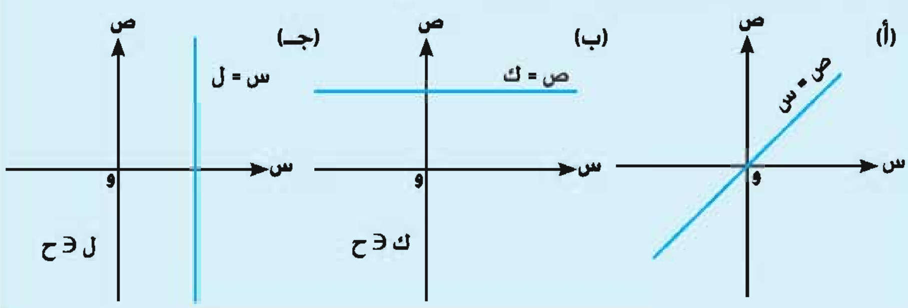


2- معادلة محور السينات هي ص = 0، معادلة محور الصادات هي س = 0.

3- إذا كانت إحداثيات نقطة تحقق معادلة الرسم البياني فإن النقطة تقع على الرسم البياني.

4- إذا كانت إحداثيات نقطة لا تحقق معادلة الرسم البياني فإن النقطة لا تقع على الرسم البياني.

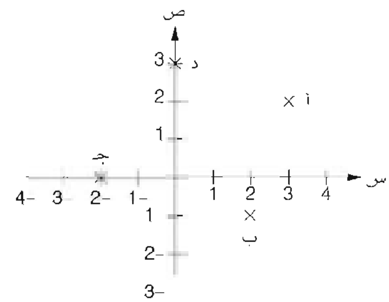
5- بعض الرسوم البيانية الأساسية ومعادلاتها:



ورقة المراجعة 3

قسم أ

1- اكتب إحداثيات النقط أ، ب، جـ، د



2- حدد النقط ن (3، 2)، ط (0، -1) س (-2، 4) في ورقة رسم بياني، صل النقطة ن مع ط، ط مع س مع ن ما نوع المثلث المكون؟

3- ارسم النقط ح (5، 1)، ف (1، 4) ق (-2، 0). فإذا كانت تلك النقاط ثلاثة أركان من مربع. حدد الركن الرابع ثم اكتب إحداثييه.

4- الحرف T تم رسمه بتوصيل النقط (-1، -1) إلى (1، 1)، (1، 3) إلى (3، 1) ويمد خط واحد ليمس الخط الآخر عن طريق رسم النقط كون الحرف T المطلوب. وحدد إحداثيي النقطة حيث الخط الأول يمس الخط الثاني.

قسم ب

5- انقل وأكمل الجدول التالي للمعادلة ص = 2س - 4:

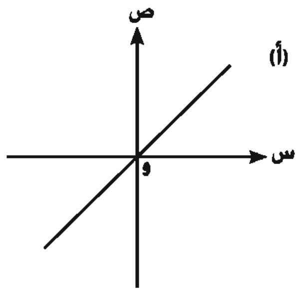
س	-2	0	2
2س			4
-4			-4
ص = 2س -4			0

حدد إحداثيات النقط حيث يقطع الرسم البياني محور الصادات.

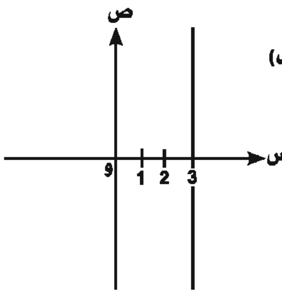
6- ماثل الرسوم البيانية أدناه مع المعادلات الخاصة بها من القائمة التالية:

ص = س، ص = - س،
ص = 3، ص = س - 1،
س = 3

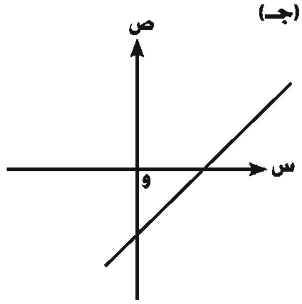
(أ)



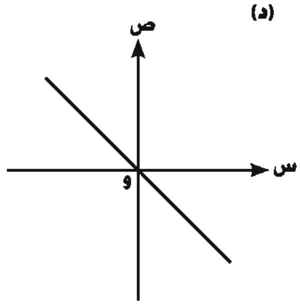
(ب)



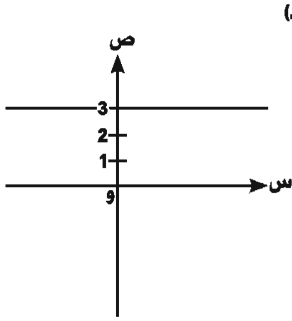
(جـ)



(د)



(هـ)



7- أوجد مفكوك:

(أ) (i) 7(5أ + 3)

(ii) 6أ(ب - 8جـ)

(ب) حلل (i) 2م - 4ن

(ii) س^{2}ص + س

8- أوجد مفكوك:

(أ) 5س (س + 3)

(ب) (س - 5) (س + 10)

(جـ) (2س - 3) (2س + 3)

(د) $(2س + 3)^2$

(هـ) $(2س - 3)^2$

9- حلل:

(أ) س^2 - 3س

(ب) ص^2 + 5ص - 6

(جـ) أ^2 + 6أ + 9

(د) 9ب^2 - 6ب + 1

(هـ) 4حـ^2 - 49

10- (أ) عبر عَمّا يأتي في صورة كسر وحيد.

(i) $\frac{\text{م}}{2} - \frac{\text{2م}}{3}$

(ii) $\frac{2}{\text{ن}} - \frac{3}{\text{2ن}}$

(ب) حل: $\frac{\text{13د} - 8}{5} - \frac{\text{2د} - 1}{3} = 1$

11- (أ) إذا كان ث = أ ر اجعل أ المتغير التابع (هدفا)

(ب) إذا كان ذ = $\frac{1}{2}$ ف ت^2

(i) اجعل ف المتغير التابع (هدفا).

(ii) أوجد قيمة (ف) عندما ذ = 45، ت = 3.

التقويم 1

1- ارسم النقط أ (-2، 2)، ب (3، -1). فإذا كان أ، ب ركنين متقابلين من المستطيل الذي جوانبه توازي محوري السينات والصادات. حدد إحداثيي الركنين الآخرين.

2- أوجد مفكوك:

(أ) 5(4أ - 3)　　(ب) 4(3ب + 2حـ)

(جـ) 3س (2 - ص)　　(د) 2س (3س + 5)

3- حلل:

(أ) 5أ^2 + 3أ　　(ب) 4ب + 2حـ

(جـ) 3س - 12س ص　　(د) 27س^2 - 12

4- (أ) عبر عَمّا يأتي في صورة كسر وحيد

(i) $\frac{\text{3ك}}{5} + \frac{\text{5ك}}{8}$

(ii) $\frac{5}{\text{3ك}} + \frac{8}{\text{5ك}}$

(ب) حل: $\frac{\text{س}}{3} - \frac{\text{س} - 5}{8} = 5$

5- أوجد مفكوك:

(أ) (أ + 2) (3أ + 4)

(ب) (2ب + 3) (4ب - 5)

(جـ) (3حـ - 4) (5حـ - 6)

(د) (أ + 2ب) (حـ - 3)

6- حلل

(أ) 3س^2 - 4س + 6س ص - 8ص

(ب) 3هـ س - 4ك س - 6هـ ص + 8ك ص

(جـ) 8م^2 - 10م ن + 3ن^2

7- (أ) بسط $\frac{\text{أ}^2 + \text{4أ} + 3}{\text{أ} + 3}$

(ب) حلل 3ب^2 - 25ب + 28

(جـ) إذا كان $\frac{3}{\text{2حـ}}$ = 2ب. اجعل حـ المتغير التابع.

8- (أ) حلل أ^2 - ب^2

ثم أوجد قيمة $(6.4)^2 - (3.6)^2$ من دون استخدام الآلة الحاسبة.

(ب) انقل وأكمل الفراغات الآتية:

$(6)^4 - (4)^4 = (6^2)^2 - (4^2)^2$

$= (\square - 4^2)(6^2 + \square)$

$= (\square - 16)(36 + \square)$

$= \square \times \square$

$= 1040$

9- (أ) حلل: 8أ^3 - 1

(ب) أنقل وأكمل الفرغات الآتية:

$3^6 - 2^6 = (3^3)^2 - (2^3)^2$

$= (\square - 2^3)(3^3 + \square)$

$= (\square - 2)(\square + 6 + \square)(3 + 2)(9 - \square + 4)$

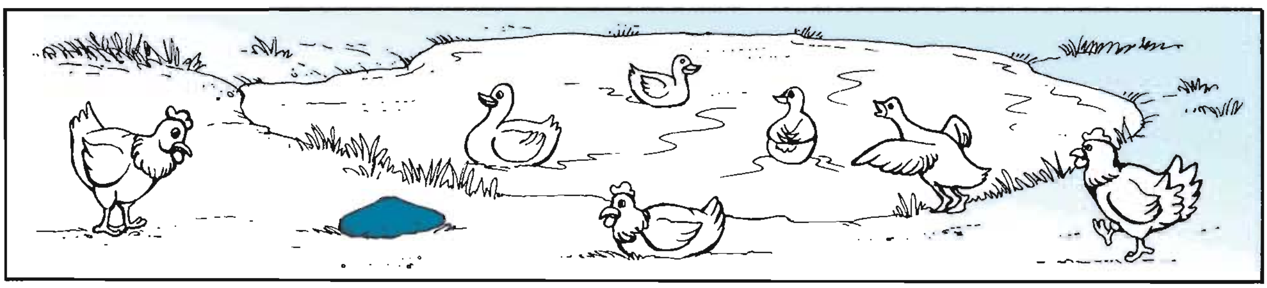
$= \square \times \square \times \square = 665$

4 المعادلات الآنية

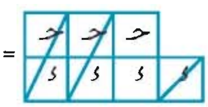
Simultaneous Equations

لقد واجهت أثناء دراستك في المرحلة الأولى من التعليم الأساسي مسائل مثل تلك المعروضة فيما يلي.

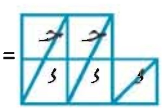
ثمن 3 دجاجات، 4 ديكة	99 دينارًا
ثمن 2 دجاجة، 3 ديكة	71 دينارًا
أوجد سعر شراء الديك.	



تكون غالبًا قد استخدمت النماذج لحل تلك المسألة.

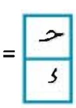
النموذج 1: 

= 99

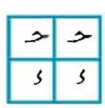
النموذج 2: 

= 71

بطرح النموذج 2 من النموذج 1 نحصل على



= 99 - 71 = 28

النموذج 3: ∴ 

= 2 × 28 = 56

وبطرح النموذج 3 من النموذج 2 نحصل على

= 71 - 56

= 15

∴ سعر شراء الديك 15 دينارًا.

ونتعلم في الشق الثاني من مرحلة التعليم الأساسي حل المسائل من هذا النوع جبريًا باستخدام المعادلات الآنية.

في نهاية هذا الفصل، سوف تكون قادرًا على
- حل المعادلتين الآنيتين الخطيتين من متغيرين بالطرق الآتية:
  - (أ) معادلة المقادير
  - (ب) التعويض
  - **(جـ) الجمع والطرح والحذف.**
- حل المعادلتين الآنيتين الخطيتين بيانيًّا.
- حل المسائل اللفظية التي تتضمن تكوين معادلتين آنيتين خطيتين من مجهولين (متغيرين).

1-4 مقدمة Introduction

تأمل المعادلة الخطية س + ص = 6 والتي تحتوي على مجهولين . يوجد العديد من أزواج القيم لكل من س، ص والتي تحقق هذه المعادلة، على سبيل المثال.

إذا كان س + ص = 6 فإن س = 5، ص = 1 تعطي 5 + 1 = 6
س = 4، ص = 2 تعطي 4 + 2 = 6
س = −3، ص = 9 تعطي −3 + 9 = 6
س = $1\frac{1}{2}$، ص = $4\frac{1}{2}$ تعطي $1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = 6$

الآن تأمل المعادلة الخطية س − ص = 4 والتي تتضمن أيضًا مجهولين. مرة أخرى يوجد العديد من الأزواج المرتبة من القيم لكل من س، ص والتي تحقق هذه المعادلة، على سبيل المثال.

إذا كان س − ص = 4 فإن س = 5، ص = 1 تعطي 5 − 1 = 4
س = 6، ص = 2 تعطي 6 − 2 = 4
س = −3، ص = −7 تعطي −3 − (−7) = 4
س = $-\frac{1}{2}$، ص = $-4\frac{1}{2}$ تعطي $-\frac{1}{2} - (-4\frac{1}{2}) = 4$

يكون أحيانًا من الضروري إيجاد زوج القيم لكل من س، ص والذي يحقق المعادلتين معًا. ونسمى ذلك **حل المعادلتين آنيًّا**. ففي الأمثلة السابقة فقط س = 5، ص =1 يحقق **كلا** المعادلتين.

2-4 الطريقة الجبرية لحل المعادلتين الآنيتين Algebraic Method of Solving Simultanous Equations

سوف نقدم في هذا الفصل الطرق الجبرية الأساسية الثلاث لحل المعادلتين الآنيتين.

1-2-4 طريقة معادلة المقادير Equating Expressions Method

مثال 1:

حل زوج المعادلات الآنية التالي:

ص = 3 س − 5

ص = 2س + 3

الحل

ص = 3 س − 5 .... (1)

ص = 2س + 3 .... (2)

بما أنه يفترض أن للمعادلتين نفس قيمة ص كحل، فيمكن معادلة الطرف الأيسر للمعادلتين.

∴ 3 س − 5 = 2 س + 3

3 س − 2 س = 3 + 5

∴ س = 8

بالتعويض عن قيمة س = 8 في المعادلة (1) نجد أن :

ص = 3 × 8 − 5

ص = 24 − 5 = 19

للتأكد من قيم س = 8 ، ص = 19 .

نستخدم المعادلة (2).

∴ الحل هو س = 8، ص = 19

ملحوظة

عوض عن س بـ 8

للتأكد:

نعوض بقيمة س = 8، ص = 19 في المعادلة (2).

ص = 2 × 8 + 3

= 19

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

مثال 2:

حل المعادلتين الآنيتين:

2س − 5 ص = −1

2 س = 3 ص + 1

الحل

2س − 5ص = −1 .... (1)

2 س = 3 ص + 1 .... (2)

من المعادلة (1) نجد أن 2 س = 5 ص − 1 .... (3)

عادل (2) ، (3) نجد أن الطرف الأيمن في كل منهما متساوٍ، وعلى هذا فالطرف الأيسر في كل منهما يكون متساويًّا أيضًا.

5ص − 1 = 3 ص + 1

5 ص − 3ص = 1 + 1

2 ص = 2

∴ ص = 1

بالتعويض عن قيمة ص = 1 فى المعادلة (2) نجد أن :

2س = 3 (1) + 1 = 4

∴ س = 2

∴ الحل هو س = 2، ص = 1

للتأكد:

بالتعويض فى المعادلة (1)

س = 2. ص = 1 نجد أن:

2س − 5ص = 2 × (2) − 5 (1)

= 4 − 5 = −1

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

تمرين 4 أ

استخدم طريقة معادلة المقادير لحل المعادلات الآنية:

1- ص = 2 س + 1
ص = س − 1

2- س = 3 ص − 1
س = 2 ص + 1

3- 2س = 3 ص +4
2 س = 5ص +8

4- 3ص = 2س + 1
3 ص = 3 س + 4

5- 3س ـ 4 ص = 2
3 س = 7 ص − 1

6- 5 ص − 3 س = 2
5 ص = 8س − 3

7- 4س + 5 ص =1
4 س − ص = − 5

8- 5 ص −7 = 3س
5 ص + 7 = 17س

9- 3ص = 2س −3
5 ص = 2 س − 1

10- 3 ص + 2 = 4 س
3 ص − 2 = 2 س

2-2-4 طريقة التعويض Substitution Method

هذه الطريقة مفيدة في حل المعادلتين الآنيتين إذا أعطينا إحدى المعادلتين (بدلالة س، ص) ، على صورة "س = ..." أو "ص = ..."

مثال 3:

حل زوج المعادلات الآنية التالي:

2س + 3ص = 4

ص = 3س + 5

الحل

2س + 3ص =4 .... (1)

ص = 3 س +5 .... (2)

بالتعويض من (2) في (1)

∴ 2 س + 3(3س + 5) = 4

2س + 9س + 15 = 4

11س = 4 − 15

11س = − 11

∴ س = −1

بالتعويض عن قيمة س = −1 في (2)

ص = 3 × (−1) + 5

= −3 + 5

= 2

∴ الحل هو س = −1 ، ص = 2

للتأكد:
بالتعويض عن قيمة س = −1 ص = 2
في المعادلة (1)
2 × (−1) + 3 × 2 =
−2 + 6 = 4
∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

مثال 4:

حل زوج المعادلات الآنية التالي :

س + 2 ص = 4

2س + 3ص = 7

الحل

س + 2 ص = 4 .... (1)

2س + 3ص = 7 .... (2)

من (1) نجد أن س = 4 – 2 ص .... (3)

بالتعويض من (3) في المعادلة (2) نجد أن :

∴ 2 (4 – 2 ص) + 3 ص = 7

8 – 4ص + 3ص = 7

– ص = 7 – 8 = –1

∴ ص = 1

بالتعويض عن قيمة ص = 1 في المعادلة (3)

س = 4 – 2 × 1 = 4 – 2 = 2

∴ الحل هو س = 2 ، ص = 1

للتأكد:

نعوض عن قيمة س = 2، ص = 1 في المعادلة (2)

2 × 2 + 3 × 1 = 7

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

ليس ضروريًا التأكد من (1) حيث (1) و(3) هي نفس المعادلة.

تمرين 4 ب

حل كل زوج من المعادلات الآنية التالية بطريقة التعويض.

1- 3 س + 4 ص = 11
ص = 9 – 2 س

2- ص = 3 – 4 س
6 س – 5 ص = –2

3- 5 س + 2 ص = –1
س – 3 ص = –7

4- 3 س + 7 ص = 4
2 س + ص = –1

5- س + ص = –1
3 س – 4 ص = 4

6- 4 س + ص = 15
7س – 3 ص = 50

7- س – 10ص = 23
3س – 5ص = 19

8- 3 س + ص = 11
س – ص = 1

9- 2س + ص = 5
5س – ص = 9

10- س – 2ص = –3
س + ص = 3

3-2-4 طريقة الحذف Elimination Method

يكون من المناسب في كثير من الأحيان استخدام طريقة الحذف عن طريق جمع أو طرح المعادلات.

مثال 5:

حل زوج المعادلات الآنية التالي:

2 س + ص = 5

5 س − ص = 9

الحل

2 س + ص = 5 .... (1)

5 س − ص = 9 .... (2)

بجمع المعادلتين (1)، (2) ينتج (2 س + ص) + (5 س − ص) = 5 + 9

7 س = 14

∴ س = 2

بالتعويض عن قيمة س في المعادلة (1) :

2 × 2 + ص = 5

ص = 5 − 4 = 1

∴ ص = 1

∴ الحل هو س = 2 ، ص = 1

ملحوظة

بجمع الطرف الأيسر 1، 2 سوف نحذف حدود ص من الطرفين وتصبح المعادلة في مجهول واحد هو س.

للتأكد:

نعوض بقيم س ، ص في المعادلة 2

5 (2) − 1 = 9

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

مثال 6:

حل زوج المعادلات الآنية التالي:

س + ص = 3

س −2ص = −3

الحل

س + ص = 3 .... (1)

س −2ص = −3 .... (2)

نطرح المعادلتين (1) − (2) ينتج (س + ص) − (س −2 ص) = 3 − (−3)

س + ص − س + 2ص = 6

3 ص = 6

ص = 2

بالتعويض عن قيمة ص = 2 في المعادلة (1) :

س +2 = 3

∴ س = 1

∴ الحل هو س = 1، ص = 2

ملحوظة

نحذف س عن طريق طرح طرفي المعادلة (2) من طرفي المعادلة (1) على التوالي.

للتأكد:

نعوض بقيم س = 1، ص =2 في المعادلة (2) = 1 − 4 = −3

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

ملحوظة

لحذف مجهول، يجب أن يكون له نفس المعامل في المعادلتين.

مثال 7:

حل زوج المعادلات الآنية التالي :

2 س + ص = −1

3 س − 4ص = 4

الحل

2 س + ص = −1 .... (1)

3 س − 4ص = 4 .... (2)

بضرب المعادلة (1) × (4) نحصل على

8 س + 4ص = − 4 .... (3)

بجمع المعادلة (3) + (2) تعطي (3 س − 4ص) + (8س + 4 ص) = 4 + (−4)

11 س = صفر

∴ س = صفر

بالتعويض عن قيمة س = صفر في المعادلة (1):

2 × صفر + ص = −1

صفر + ص = −1

∴ ص = −1

∴ الحل هو س = صفر ، ص = −1

للتأكد:

نعوض بقيم س = صفر، ص = −1 في المعادلة (2)

3س − 4 ص = 3 (صفر) − 4(−1)

= 4

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

مثال 8:

حل زوج المعادلات الآنية التالي:

5 س − 4ص = 2

2 س + 3ص = 10

ملحوظة

تجاهل العلامة واجعل 12 المعامل لـ ص في المعادلتين.

الحل

5 س − 4ص = 2 .... (1)

2 س + 3ص = 10 .... (2)

بضرب المعادلة (1) × (3) ينتج 15 س − 12 ص = 6 .... (3)

بضرب المعادلة (2) × (4) ينتج 8 س + 12 ص = 40 .... (4)

بجمع (3) + (4) ينتج (15 س − 12 ص) + (8 س + 12ص) = 6 + 40

23س = 46

∴ س = 2

بالتعويض عن قيمة س = 2 في المعادلة (2) :

2 × 2 + 3 ص = 10

3 ص = 6

∴ ص = $\frac{6}{3}$ = 2

∴ الحل هو س = 2 ، ص = 2

للتأكد:

نعوض عن قيمة س = 2، ص = 2 في المعادلة (1)

5 × 2 − 4 × 2 = 10 − 8 = 2

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

في المثال السابق قد تفضل حذف س بدلًا من ص، عليك في هذه الحالة أن تساوي معامل س في المعادلتين عن طريق ضرب المعادلة (1) ×2 والمعادلة (2) × 5، أيهما أسهل في الحذف س أم ص؟

تمرين 4 ج

حل الأزواج التالية من المعادلات الآنية بطريقة الحذف:

1- س + ص = 3
س - ص = 1

2- س + ص = 2
س - ص = 4

3- 2 أ + ب = 8
3 أ - ب = 17

4- 4 د + 2 ط = 24
د - 2 ط = 1

5- أ + 3 ب = 9
2 أ - 3 ب = 0

6- س + ص = -1
3 س - ص = 5

7- 2 ر + 7 ذ = 26
ر + ذ = 3

8- 4 د - ط = -2
3 د + 2 ط = -7

9- 2 ن - 3 ك = 3
3 ن + ك = -23

10- 3 ن - 2 سـ = 11
ن - 7 سـ = 29

11- 4 أ + 3 ب = 0
7 أ - 2 ب = -29

12- -3 حـ + 4 ى = 4
9 حـ - 2 ى = 3

تمرين 4 د

استخدم طريقة ملائمة لحل كل زوج من المعادلات الآنية.

1- 5 أ - 3 ب = 6
5 أ - 4 ب = 8

2- حـ + ى = $\frac{1}{2}$
حـ - ى = $\frac{1}{4}$

3- 2 ح - 4 ف = 9
2 ح - 2 ف = 5

4- 4 س + ص = 8
5 س - 2 ص = 23

5- 2 س + ص = 11
س + 2 ص = 13

6- 3 س - ص = 2
س + 2 ص = 17

7- 5 ك - 4 سـ = 14
3 ك + 7 سـ = -1

8- 3 س + 5 ص = 30
2 س - 3 ص = 1

9- 3 م - 2 ن = 25
2 م + 5 ن = 4

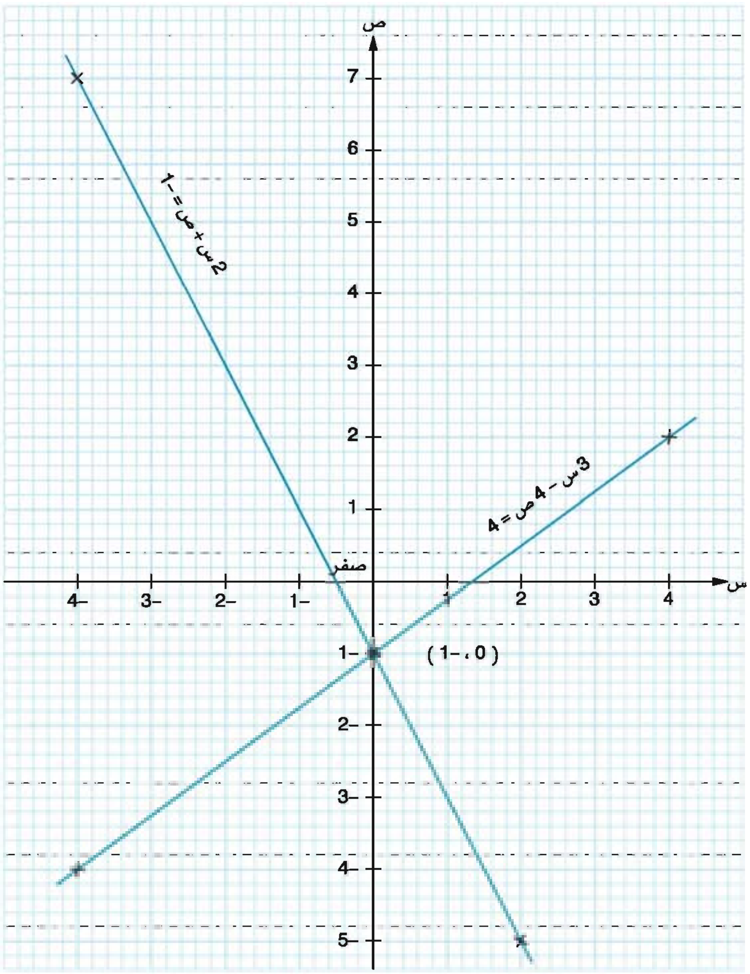
10- 3 س + 2 ص = 5
2 س - 3 ص = 12

11- 3 س - 2 ص = 0
2 س + 3 ص = 13

12- 3 د + 7 ط = 22
5 د - 3 ط = 0

3-4 التفسير البياني Graphical Interpretation

رأينا **كيفية** استخدام الطرق الجبرية الأساسية الثلاث لحل المعادلتين الآنيتين. فما أهمية **حل زوج من المعادلات الآنية**؟ للمعرفة، دعنا نرسم بيانيًّا المعادلتين في مثال (7) على نفس المستوى الديكارتي.



لاحظ تقاطع الخطين في النقطة (0، -1). الحل الذي توصلنا إليه هو س= 0، ص = -1

وعليه فإن **حل زوج المعادلات الآنية** يعطي الإحداثي السيني والإحداثي الصادي **لنقطة التقاطع** لرسميهما البيانيين.

دعنا نحل المعادلتين الآنيتين في المثال 8 لنبين مرة أخرى الحقيقة السابقة.

ملحوظة

زوج المعادلات الآنية في المثال 7:

2س + ص = -1

3س - 4ص = 4

الحل:

س = صفر

ص = -1

ملحوظة

الحل

س = صفر

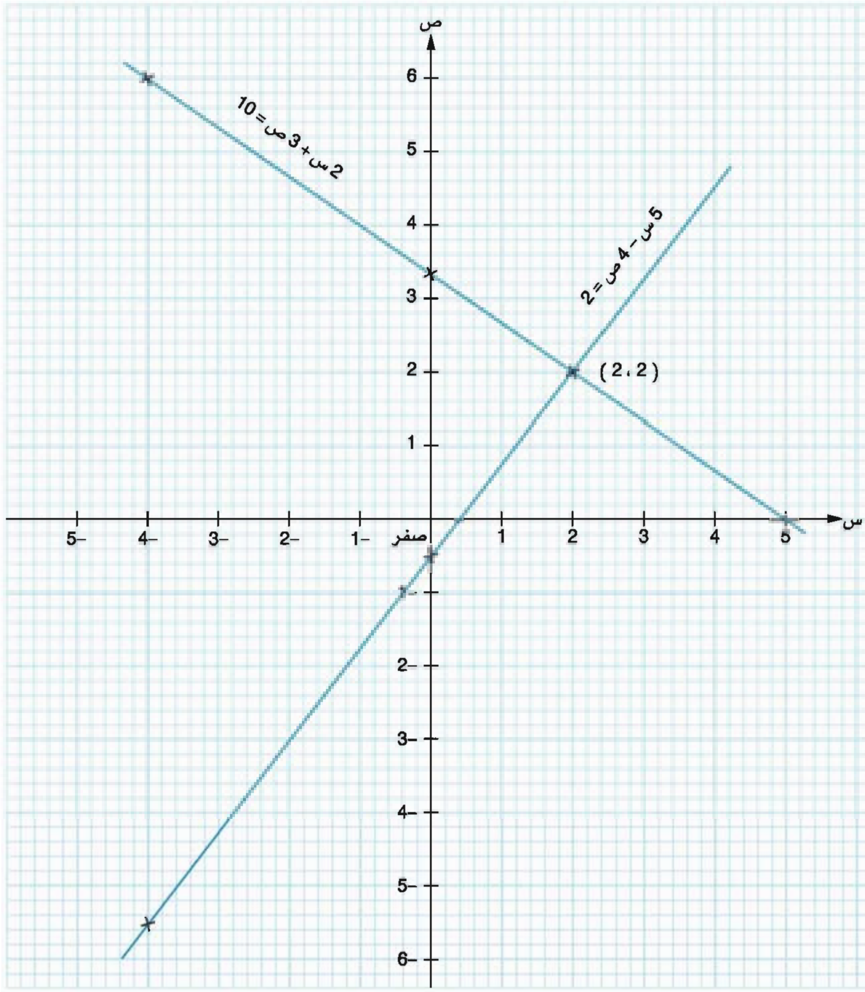
ص = -1

مثل في النقطة (صفر، -1)

التي تقع على الخطين

2س + ص = -1

3 س - 4 ص = 4



ملحوظة

المعادلتان الآنيتان في المثال 8 :

5س – 4ص = 2

2س + 3ص = 10

الحل:

س = 2

ص = 2

نرى مرة أخرى أن الحل الذي حصلنا عليه سابقًا، بمعنى س =2، ص = 2، يعطي إحداثيات نقطة التقاطع للرسمين. هذه طريقة مقبولة لحل المعادلتين الآنيتين ولكنها تتطلب عملًا أكثر حيث تستلزم رسم الشكل البياني للمعادلتين بطريقة صحيحة.

1-3-4 الحلول البيانية للمعادلتين الآنيتين
Graphical Solutions of Simultaneous Equations

مثال 9:

حل الزوج التالي من المعادلات الآنية باستخدام طريقة الرسم البياني:

ص = س + 1

2 س + ص = –2

الحل

جدول العلاقة ص = س + 1 :

س	2 –	0	2
ص	1 –	1	3

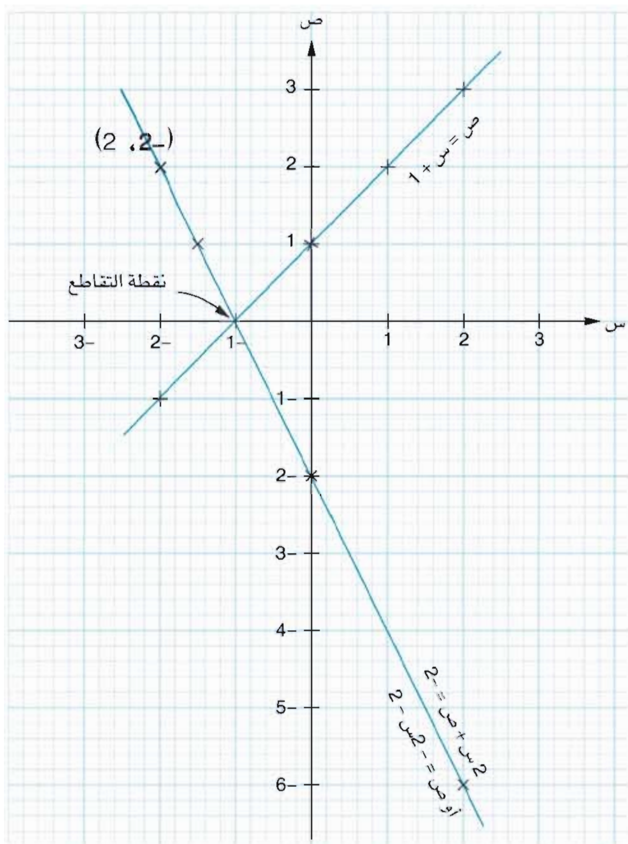
ملحوظة

يكفي رسم نقطتين لرسم خط بياني مستقيم. إلا أننا نستخدم نقطة ثالثة للتأكد من عدم وجود خطأ.

من المعادلة 2 س + ص = -2 عبر عن قيم ص بدلالة س وذلك لعمل جدول لقيم س، ص وعليه يمكنك كتابة المعادلة 2 س + ص = -2 كما يلي: ص = -2س - 2
الجدول التالي لقيم ص = -2 س - 2 :

س	-2	0	2
ص	2	-2	-6

ثم حدد النقاط وارسم الخطوط على ورقة الرسم البياني



من الرسم البياني فإن إحداثيي نقطة التقاطع هما (-1،0) أي أن الحل هو س = -1، ص = 0

تمرين 4هـ

1- حل الأزواج التالية من المعادلات الآنية بيانيًا:

(أ) ص = س - 2
ص = -2س + 4

(ب) ص = 3س -1
ص = 2س + 1

(جـ) ص = 3س
ص = س - 6

(د) ص = -2س
ص = - س + 5

2- أوجد حلول الأزواج التالية من المعادلات الآنية برسمها بيانيًا:

(أ) ص = س - 4
س + ص = 6

(ب) ص = س - 2
3س + ص = 6

(جـ) س + ص = 2
2 س - ص = -5

(د) س + ص = 4
4س - ص = 1

(هـ) س = 3
س - ص = 5

(و) ص = 5
3س + ص = - 4

(ز) 2 س - ص = 3
3س + 2 ص = 1

(ح) س - 2ص = -1
س - ص = -2

4-3-2 لا حل والحلول اللانهائية No Solution and Infinitely Many Solutions

أنشطة

1- حاول حل الزوج التالي من المعادلات الآنية:

س + ص = 3

س + ص = 6

ماذا تلاحظ ؟

ارسم بعد ذلك الشكل البياني لكل معادلة من المعادلتين على نفس المستوى الديكارتي، هل يتقاطع الخطان كل منهما مع الآخر؟

سوف نلاحظ أن بعض المعادلات الخطية الآنية ليس لها حل يمكن عرضه بيانيًا، لأنه لا يوجد نقطة تقاطع للخطين.

2- هل النقط (2، 0) ، (4، 1) ، (6، 2) تحقق زوج المعادلات الآنية؟

س − 2 ص = 2

ص = $\frac{1}{2}$ س −1

هل يمكن أن تجد نقطًا أخرى تحقق المعادلتين الآنيتين السابقتين؟

حاول أن تحل زوج المعادلات الآنية جبريًا. ماذا تلاحظ؟

ارسم بعد ذلك الخطين في نفس المستوى الديكارتي، عند كم نقطة يتقاطع الخطان معًا؟

سوف نلاحظ أن بعض المعادلات الخطية الآنية لها حلول لا حصر لها. [نقول أن هناك عددًا لا نهائيًا من الحلول]. يمكن بيانيًا عرض انطباق الخطين فوق بعضهما البعض تمامًا .

4-4 حل المشكلات باستخدام المعادلات الآنية

Solving Problems Using Simultaneous Equations

ارجع إلى الأسطوانة المدمجة

العديد من المشكلات التي تواجهنا في حياتنا اليومية تتضمن العديد من الكميات المجهولة. ويمكن في كثير من الأحيان استخدام المعادلات الآنية لإيجاد القيم المطلوبة لهذه الكميات. وفي هذا الجزء سوف يتم مناقشة المشكلات التي تتضمن مجهولين.

أولًا: يجب إعطاء **الكميات المجهولة** حروفًا مناسبة لتمثل **المتغيرات**. عندئذ يتم ترجمة المعلومات المعطاة إلى **معادلات**. فإذا كان لدينا مجهولان ينبغي أن يكون لدينا معلومتان على الأقل تؤديان إلى معادلتين للتمكن من حل المشكلة.

وبما أن المسألة لفظية أصلًا، فيجب ترجمة الحل الجبري إلى كلمات مرة أخرى للحصول على الحل النهائي.

ملحوظة

المتغيرات هي كميات مجهولة يمكن أن تأخذ أي قيمة.

مثال 10:

مجموع عددين يساوي 20 والفرق بينهما 2 أوجد هذين العددين.

الحل

نفرض أن العدد الأكبر هو س والأصغر هو ص.

مجموع العددين س، ص = 20

س + ص = 20 .... (1)

الفرق بين العددين س ، ص = 2

س − ص = 2 .... (2)

نحذف ص بجمع المعادلتين.

2 س = 22

∴ س = 11

بالتعويض في المعادلة (1) عن قيمة س = 11،

11 + ص = 20

ص = 20 − 11

∴ ص = 9

∴ العددان هما 11، 9

مثال 11:

إجمالي ثمن شراء تذاكر مسرحية لـ 2 من الشباب، و3 من الأطفال هو 16 دينارًا بينما ثمن الشراء لـ 3 شباب وطفلين 19 دينارًا. أوجد ثمن شراء تذكرة كل من الشباب والأطفال.

الحل

نفترض أن ثمن شراء تذكرة الشباب أ دينار ، ثمن شراء تذكرة الأطفال حـ دينار.

2 أ + 3 حـ = 16 .... (1)

3 أ + 2 حـ = 19 .... (2)

لحذف حـ

بضرب (1) × 2   4 أ + 6حـ = 32 .... (3)

بضرب (2) × −3   − 9 أ − 6حـ = − 57 .... (4)

بجمع (3) + (4)   − 5 أ = − 25

أ = 5

بالتعويض عن قيمة أ = 5 في المعادلة (1):

10 + 3 حـ = 16

3 حـ = 6

∴ حـ = 2

∴ ثمن تذكرة الشباب 5 دنانير، الأطفال ديناران.

مثال 12:

كان عُمر محمد قبل خمس سنوات مضت ثلاثة أمثال عمر ابنه عادل، وبعد خمس سنوات من الآن سيصبح عمر محمد ضعف عمر ابنه. أوجد عمريهما الآن.

الحل

نفرض عُمر محمد = س ، نفرض عُمر عادل = ص

قبل 5 سنوات :

كان عُمر محمد = س − 5

عمر عادل = ص − 5

∴ س − 5 = 3 (ص − 5)

= 3 ص − 15

س = 3ص − 10 .... (1)

بعد خمس سنوات من الآن:

يصبح عُمر محمد س + 5

عُمر عادل ص + 5

∴ س + 5 = 2 (ص + 5)

= 2 ص + 10

س = 2ص + 5 .... (2)

بمعادلة الطرفين.

3 ص − 10 = 2 ص + 5

3ص − 2 ص = 5 + 10

∴ ص = 15

بالتعويض عن قيمة ص = 15 في المعادلة (2).

س = 2 (15) + 5

س = 30 + 5 = 35

∴ عُمر محمد 35 سنة، عمر ابنه عادل 15 سنة.

تمرين 4

1− مجموع عددين 15 والفرق بينهما 1. أوجد العددين.

2− مجموع عددين 8 والفرق بينهما 12، أوجد العددين.

3− مجموع عددين 7 والفرق بين ضعف أكبر العددين وأصغرهما يساوي 5، أوجد العددين.

4− أوجد العددين اللذين ضعف أكبرهما مضافًا إلى أصغرهما يساوي صفرًا، و3 أمثال أكبرهما ناقص أصغرهما يساوي 5

5− يزيد طول بطاقة مستطيلة بمقدار 2سم عن عرضه، فإذا كان محيط المستطيل = 68سم. أوجد الطول والعرض.

6− درجة العلوم تقل 15 درجة عن درجة الرياضيات لأحد الطلاب. فإذا كان مجموع الدرجتين 145 درجة، أوجد درجة كل مادة.

7− أوجد العددين اللذين ضعف أولهما وثلاثة أمثال ثانيهما = 19 وثلاثة أمثال الأول ناقص الثاني يساوي واحد.

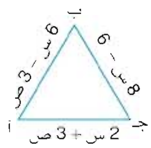
8 − أوجد عددين بحيث يكون مجموع ثلاثة أمثال الأول وضعف الثاني يساوي 12 بينما ضعف الأول ناقص الثاني يساوي واحد.

9- ثلاثة كتب للغة الإنجليزية، وأربعة كتب للرياضيات سعرها 78 دينارًا بينما كتابان للغة الإنجليزية وثلاثة كتب للرياضيات سعرها 56 دينارًا أوجد سعر كتاب الإنجليزي وكتاب الرياضيات.

10- كان عمر ماجدة قبل أربع سنوات مضت ثلاثة أمثال عمر فاطمة وبعد 4 سنوات من الآن سوف يكون عمر ماجدة ضعف عمر فاطمة، أوجد عمريهما الآن.

11- عُمر السيد عمر قبل خمس سنوات مضت كان أربعة أمثال عُمر حفيدته ماجدة وبعد خمس سنوات من الآن سوف يكون عُمر السيد عمر ثلاثة أمثال عُمر ماجدة. أوجد عمريهما الآن.

12- أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع.
(أ) أوجد قيمة س، ص
(ب) أوجد المحيط.



ملخص

1- العددان اللذان يحققان زوجًا من المعادلات الآنية يسميا **حل المعادلتين**.

2- الطرق الجبرية الثلاث الأكثر استخدامًا لحل المعادلتين الآنيتين هي:
(أ) طريقة معادلة المقادير.
(ب) طريقة التعويض.
(جـ) طريقة الحذف.

3- الحل البياني:
نقطة تقاطع الخطين هي حل زوج المعادلات الآنية.

رياضيات ممتعة

سئل ولد عن عدد اخوته فقال إذا لم احسب نفسي فإن عدد البنات يساوي عدد البنين، وسئلت اخته فقالت إذا لم احسب نفسي فعدد البنين ضعف عدد البنات فكم عدد كل من البنين والبنات؟

ورقة المراجعة 4

قسم أ

1- حل الزوج التالي من المعادلات الآتية:
5 ص = 3س + 4
5 ص = 4 س - 3

2- حل الزوج التالي من المعادلات الآتية:
3س + 4 ص = 5
ص = س - 4

3- حل الزوج التالي من المعادلات الآتية:
س + ص = 4
س - ص = -2

4- حل الزوج التالي من المعادلات الآتية:
3س + ص = 22
2س + ص = 17

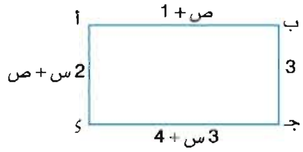
قسم ب

5- مجموع عددين هو 30 والفرق بينهما هو 4، كون زوجًا من المعادلات الآتية وأوجد العددين.

6- حل الزوج التالي من المعادلات الآتية:
3ص + 2س = 6
ص - 2س = 10

7- حل الزوج التالي من المعادلات الآتية:
4س + 3 ص = 2
2س + ص = 2

8- أ ب حـ ى مستطيل.



(أ) أوجد قيمتي س، ص.
(ب) ثم أوجد مساحة المستطيل.

قسم جـ

9- عمر إبراهيم قبل عامين كان ثلاثة أمثال عمر علي وبعد 3 أعوام من الآن سوف يكون عمر إبراهيم فقط ضعف عمر علي. كون زوجًا من المعادلات الآتية وأوجد عمريهما الآن.

10- انقل وأكمل الجداول الآتية للعلاقة ص = 4س - 3، ص = -2س + 3

جدول العلاقة
ص = 4س - 3

س	0	2	4
ص	-3		

جدول العلاقة
ص = -2س + 3

س	0	2	4
ص		-1	

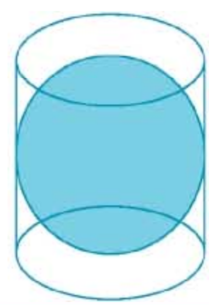
مستخدمًا كل 2 سم لتمثل وحدة واحدة من محور السينات، 1 سم لتمثل وحدة واحدة من محور الصادات ارسم بيانيًا العلاقة.
ص = 4س - 3
ص = -2س + 3 حيث صفر ≤ س ≤ 4
من الرسم حل زوج **المعادلات** الآتية:
ص = 4س - 3
ص = -2س + 3

5 مساحات السطوح

Mensuration

اشتهر أرشميدس بصيحته "وجدتها!" وجريه عاريًا عبر شوارع مدينة سيراكيوز في صقلية عندما توصل إلى طريقة لمعرفة كمية الفضة التي استخدمها الصائغ في التاج لغش الملك.

كان أرشميدس عالم رياضيات إغريقي عاش في القرن الثالث قبل الميلاد.



توصل أرشميدس أيضًا إلى طريقة حساب حجم الكرة. وقد أثبت أن حجم الكرة يساوي ثلثي حجم الأسطوانة التي لها نفس نصف قطر الكرة وارتفاع مساوٍ لقطرها. لن ندرس الإثبات في هذا الكتاب.

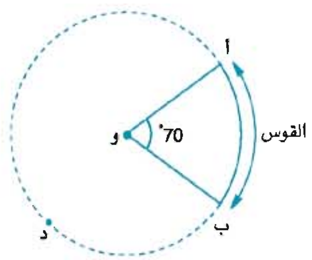
وقد طلب نقش الكرة والأسطوانة المرسومة في الشكل المقابل على قبره بعد وفاته. ولقد توفى عام 212 قبل الميلاد.

في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادرًا على:

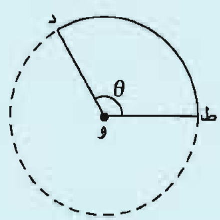
- إيجاد طول القوس، أو الزاوية المركزية التي تقابله، أو طول نصف قطره بمعلومية أي معلومتين.
- إيجاد مساحة القطاع الدائري، أو الزاوية المركزية، أو طول نصف قطره بمعلومية أي معلومتين.
- إيجاد مساحة القطاع الدائري، أو طول قوسه، أو طول نصف قطره بمعلومية أي معلومتين.
- إيجاد المساحة السطحية، والحجم، ومساحة القاعدة، والطول، والعرض، والارتفاع للهرم.
- إيجاد مساحة السطح المنحنى للمخروط، وحجمه، ومساحة قاعدته، وارتفاعه الجانبي، وطول نصف قطر قاعدته.
- إيجاد المساحة السطحية للكرة، وحجمها، وطول نصف قطرها.

1-5 طول القوس Arc Length

القوس جزء من محيط الدائرة. يقابل على سبيل المثال القوس أ ب الزاوية 70° عند مركز الدائرة (و). القوس أ ب المبين يسمى **القوس الأصغر** بينما القوس أ د ب يسمى **القوس الأكبر**.



يقابل القوس د ط الزاوية θ عند مركز الدائرة (و).



تذكر أننا تعلمنا في الكتاب السابق أن محيط الدائرة التي طول نصف قطرها نق تعطى بالعلاقة ح = 2π نق، وبما أن π عدد **ليس له قيمة دقيقة، فإننا** نقرب π إلى $\frac{22}{7}$ أو 3.14 لتبسيط الحساب.

أنشطة

لدراسة العلاقة بين النسب الآتية

(أ) $\frac{\theta}{360°}$ (ب) $\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$

(أ) **باستخدام برنامج الرسم الهندسي.**

خطوات النشاط

1- للوصول إلى البرنامج انقر مرتين على أيقونة (GSP) من على الديسك توب (سطح المكتب).

2- استخدم Compass tool . وارسم دائرة مركزها أ وطول نصف قطرها 3 سم.

3- استخدم Straightedge tool لرسم نصف قطر الدائرة من المركز (أ) إلى نقطة ب على محيط الدائرة . ارسم نصف قطر آخر من المركز أ إلى النقطة حـ على محيط الدائرة.

ملحوظة

يمكن عمل هذا النشاط باستخدام برنامج هندسي أو بالبحث عن نموذج باستخدام جدول. الطريقتان مشروحتان.

4- استخدم Text Tool لتحديد مركز الدائرة أ النقط ب، حـ على الدائرة.

5- اضغط مفتاح Shift إلى أسفل واستخدم Selection Arrow Tool للنقر على النقط ب، أ، حـ على التوالي.

6- اضغط Measure من Menu Bar واختر زاوية. (الزاوية ب أ حـ سوف تعرض كما يلي م∠ب أ حـ = ...).

7- ضاغطًا مفتاح Shfit إلى أسفل استخدم Selection Arrow Tool للنقر على النقط ب، حـ والقوس ب حـ على التوالي.

8- انقر Measure من Menu Bar واختر طول القوس Arc Length (طول القوس ب حـ سوف يرسم كطول ⌒ب حـ على ⊙أ ب = ...)

9- استخدم Selection Arrow Tool وانقر محيط الدائرة وعندئذ انقر Measure من Menu Bar واختر محيط الدائرة (تعرض محيط الدائرة ⊙أ ب = ...)

10- انقر Measure من Menu Bar واختر آلة حاسبة. (سوف تظهر آلة حاسبة على الشاشة).

11- انقر على
- العبارة "طول القوس ⌒ب حـ على ⊙أ ب =" (على الشاشة).
- عندها "/" علامة القسمة من الآلة الحاسبة.
- العبارة "محيط الدائرة ⊙ أ ب = ..." و.
- في النهاية "Ok" على الآلة الحاسبة.

(النسبة "$\frac{\text{طول القوس ⌒ب حـ على ⊙أ ب}}{\text{محيط الدائرة أ ب}}$" = تجدها على الشاشة)

12- كرر الخطوة رقم 10 وانقر على العبارة "الزاوية م∠ب أ ج = ..." ثم اتبعها "/" على الآلة الحاسبة و360 (أيضًا على الآلة الحاسبة). الخطوة التالية انقر Unit button على الآلة الحاسبة واختر Degrees.

(النسبة "$\frac{\text{م∠ب أ حـ}}{360°}$" = سوف تظهر)

13- قارن النسب التي حصلت عليها من الخطوتين 11، 12. هل هي متساوية؟

14- استخدم Selection Arrow tool وانقر على النقطة حـ لتغيير الزاوية ب أ حـ (لاحظ أن طول نصف قطر الدائرة ثابت). أي قيمة تتغير وأي قيمة لا تتغير؟ هل النسب في الخطوتين 11، 12 متساوية؟

ملحوظة

برنامج الرسم الهندسي التخطيطي GSP هو أداة قوية من أدوات تكنولوجيا المعلومات للإنشاء الهندسي. فيما يلي بيان سريع بالأدوات الرئيسية في البرنامج.

Selection Arrow Tool
لاختيار نقطة أو خط

Point Tool
لرسم نقطة

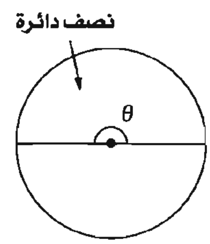
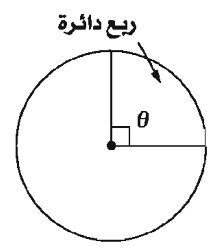
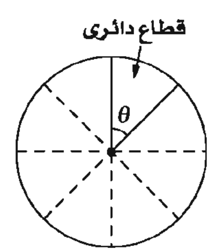
Compass Tool
لرسم دائرة

Straightedge Tool
لرسم خط مستقيم

Text Tool
لعنونة نقطة، خط، إلخ.

15- استخدم Selection Arrow Tool ثم انقر على النقطةب وغير طول نصف القطر (ليس من الضروري المحافظة الزاوية ب أ حـ ثابتة لأنه من الصعب التحكم فيها).
هل النسب متساوية في الخطوتين 11، 12؟

(ب) البحث عن نموذج بعمل قائمة للقيم المختلفة للنسبتين

	θ	$\frac{\theta}{360°}$	$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$
	180°		
	90°		
	45°		

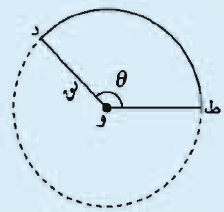
استخرج النسب في العمودين الأخيرين.

يدل العمودان الأخيران على أن النسب متطابقة ولهذا نحصل على

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\theta}{360°}$$

التعميم بالاستقراء

يمكن تعميم نتائج النشاط السابق بالاستقراء.

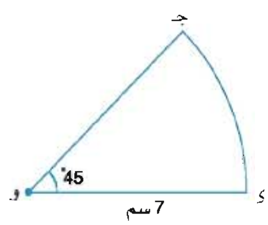


$$\frac{\text{طول القوس د ط}}{2\pi \text{ نق}} = \frac{\theta}{360^\circ}$$

مثال 1:

أوجد طول القوس جـ ى باعتبار

$\pi = \frac{22}{7}$. ويقابل زاوية مركزية مقدارها °45



الحل

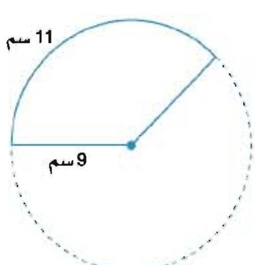
$$\frac{\text{طول القوس جـ ى}}{2\pi \text{ نق}} = \frac{45^\circ}{360^\circ}$$

∴ طول القوس جـ ى = $\frac{45}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7$

= 5.5 سم

مثال 2:

أوجد الزاوية المركزية في دائرة طول نصف قطرها 9 سم تقابل قوسًا طوله 11 سم . (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)



الحل

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{\text{طول القوس}}{2\pi \text{ نق}}$$

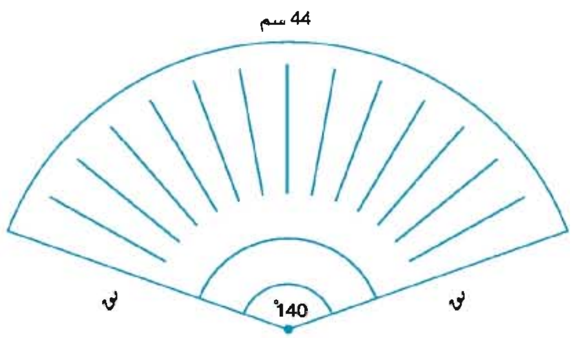
الزاوية المقابلة للقوس، $\theta = \frac{11}{2 \times \frac{22}{7} \times 9} \times 360^\circ$

$= \frac{11}{2 \times 9} \times \frac{7}{22} \times 360^\circ$

$= 70^\circ$

مثال 3:

أرادت سلوى عمل مروحة ورقيــة جميلة على شكل قوس طوله 44 سم تقابله زاوية مركزية 140°، فما طول نصف قطر المروحة ؟ (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)



الحـــل

$$\frac{\text{طول القوس}}{2\,\pi\,\text{نق}} = \frac{\theta}{360^\circ}$$

$$\frac{44}{2\,\pi\,\text{نق}} = \frac{140^\circ}{360^\circ}$$

$$\frac{2\,\pi\,\text{نق}}{44} = \frac{360^\circ}{140^\circ}$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times \text{نق} = \frac{360}{140} \times 44$$

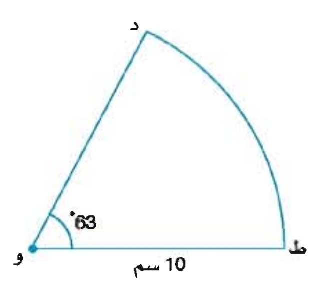
$$\text{نق} = \frac{360}{140} \times 44 \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{2}$$

$$= 18 \text{ سم}$$

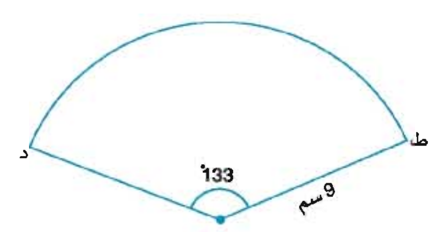
تمرين 5 أ

1- معتبرًا ($\pi = \frac{22}{7}$)، احسب طول القوس د ط في كل من أجزاء الدائرة التي مركزها و.

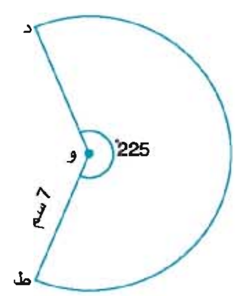
(أ)



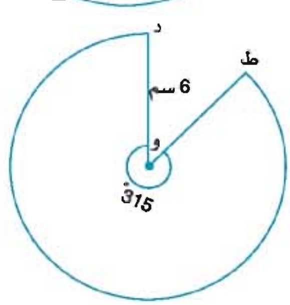
(ب)



(جـ)

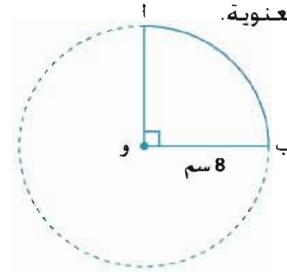


(د)

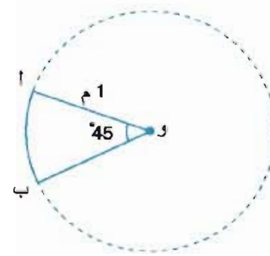


2- أوجد طول القوس أ ب في كل من الدوائر الآتية التي مركزها (و). (اعتبر π = 3.14) ثم أعط إجابتك مقربة إلى ثلاثة أرقام معنوية.

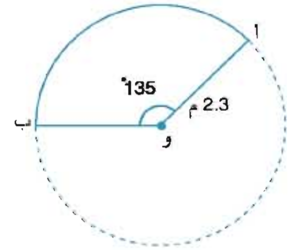
(أ)



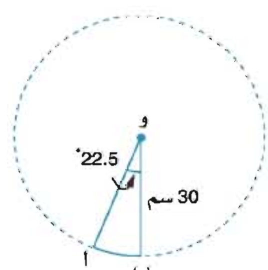
(ب)



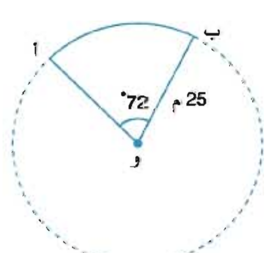
(جـ)



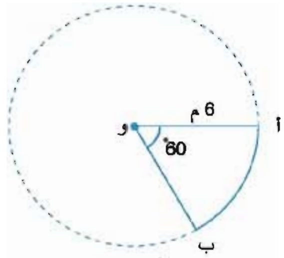
(د)



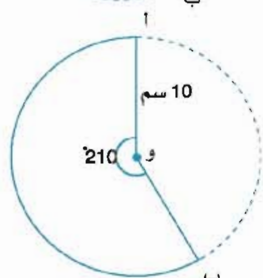
(هـ)



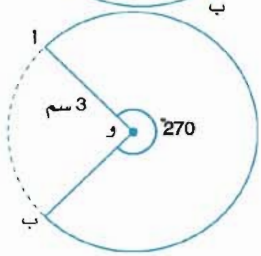
(و)



(ز)



(ح)



3- دائرة طول نصف قطرها 9 سم، أوجد الزاوية المركزية التي تقابل الأقواس التي أطوالها معطاة فيما يلي (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$).

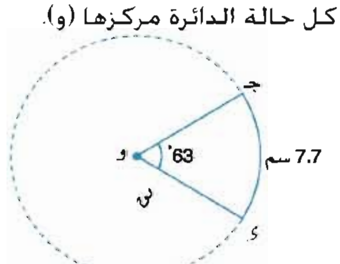
(أ) 11 سم (ب) 27.5 سم

(جـ) 38.5 سم (د) 44 سم

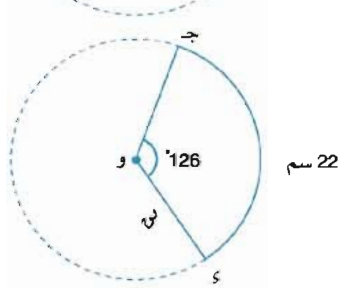
(هـ) 49.5 سم (و) 5.5 سم

4- معتبرًا ($\pi = \frac{22}{7}$)، أوجد طول نصف قطر كل من الدوائر التي قوسها حـ ء يقابل الزاوية المركزية المبينة. في كل حالة الدائرة مركزها (و).

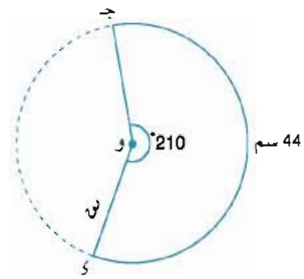
(أ)



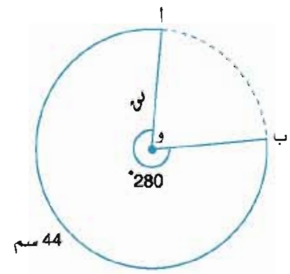
(ب)



(جـ)



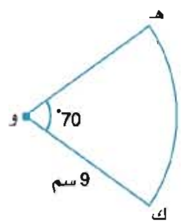
(د)



5- (أ) أوجد طول الجانب المنحني للمنقلة النصف دائرية التي طول قطرها 10.5 سم (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)
(ب) ثم أوجد محيط المنقلة.

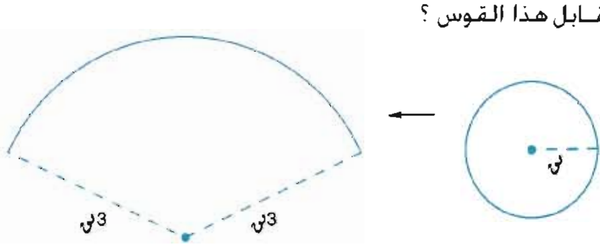
6- (أ) أوجد طول قوس ربع دائرة طول نصف قطرها 12.6 سم (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$).
(ب) ثم أوجد محيط ربع الدائرة.

7- (أ) معتبرًا ($\pi = \frac{22}{7}$)، أوجد طول القوس هـ ك المبين في الشكل.



(ب) أوجد محيط الشكل.

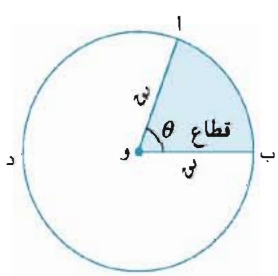
8- سلك دائري طول نصف قطره (ى) سم حول إلى قوس طول نصف قطره (3ى) سم، ما الزاوية المركزية التي تقابل هذا القوس ؟



9- عقرب دقيقة ساعة اليد طوله 21 سم. فما المسافة التي يتحركها طرف العقرب في 20 دقيقة؟ (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)

2-5 مساحة القطاع الدائري Area of a Sector

القطاع الدائري جزء من سطح دائرة محصور بين أي نصفي قطري دائرة. القطاع المظلل في الشكل أ و ب يسمى **القطاع الأصغر** بينما الجزء غير المظلل د أ و ب يسمى **القطاع الأكبر**.

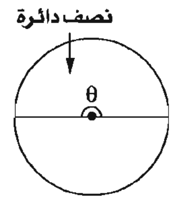
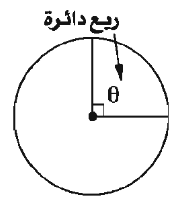
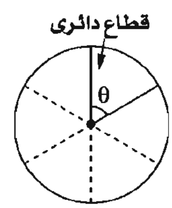
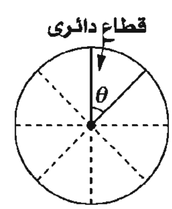


دعنا ندرس النسب التالية:

(أ) $\frac{\theta}{360°}$

(ب) $\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}}$

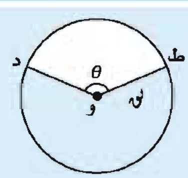
ملحوظة:
نذكر أننا تعلمنا في الكتاب السابق مساحة الدائرة التي طول نصف قطرها ى وتعطى بالعلاقة
المساحة = π ى^2

	θ	$\frac{\theta}{360°}$	$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}}$
	$180°$	$\frac{1}{2} = \frac{180°}{360°}$	$\frac{1}{2}$
	$90°$	$\frac{1}{4} = \frac{90°}{360°}$	$\frac{1}{4}$
	$60°$	$\frac{1}{6} = \frac{60°}{360°}$	$\frac{1}{6}$
	$45°$	$\frac{1}{8} = \frac{45°}{360°}$	$\frac{1}{8}$

ومن ثم يمكن التعميم بالاستقراء:

التعميم بالاستقراء

$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري د و ط}}{\pi \, \text{نق}^2} = \frac{\theta}{360°}$$

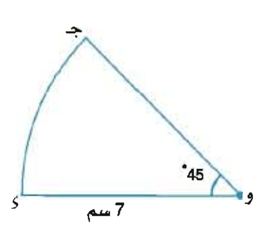


حيث نق : طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و .

مثال 4:

أوجد مساحة القطاع الدائري جـ و ى .

معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$



الحــل

$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري ح و ى}}{\pi\ \text{نق}^2} = \frac{45^\circ}{360^\circ}$$

$$\therefore \text{مساحة القطاع الدائري ح و ى} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$$= \frac{77}{4} = 19.25\ \text{كم}^2$$

مثال 5:

إذا كان قطاع في دائرة طول نصف قطرها 9 كم مساحته 99 كم^2، أوجد الزاوية المقابلة عند مركز الدائرة. (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$) .

الحــل

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري د و ط}}{\pi\ \text{نق}^2}$$

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{99}{9 \times 9 \times \frac{22}{7}}$$

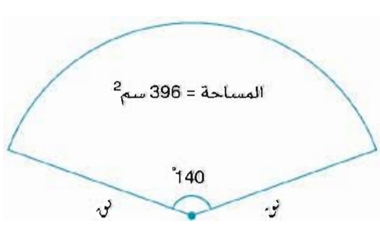
$$\theta = \frac{99}{9 \times 9} \times \frac{7}{22} \times 360^\circ$$

$$\therefore \text{الزاوية المقابلة، } \theta = 140^\circ$$

مثال 6:

المسحة على الزجاج الأمامي لسيارة لعبة كهربية تمسح بزاوية 140° مكونة قطاعاً دائرياً مساحته 396 كم^2. معتبرًا ($\pi = \frac{22}{7}$) احسب طول نصف قطر القطاع.

الحــل



$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\ \text{نق}^2} = \frac{140^\circ}{360^\circ}$$

$$\frac{396}{\pi\ \text{نق}^2} = \frac{140^\circ}{360^\circ}$$

$$\frac{\pi\ \text{نق}^2}{396} = \frac{360^\circ}{140^\circ}$$

$$\frac{22}{7} \times \text{نق}^2 = \frac{360^\circ}{140^\circ} \times 396$$

$$\text{نق}^2 = 324$$

$$\text{نق} = \sqrt{324}$$

$$= 18\ \text{كم}$$

مثال 7:

مساحة قطاع طول نصف قطره 18 سم هي 198 سم^2، احسب طول القوس في القطاع.

$$\frac{\text{طول القوس}}{2\pi\,\text{نق}} = \frac{\theta}{360^\circ} \quad \text{.......... (1)}$$

$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\,\text{نق}^2} = \frac{\theta}{360^\circ} \quad \text{.......... (2)}$$

من (1)، (2) نجد أن

$$\frac{\text{طول القوس}}{2\pi\,\text{نق}} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\,\text{نق}^2} \quad \text{.......... (3)}$$

المعادلة (3) مفيدة عندما يكون طول القوس مطلوب وتُعطى المساحة للقطاع والعكس صحيح. طول نصف قطر الدائرة نق يجب بالطبع أن يُعطى أيضًا.

الحل

$$\frac{\text{طول القوس}}{2\pi\,\text{نق}} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\,\text{نق}^2}$$

$$\frac{\text{طول القوس}}{2\pi \times 18} = \frac{198}{\pi \times 18 \times 18}$$

$$\text{طول القوس} = \frac{198}{\pi \times 18 \times 18} \times 2\pi \times 18$$

$$= 22 \text{ سم}$$

مثال 8:

قطاع دائري طول نصف قطره 8 سم، طول قوسه 22 سم، احسب مساحة القطاع الدائري.

الحل

$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\,\text{نق}^2} = \frac{\text{طول القوس}}{2\pi\,\text{نق}}$$

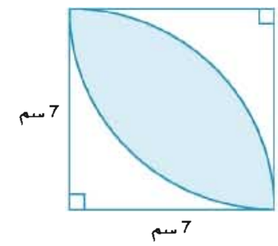
$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi \times 8 \times 8} = \frac{22}{2 \times \pi \times 8}$$

$$\text{مساحة القطاع} = \frac{22}{2 \times \pi \times 8} \times \pi \times 8 \times 8$$

$$= 88 \text{ سم}^2$$

مثال 9:

يعرض الشكل ربعين متساويين من دائرة طول نصف قطرها 7 سم تراكبا في المنطقة المظللة. (معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$)، أوجد مساحة المنطقة المظللة.



حل المشكلات

الحل

استراتيجية الحل: حِلّ جزءًا من المشكلة عن طريق تبسيطها. حل لربع وحيد كما هو مبين.

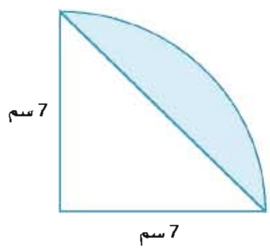
نصف مساحة المنطقة المظللة في ربع واحد

= مساحة الربع − مساحة المثلث

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 7^2 - \frac{1}{2} \times 7 \times 7$

$= \frac{77}{2} - \frac{49}{2} = \frac{28}{2} = 14$ سم²

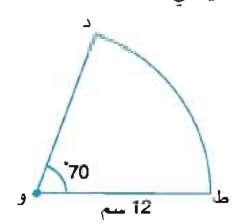
∴ المساحة المطلوبة = 2 × 14 = 28 سم²



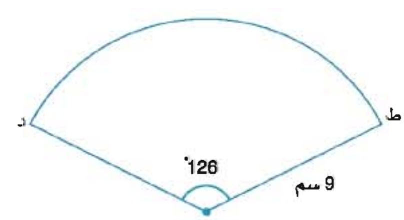
تمرين 5ب

1- معتبرًا ($\pi = \frac{22}{7}$)، احسب مساحة القطاع الدائري د و ط في كل مما يأتي:

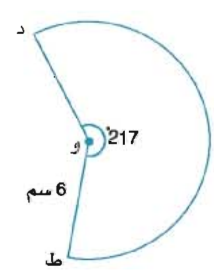
(أ)



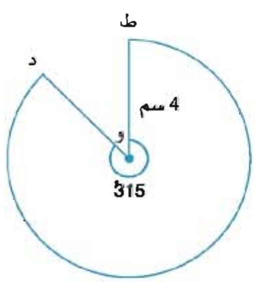
(ب)



(جـ)

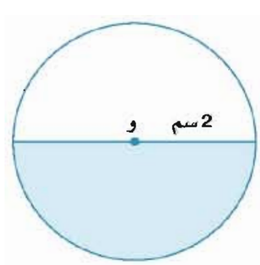


(د)

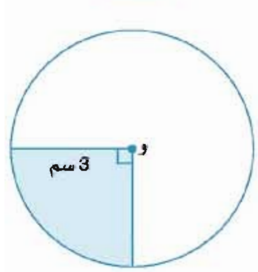


2- أوجد مساحة المنطقة المظللة في كل مما يأتي، معتبرًا $\pi = 3.14$، وأعط إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

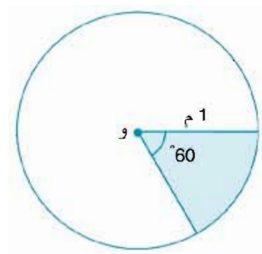
(أ)



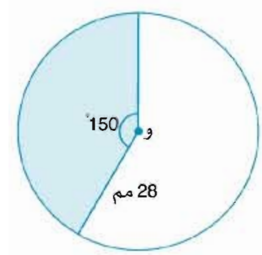
(ب)



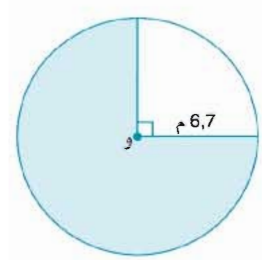
(جـ)



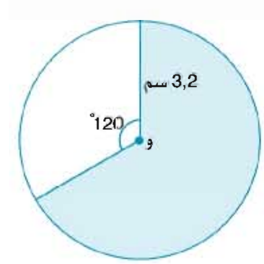
(د)



(هـ)



(و)



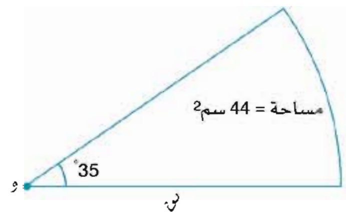
3- طول نصف قطر كل من القطاعات الدائرية الآتية والمعطاة مساحتها هو 12 سم. أوجد الزاوية المركزية التي تقابل قوس القطاع في كل حالة (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)

(أ) 44 سم^2 (ب) 132 سم^2

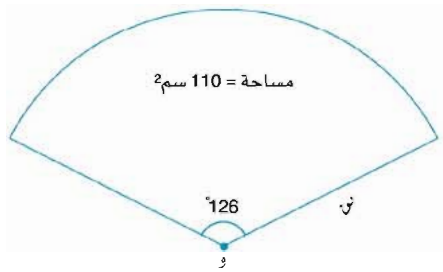
(جـ) 308 سم^2 (د) 352 سم^2

4- معتبرًا ($\pi = \frac{22}{7}$)، أوجد طول نصف قطر كل من القطاعات الدائرية المعطاة مساحتها.

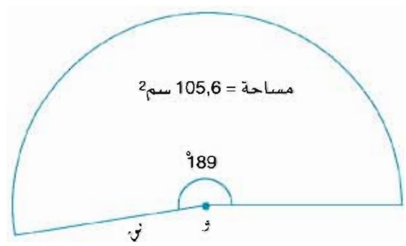
(أ)



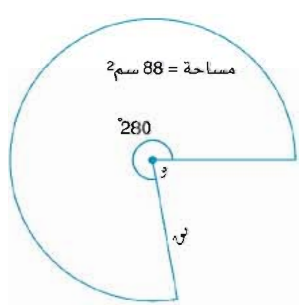
(ب)



(جـ)



(د)



5- في كل من القطاعات الدائرية من (أ) إلى (و) اعتبر طول نصف القطر = نق ثم احسب القيم المفقودة.

	نق	مساحة القطاع	طول القوس
أ	14 سم	280 سم^2	
ب	12 سم	96 سم^2	
جـ	11 سم		24 سم
د	9 سم		40 سم
هـ		108 سم^2	36 سم
و		10 سم^2	5 سم

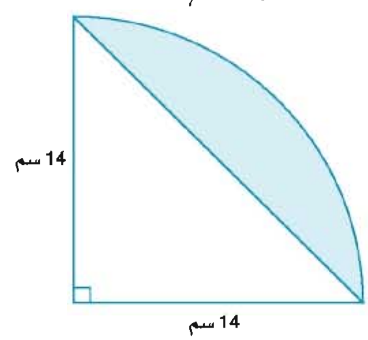
6- معتبرًا ($\pi = \frac{22}{7}$)، أوجد مساحة نصف الدائرة التي نصف قطرها 4.2 سم.

7- معتبرًا ($\pi = 3.14$) أوجد مساحة ربع الدائرة التي طول نصف قطرها 47 سم. مقربًا إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

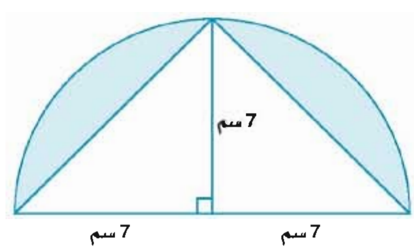
8- أوجد المساحة التي يغطيها عقرب الدقائق في ساعة يد خلال 40 دقيقة إذا كان طول العقرب 6.3 سم (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$).

9- احسب مساحة المنطقة المظللة في كل من الأشكال التالية (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$).

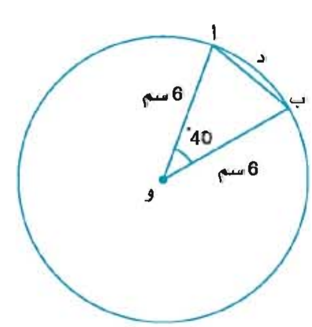
(أ)



(ب)



-10

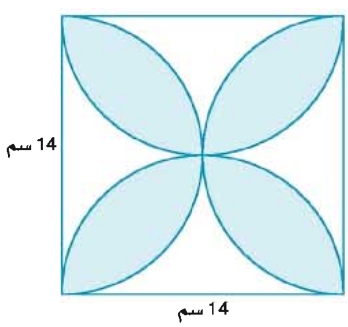


أ ب وتر في دائرة مركزها و ، نصف قطرها 6 سم. فإذا كانت $\angle$ أ و ب = 40° ومعتبرًا ($\pi = 3.14$) احسب لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

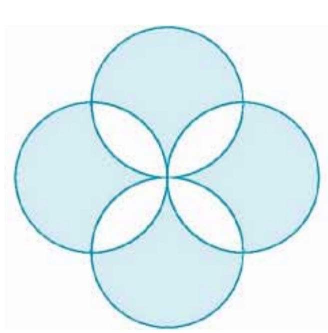
(أ) طول القوس أ د ب.

(ب) مساحة القطاع الدائري و أ د ب.

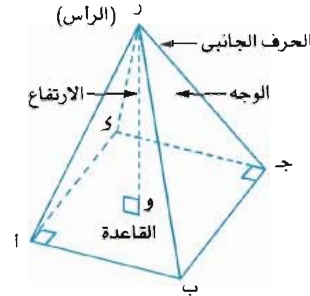
11- في الشكل المرسوم أربعة أنصاف دوائر متطابقة، طول قطر كل منها 14 سم تراكبت داخل المربع كما هو مبين، معتبرًا ($\pi = \frac{22}{7}$)، أوجد مساحة المنطقة المظللة.



12- أربع دوائر متساوية طول نصف قطر كل منها 7 سم تراكبت بحيث تقابلت محيطاتها عند نقطة واحدة كما هو مبين، احسب مساحة المنطقة المظللة. ($\pi = \frac{22}{7}$)

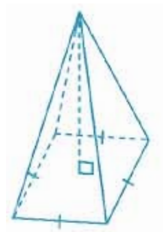


3-5 الأهرامات Pyramids

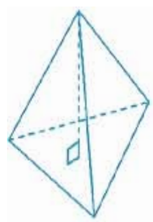


الشكل المرسوم إلى اليمين هو **هرم قاعدته** مستطيلة الشكل أ ب حـ ء، **كل** ركن من أركان القاعدة موصول بخط يعرف **بالحرف الجانبي** إلى نقطة مشتركة فوق القاعدة تسمى **رأس الهرم** (ر). **الهرم القائم** هو الذي يقع ارتفاعه العمودي من الرأس عند مركز القاعدة. ليس من الضروري أن تكون قاعدة الهرم**مستطيلة**. فيمكن أن تكون أي مضلع ويسمى الهرم طبقًا **لشكل قاعدته** وعدد أضلاعها كما هو مبين بالرسم.

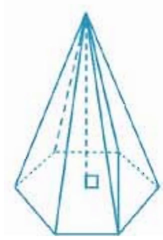
هرم رباعي



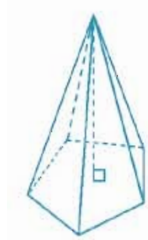
هرم ثلاثي



هرم سداسي

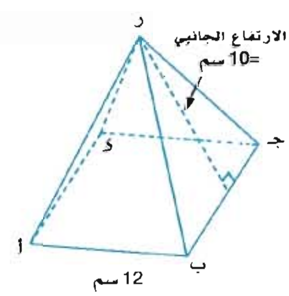


هرم خماسي



لاحظ أن الأوجه الجانبية للهرم دائمًا مثلثة الشكل.

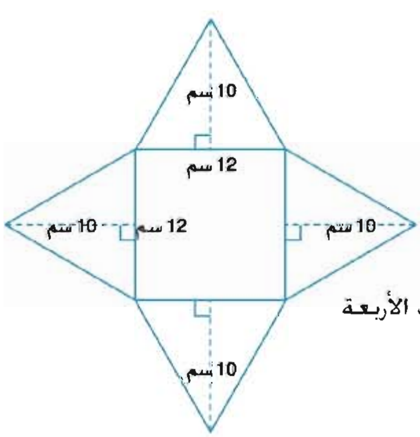
1-3-5 مساحة سطح الهرم Surface Area of a Pyramid



مثال 10:

ر أ ب حـ ء هرم رباعي قاعدته على شكل مربع طول ضلعه 12 سم. فإذا كان الارتفاع الجانبي للوجه المثلث هو 10 سم، أوجد إجمالي المساحة السطحية لهذا الهرم.

الحل



شبكة الهرم الرباعي هي مربع وأربعة مثلثات متساوية الساقين.

المساحة السطحية للهرم

= مساحة القاعدة + مساحة المثلثات الأربعة

$= 12 \times 12 + 4\ (10 \times 12 \times \frac{1}{2})$

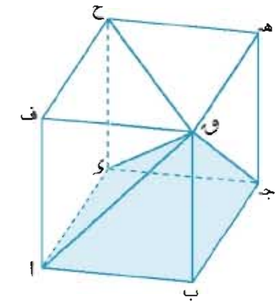
$= 144 + 240$

$= 384$ سم^2

ملحوظة

الارتفاع الجانبي هو ارتفاع الوجه الجانبي.

2-3-5 حجم الهرم Volume of a Pyramid

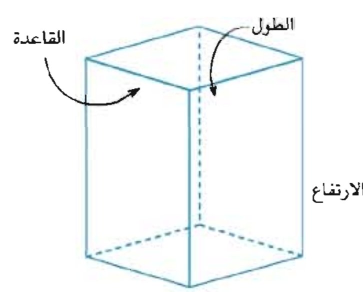


يوضح الشكل المرسوم أن المكعب مكون من ثلاثة أهرامات متساوية ومشتركة في الرأسن . قواعد هذه الأهرامات هي أ ب حـ ء ، حـ ء ح هـ ، ء ح ف أ وارتفاعاتها المتناظرة هي (ب ن)، (هـ ن)، (ف ن) ولهذا نحصل على.

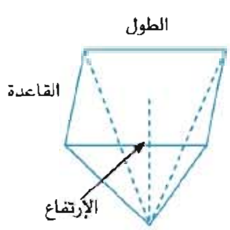
> **حجم الأهرامات الثلاثة = حجم المكعب**
> 3 × حجم الهرم = م × ع
> حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ م ع
> حيث م = مساحة مقطع **المكعب** (مساحة القاعدة) وحيث ع = الارتفاع.

ومن خلال التجارب يمكن أيضًا بيان أن حجم الهرم يساوي $\frac{1}{3}$ حجم **المنشور** المشترك معه في القاعدة، وارتفاعه يساوي ارتفاع الهرم.

افترض أننا أردنا ملء الخزان مستطيل الشكل (أدناه) بالماء، ستجد أنه علينا ملء وعاء الماء ثلاث مرات. الوعاء على شكل هرم مستطيل، وقاعدته، وارتفاعه نفس قاعدة، وارتفاع الخزان المكعب الشكل بالتالي فإن الوعاء حجمه = $\frac{1}{3}$ حجم الخزان.



خزان



وعاء ماء

يمكن تكرار ذلك بالنسبة للهرم بقواعده المختلفة، ولكن يبقى حجمه دائمًا $\frac{1}{3}$ حجم المنشور الذي له نفس قاعدة ونفس ارتفاع الهرم.

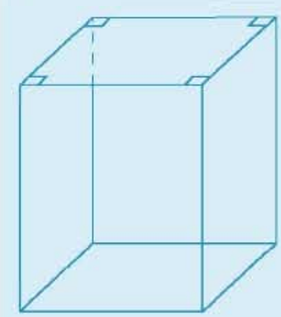
ولهذا فإن

> **حجم الهرم** = $\frac{1}{3}$ م ع
> حيث م مساحة قاعدة الهرم وحيث ع ارتفاع الهرم.

ملحوظة

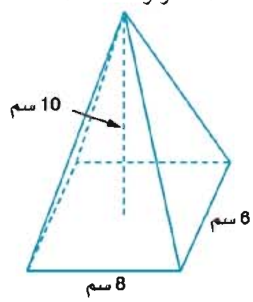
المنشور هو شكل ثلاثي الأبعاد له مقاطع منطابقة ويمكن تقطيع الشكل إلى مستويات متوازية بحيث نحصل على أوجه متطابقة في الشكل والحجم.

متوازي المستطيلات هو منشور مستطيل الشكل.



مثال 11:

أوجد حجم الهرم المستطيل إذا كانت قاعدته 6 سم × 8 سم وارتفاعه 10 سم.



الحل

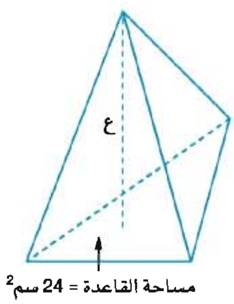
حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ م ع

= $\frac{1}{3} \times (6 \times 8) \times 10$

= 160 سم^3

مثال 12:

أوجد ارتفاع الهرم المثلث (ويعرف أيضًا باسم الهرم الرباعي السطوح المثلثية) إذا كان حجمه 80 سم^3، ومساحة قاعدته 24 سم^2.



الحل

حجم الهرم المثلث = 80 سم^3

$\frac{1}{3}$ م ع = 80

$\frac{1}{3} \times 24 \times$ ع = 80

∴ ع = $\frac{3 \times 80}{24}$ = 10 سم

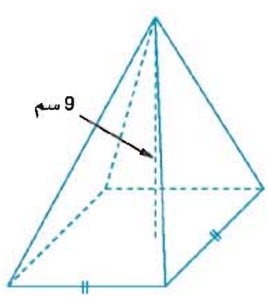
مثال 13:

هرم مربع ارتفاعه 9 سم وحجمه 108 سم^3، احسب

(أ) مساحة قاعدته.

(ب) طول كل جانب من جوانب القاعدة

الحل



(أ) حجم الهرم = 108 سم^3

$\frac{1}{3}$ م ع = 108 سم^3

$\frac{1}{3} \times$ م $\times 9 = 108$ سم^3

∴ مساحة القاعدة (م) = $\frac{3 \times 108}{9}$

= 36 سم^2

(ب) بما أن القاعدة مربعة

ل^2 = 36

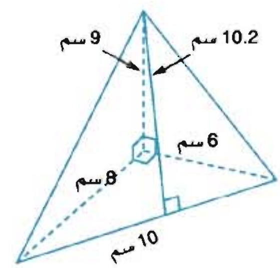
∴ طول الضلع (ل) = $\sqrt{36}$

= 6 سم

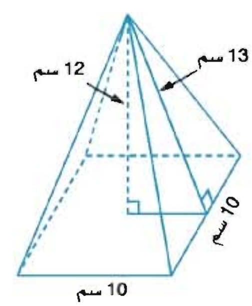
تمرين 5جـ

1- بالنسبة للأهرامات المصمتة الآتية ارسم الشبكة ثم احسب المساحة السطحية الكلية.

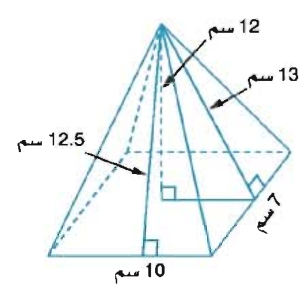
(أ)



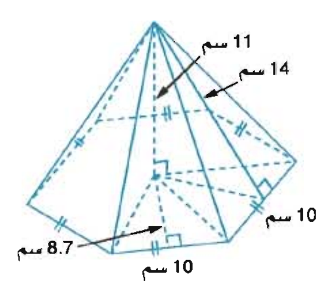
(ب)



(جـ)



(د)



2- أوجد حجم الأجسام المصمتة في السؤال الأول.

3- أوجد ارتفاع كل من الأهرامات التالية:

(أ) الحجم 72 سم³، مساحة القاعدة 36 سم²

(ب) الحجم 168 سم³، مساحة القاعدة 63 سم²

(جـ) الحجم 396 سم³، مساحة القاعدة 99 سم²

4- بالنسبة للأهرامات المربعة التالية :

(i) أحسب مساحة القاعدة.

(ii) ثم أوجد طول ضلع القاعدة.

(أ) الحجم 98 سم³، الارتفاع 6 سم.

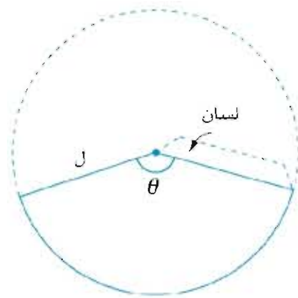
(ب) الحجم 216 سم³، الارتفاع 8 سم.

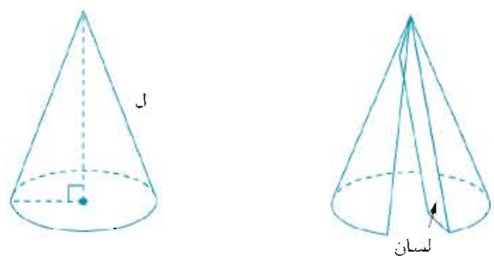
(جـ) الحجم 676 سم³، الارتفاع 12 سم.

5- احسب القيم الناقصة في الجدول التالي للأهرامات من (أ) إلى (ح) والتي لها طول (ل) العرض (العمق) (ض) مساحة القاعدة (م)، الارتفاع (ع) الحجم (ح).

	ض	ل	م	ع	ح
أ	5 سم	6 سم		7 سم	
ب	1.2 م	3 م		4 م	
جـ	8 سم	9 سم			144 سم³
د	3.4 م	5 م			34 م³
هـ	6 سم			8 سم	112 سم³
و	5 م			6 م	67 م³
ز		8 سم		9 سم	168 سم³
ح	4 م			5 م	52 م³

4-5 المخروط Cone

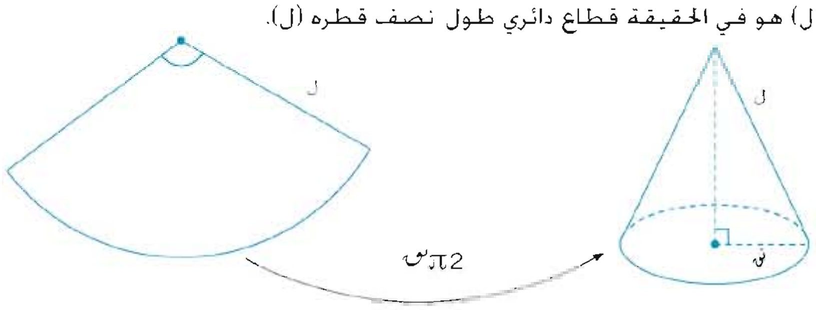




ارسم دائرة طول نصف قطرها (ل) سم على أي ورقة رسم. قص منها قطاعًا دائريًا بأي زاوية θ لها لسان عند أحد أطرافها المستقيمة. بعد ذلك اثنِ القطاع والصق الحرفين الجانبيين معًا باستخدام اللسان. الشكل المكون يسمى **مخروطًا** حيث (ل) يعرف باسم الراسم (الارتفاع الجانبي المائل).

1-4-5 مساحة السطح المنحنى للمخروط Area of the Curved Surface of a cone

لاحظت من النشاط السابق أن السطح المنحنى للمخروط الذي راسمه (ل) هو في الحقيقة قطاع دائري طول نصف قطره (ل).



فإذا كانت القاعدة الدائرية للمخروط طول نصف قطرها نق . فإن محيط الدائرة = 2π نق ، وهو طول قوس القطاع الدائري. من الملاحظة الموجودة في مثال 7، نحصل على:

$$\frac{\text{مساحة القطاع الذي طول نصف قطره ل}}{\text{مساحة الدائرة التي طول نصف قطرها ل}} = \frac{\text{طول قوس القطاع الدائري الذي طول نصف قطره ل}}{\text{محيط الدائرة التي طول نصف قطرها ل}}$$

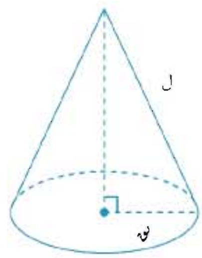
$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\,\text{ل}^2} = \frac{2\pi\,\text{نق}}{2\pi\,\text{ل}}$$

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{2\pi\,\text{نق}}{2\pi\,\text{ل}} \times \pi\,\text{ل}^2$$

$$= \pi\,\text{نق}\,\text{ل}$$

بما أن مساحة القطاع الدائري هي نفسها مساحة السطح المنحنى للمخروط فإننا نحصل على:

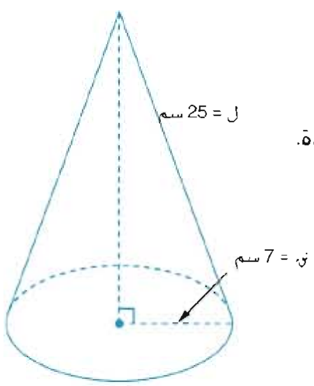
مساحة السطح المنحنى للمخروط = π نق ل
حيث نق طول نصف قطر القاعدة، ل : راسم المخروط.



مثال 14:

أوجد مساحة السطح الكلية لمخروط مصمت طول نصف قطر قاعدته 7 سم، راسمه 25 سم (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)

الحل

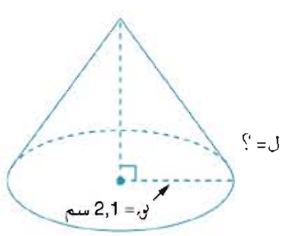


المساحة السطحية للمخروط
= مساحة السطح المنحنى + مساحة القاعدة.
= π نق ل + π نق^2
= π نق (ل + نق)
= $\frac{22}{7} \times 7 \times (25 + 7)$
= $\frac{22}{7} \times 7 \times 32$
= 704 سم^2

مثال 15:

أوجد طول الراسم لمخروط مساحة سطحه المنحنى 19.14 سم^2 وطول نصف قطر قاعدته 2.1 سم ($\pi = \frac{22}{7}$).

الحل



مساحة السطح المنحنى = 19.14 سم^2

π نق ل = 19.14

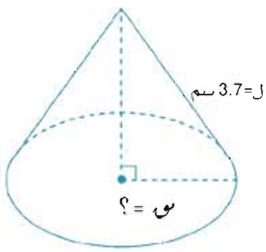
$\frac{22}{7} \times 2.1 \times$ ل = 19.14

∴ طول الراسم (ل) = $19.14 \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{2.1}$

= 2.9 سم

مثال 16:

أوجد مساحة قاعدة مخروط مساحة سطحه المنحنى 40.7 $سم^2$ وراسمه 3.7 سم. (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)



الحل

مساحة السطح المنحني للمخروط = 40.7 $سم^2$

π نق ل = 40.7 $سم^2$

$\frac{22}{7}$ × نق × 3.7 = 40.7 $سم^2$

∴ نق = 40.7 × $\frac{7}{22}$ × $\frac{1}{3.7}$

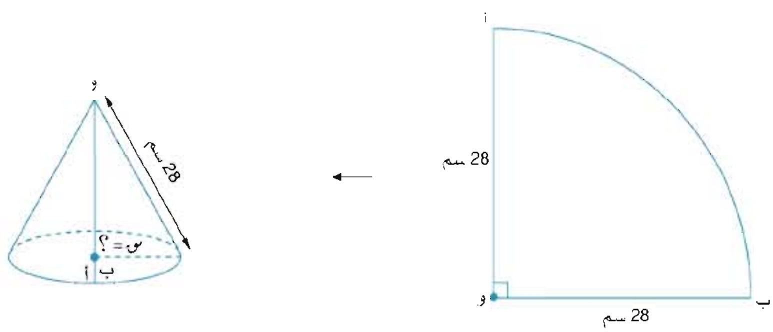
= 3.5 سم

∴ مساحة قاعدة المخروط = π نق^2

= $\frac{22}{7}$ × 3.5 × 3.5 = 38.5 $سم^2$

مثال 17:

الشكل الموضح لربع دائرة نصف قطرها 28 سم، فما طول نصف قطر قاعدة المخروط الذي يمكن تكوينه من القوس أب ؟



الحل

إستراتيجية الحل هي إيجاد علاقة بين محيط قاعدة المخروط وبين طول القوس أ ب. بما أن المحيط يتكون من القوس.

محيط القاعدة الدائرية للمخروط = طول القوس أ ب .

2 π نق = $\frac{1}{4}$ × 2 π × (28)

نق = $\frac{\frac{1}{4} \times \cancel{2\pi} \times (28)}{\cancel{2\pi}}$

نق = $\frac{1}{4}$ × 28

= 7 سم

ملحوظة

لا تعوض عن قيمة π حيث يتم اختزالها فيما بعد.

تمرين 5د

1- معتبرًا ($\pi = \frac{22}{7}$)، أوجد مساحة السطح المنحنى لكل من المخروطات التالية إذا كان :

(أ) طول نصف القطر = 7 سم
الراسم = 7.4 سم

(ب) طول القطر = 8.4 سم
الراسم = 5.8 سم

(جـ) طول نصف القطر = 7 م
الراسم = 25 م

2- معتبرًا (π= 3.14)، أوجد مساحة السطح الكلية للمخروطات المصمتة التالية موضحًا إجابتك مقربة إلى ثلاثة أرقام معنوية.

(أ) نصف القطر = 4 سم
الراسم = 5 سم

(ب) القطر = 10 سم
الراسم = 13 سم

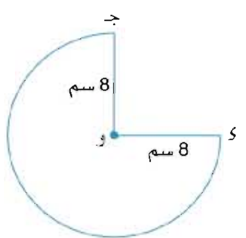
(جـ) نصف القطر = 4 م
الراسم = 4.1 م

3- معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$، أوجد مساحة السطح المنحنى لمخروط مثلج الذي طول قطره 3.5 سم وارتفاعه الجانبي 10 سم.

4- معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$، احسب القيم الناقصة في الجدول التالي. بالنسبة لكل من المخروطات من (أ) وحتى (ح) التي لها الراسم ل. طول نصف قطر القاعدة نق.

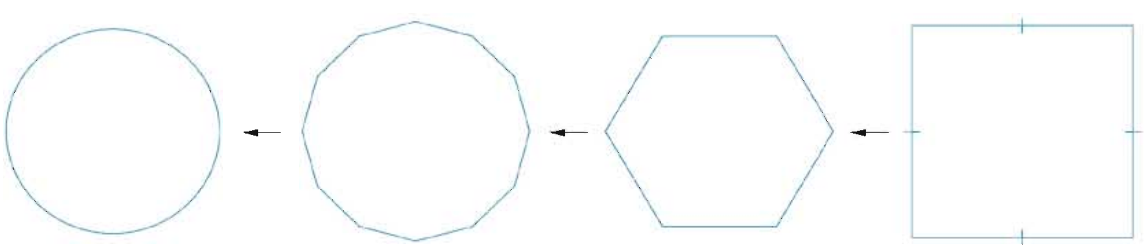
	ل	نق	مساحة القاعدة	مساحة السطح المنحنى
أ	7 سم	4.2 سم		
ب	11.2 م	10.5 م		
جـ		7 م		550 م^2
د		35 سم		4070 سم^2
هـ	29 سم			1914 سم^2
و	3.5 م			30.8 م^2
ز	14.8 م		616 م^2	
ح	12.5 سم		38.5 سم^2	

5- الشكل الموضح لثلاثة أرباع دائرة نصف قطرها 8 سم، فما طول نصف قطر قاعدة المخروط عندما ينطبق حـ و، ى و؟

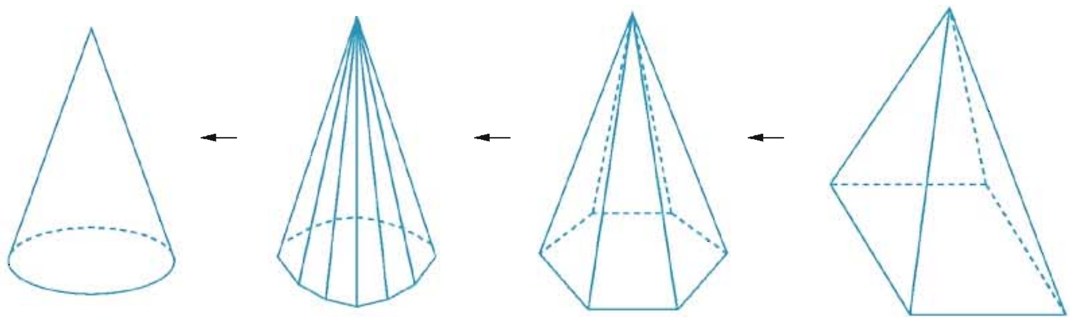


2-4-5 حجم المخروط Volume of a Cone

يمكن اعتبار **الدائرة** نتيجة لتتابع مضلعات منتظمة تتزايد عدد أضلاعها.



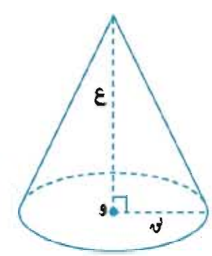
وبالمثل يمكن اعتبار المخروط نتيجة لتتابع أهرامات تتزايد عدد أوجهها .



ومن ثم يمكن اعتبار المخروط حالة خاصة من الهرم ولكن بقاعدة دائرية. أي أنه يمكن تطبيق نفس الصيغة الرياضية لحجم الهرم على المخروط.

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

باعتبار أن القاعدة هي دائرة فإن مساحة القاعدة الدائرية = π نق^2



ولهذا فإن

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

حيث نق : نصف قطر قاعدة المخروط. ع : ارتفاع المخروط.

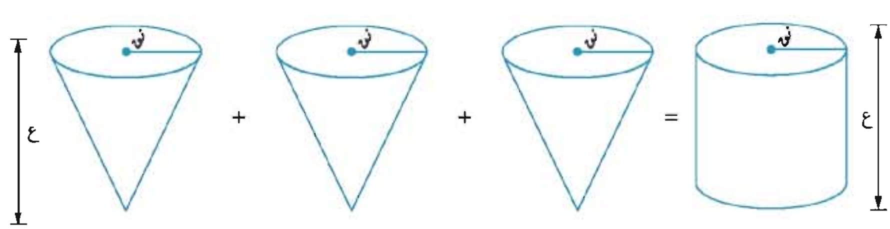
والآن فإن حجم الأسطوانة = π نق^2 ع

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

= $\frac{1}{3}$ حجم الأسطوانة

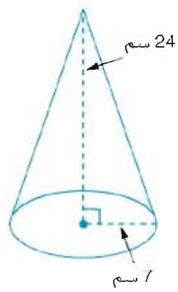
∴ 3 × حجم المخروط = حجم الأسطوانة

وبالمثل يمكن بيان بطريقة تجريبية أن الماء الذي يملأ خزانًا أسطوانيًا سوف يملأ 3 خزانات مخروطية متطابقة طول نصف قطر كل منها يساوي طول نصف قطر الأسطوانة وارتفاع كل منها يساوي ارتفاع الخزان الأسطواني، ومن ثم يمكن القول بأن حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ حجم الأسطوانة التي تشترك معه في طول نصف القطر وفي الارتفاع.



مثال 18:

أوجد حجم مخروط مصمت طول نصف قطر قاعدته 7 سم، وارتفاعه 24 سم.
(اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)



الحل

حجم المخروط $= \frac{1}{3} \pi$ نق^2 ع

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$

$= 1232$ سم^3

مثال 19:

أوجد ارتفاع المخروط الذي طول نصف قطر قاعدته 21 سم، وحجمه $= 8820\pi$ سم^3.

الحل

حجم المخروط $= 8820\pi$ سم^3

$\frac{1}{3} \pi$ نق^2 ع $= 8820\pi$

$\frac{1}{3} \times \pi \times 21 \times 21 \times$ ع $= 8820\pi$

$\therefore$ ارتفاع المخروط ع $= 8820\pi \times \frac{3}{1} \times \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{21} \times \frac{1}{21} = 60$ سم

مثال 20:

أوجد طول نصف قطر قاعدة مخروط ارتفاعه 3 سم، وحجمه 12.56 سم^3. اعتبر $\pi = 3.14$

الحل

حجم المخروط $= 12.56$ سم^3

$\therefore \frac{1}{3} \pi$ نق^2 ع $= 12.56$

$\frac{1}{3} \times 3.14 \times$ نق$^2 \times 3 = 12.56$

نق$^2 = \frac{12.56}{3.14} \times \frac{3}{1} \times \frac{1}{3} = 4$

$\therefore$ طول نصف قطر قاعدة المخروط $= \sqrt{4} = 2$ سم

تمرين 5هـ

1- معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$ احسب حجم المخاريط المصمتة الآتية :

(أ) نق = 12 سم، ع = 35 سم

(ب) نق = 4 سم، ع = 4.2 سم

(جـ) طول القطر = 7 م، ع = 1.2 م

2- أوجد ارتفاع كل من المخاريط التالية:

(أ) نق = 7 م
حجمه = 392π م^3

(ب) نق = 4.2 سم
حجمه = 23.52π سم^3

(جـ) طول القطر = 4 م
حجمه = 2.8π م^3

3- معتبرًا $\pi = 3.14$ احسب ارتفاع كل من المخروطات التالية:

(أ) نصف قطره = 4سم، حجمه = 50.24سم^3

(ب) نصف قطره = 2.5م، حجمه = 78.5 م^3

(جـ) قطره = 10سم، حجمه = 314 سم^3

4- أوجد مساحة قاعدة كل من المخروطات الآتية:

(أ) الحجم = 100 سم^3 ، الارتفاع = 10 سم

(ب) الحجم = 12.3 سم^3 ، الارتفاع = 3 سم

(جـ) الحجم = 45.6م^3 ، الارتفاع = 1.2 م

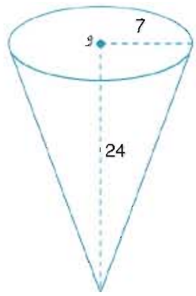
5- اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$ ثم أوجد طول نصف قطر كل من الخاريط التالية:

(أ) الحجم = 10.78 سم^3، الارتفاع = 21 سم

(ب) الحجم = 528 م^3 ، الارتفاع = 14 م

(جـ) الحجم = 6.6 سم^3 ، الارتفاع = 0.7 سم.

6- في هذا السؤال اعتبر ($\pi = \frac{22}{7}$) . مخروط دائري قائم قاعدته دائرة نصف قطرها 7سم، وارتفاعه الرأسي 24سم.



احسب:

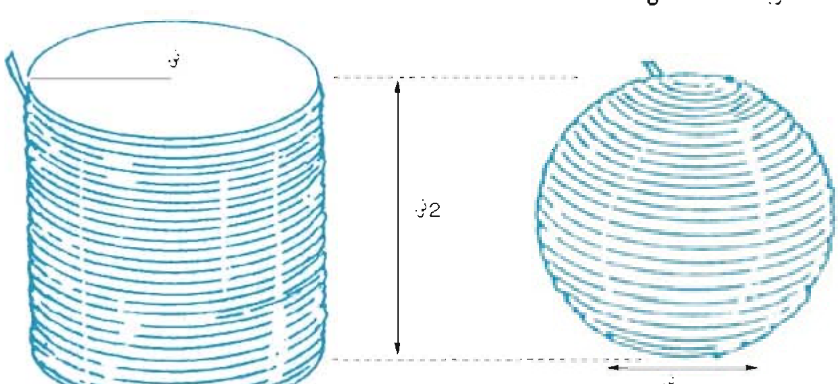
(أ) مساحة قاعدته

(ب) حجم المخروط.

(حجم المخروط الذى طول نصف قطر قاعدته نق وارتفاعه ع هو $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع).

5-5 مساحة سطح الكرة Surface Area of a Sphere

بعض أمثلة الكرات هي الأنواع المختلفة منها المستخدمة في رياضات مثل كرة تنس الطاولة، وكرة التنس، وكرة الأسكواش، وكرة القدم. وبما أن جميع هذه الكرات مفرغة (جوفاء) فإن مساحات أسطحها مهمة، حيث تشير إلى كمية المادة المطلوبة لصناعتها.



يمكن إثبات عمليًّا أن قطعة من الخيط الرفيق ملفوفة حول كرة طول نصف قطرها نق، سوف تلتف أيضًا بالضبط حول السطح المنحنى لأسطوانة لها نفس طول نصف القطر نق وارتفاعها 2نق ولهذا:

مساحة سطح الكرة = مساحة السطح المنحنى للأسطوانة.

= 2 π نق ع [حيث ع الارتفاع].

= 2 π نق (2نق).

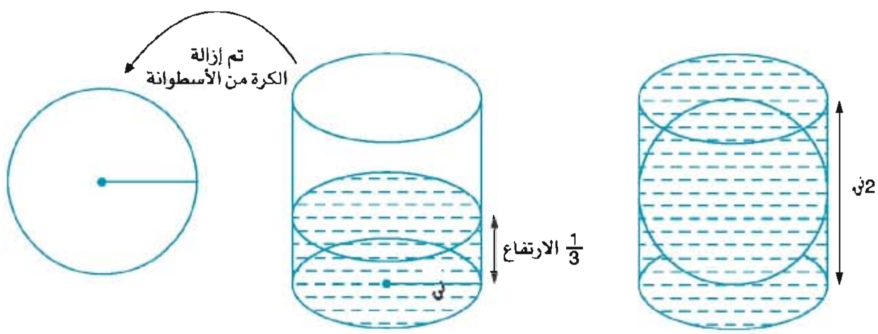
= 4 π نق^2.

ومن ثم نحصل على :

مساحة سطح الكرة = 4π نق^2 حيث نق طول نصف قطر الكرة.

6-5 حجم الكرة Volume of a Sphere

مثال للكرة المصمتة هو كرة الأحمال. لحجم الكرة في هذه الحالة أهمية حيث يحدد كمية الفولاذ المطلوبة في صناعة كرات الأحمال.



(ب) (أ)

وضعت في الشكل (أ) الكرة التي طول نصف قطرها (نق) في أسطوانة لها نفس طول نصف القطر نق وارتفاعها 2نق . ومُلأت الأسطوانة بالماء حتى حافتها. عند إزالة الكرة من الأسطوانة في الشكل (ب) فإن حجم الماء يحتل تمامًا $\frac{1}{3}$ الأسطوانة. يشير ذلك إلى أن الكرة احتلت $\frac{2}{3}$ حجم الأسطوانة. ولهذا فإن:

حجم الكرة = $\frac{2}{3}$ × حجم الأسطوانة.

= $\frac{2}{3} \times \pi$ نق^2 ع [حيث ع ارتفاع الأسطوانة].

= $\frac{2}{3} \times \pi$ نق^2 × 2 نق

= $\frac{4}{3}\pi$ نق^3

ومن ثم فإن

حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi$ نق^3 حيث نق نصف القطر.

مثال 21:

معتبرًا ($\pi = 3.14$)، احسب لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

(أ) مساحة السطح.

(ب) الحجم.

لكرة نصف قطرها 1.5 سم.

الحل

(أ) مساحة سطح الكرة = 4π نق^2

$= 4 \times 3.14 \times 1.5 \times 1.5$

$= 28.26$

= 28.3 سم^2 (مقربًا لأقرب 3 أرقام معنوية)

(ب) حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi$ نق^3

$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 1.5 \times 1.5 \times 1.5$

= 14.13 سم^3

= 14.1 سم^3 (مقربًا لأقرب 3 أرقام معنوية)

ملحوظة

حل لأقرب أربعة أرقام معنوية حين يكون الجواب مطلوب تقريبه لثلاثة أرقام.

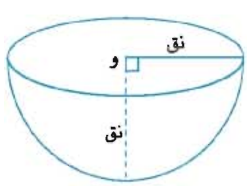
مثال 22:

نصف كرة مجوف ذو سمك يمكن إهماله، حجمه 144π سم^3. احسب:

(أ) طول نصف قطره.

(ب) مساحة سطحه الخارجي (اكتب إجابتك بدلالة π).

الحل



(أ) حجم نصف الكرة = 144π سم^3

$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi$ نق$^3 = 144\pi$.

نق$^3 = 144\pi \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{\pi}$

$= 216$

$\therefore$ طول نصف قطره، نق $= \sqrt[3]{216} = 6$ سم.

(ب) المساحة السطحية لنصف الكرة = $\frac{1}{2} \times 4\pi$ نق^2

$= \frac{1}{2} \times 4\pi \times 6 \times 6$

$= 72\pi$ سم^2

مثال 20:

مساحة سطح كرة يساوي 1386 سم². معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$، احسب:

(أ) طول نصف قطرها. (ب) حجمها.

الحل

(أ) مساحة سطح الكرة = 1386سم²

4π نق² = 1386

$4 \times \frac{22}{7}$ نق² = 1386

$\therefore$ نق² = $1386 \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{22}$

$= 110.25$

$\therefore$ نق = $\sqrt{110.25}$

= 10.5سم

(ب) حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi$ نق³

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 10.5 \times 10.5 \times 10.5$

= 4851 سم³

تمرين 5و

1- معتبرًا $\pi = 3.14$ احسب مقربًا لأقرب ثلاثة أرقام معنوية ما يأتي:

(i) المساحة السطحية.

(ii) الحجم.

لكل من الكرات الآتية:

(أ) نق = 1 سم.

(ب) نق = 14سم.

(جـ) القطر = 14سم.

(د) القطر = 2.5سم.

2- في كل من الكرات الآتية والمعطى حجمها

(أ) الحجم = 288π سم³

(ب) الحجم = 36π سم³

أوجد

(i) نصف القطر

(ii) المساحة السطحية بدلالة π.

3- في كل من الكرات الآتية والمعطى مساحتها السطحية

(أ) المساحة السطحية = 616سم²

(ب) المساحة السطحية = 154 سم².

اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$ وأوجد مقربًا لأقرب وحدة:

(i) طول نصف القطر

(ii) الحجم

4- كرة من الرصاص طول نصف قطرها 6 سم صهرت وحولت إلى 216 قذيفة كروية متساوية.

(أ) احسب حجم كرة الرصاص بدلالة π.

(ب) أوجد طول نصف قطر القذيفة الكروية.

5- قبة على شكل نصف كرة طول قطرها 21 مترًا. معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$ احسب مساحة الزجاج الملون المطلوب لتغطيتها.

6- احسب لأقرب ثلاثة أرقام معنوية حجم الماء في عدد 3 طاسات نصف كروية إذا كان طول القطر الداخلي لكل منها 10سم إذا ملئت حتى حافتها.

(اعتبر $\pi = 3.14$).

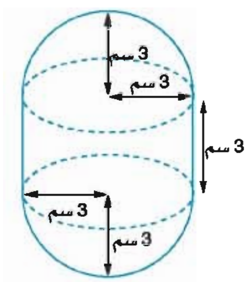
7- معتبرًا $\pi = 3.14$، احسب لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

(i) مساحة السطح الكلية.

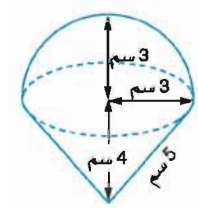
(ii) الحجم.

لكل من الأجسام المصمتة الآتية:

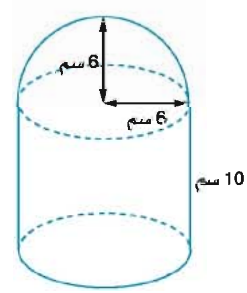
(أ)



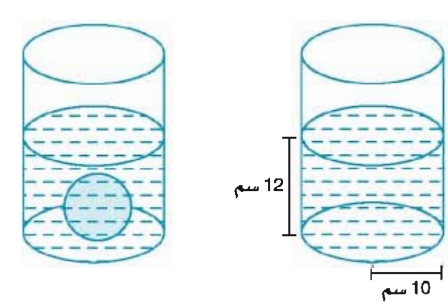
(ب)



(جـ)



8- (أ) استقرت أسطوانة دائرية مفرغة على قاعدة دائرية أفقية طول نصف قطرها 10سم، وتحتوى ماء لعمق 12 سم، أوجد حجم الماء.



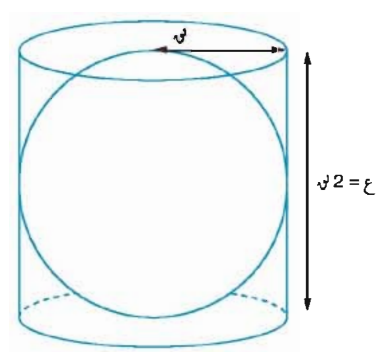
(ب) كرة مصمتة نصف قطرها 5 سم، أوجد حجم الكرة.

(حجم كرة نصف قطرها نق = $\frac{4}{3}\pi$ نق^3).

(جـ) إذا وضعت الكرة داخل الأسطوانة التي بها ماء. أوجد مقدار الزيادة في عمق الماء.

(في هذا السؤال اعتبر $\pi = 3.14$).

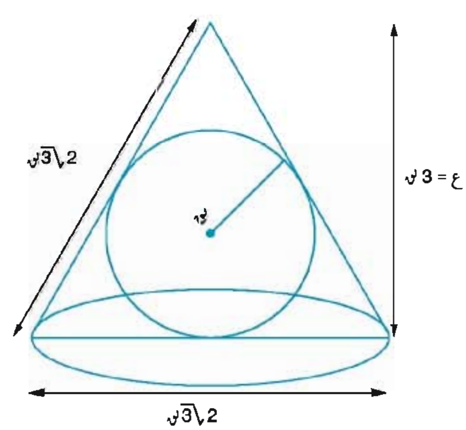
9- أوجد النسبة بين المساحة السطحية لكرة ومساحة السطح الكلية للأسطوانة المحيطة بهذه الكرة، كما هو موضح بالشكل.



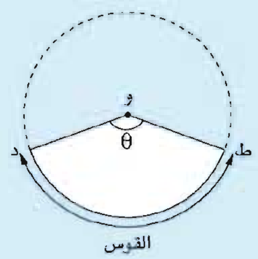
10- يبين الشكل كرة محاطة بمخروط دائري قائم متساوي الأضلاع، أوجد النسب الآتية:

(أ) $\dfrac{\text{مساحة سطح الكرة}}{\text{مساحة السطح الكلية للمخروط}}$

(ب) $\dfrac{\text{حجم الكرة}}{\text{حجم المخروط}}$



ملخص



1- بالنسبة للقطاع الدائري د و ط.

(أ) $\frac{\text{طول القوس د ط}}{2\pi\,\text{نق}} = \frac{\theta}{360^\circ}$

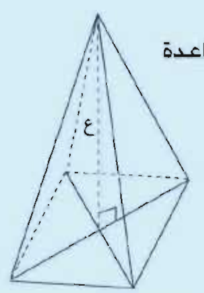
(ب) $\frac{\text{مساحة القطاع د و ط}}{\pi\,\text{نق}^2} = \frac{\theta}{360^\circ}$

(جـ) $\frac{\text{طول القوس د ط}}{2\pi\,\text{نق}} = \frac{\text{مساحة القطاع د و ط}}{\pi\,\text{نق}^2}$

(د) مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ نق ل

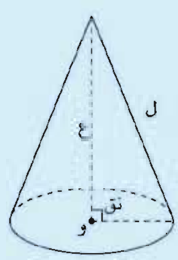
بدلالة نصف القطر والطول

2- بالنسبة للهرم



مساحة سطحه = مجموع مساحة أوجهه + مساحة القاعدة

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ م ع (حيث م مساحة القاعدة)



3- بالنسبة للمخروط.

مساحة السطح المنحنى = π نق ل

مساحة سطحه الكليــة = π نق^2 + π نق ل

حجم المخروط = $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع

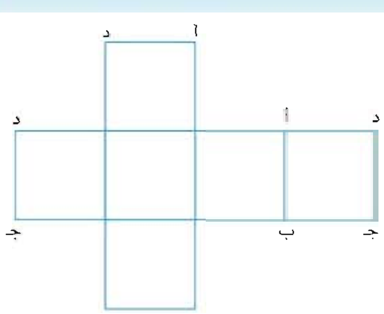
4- بالنسبة للكرة :

مساحة سطح الكرة = 4π نق^2

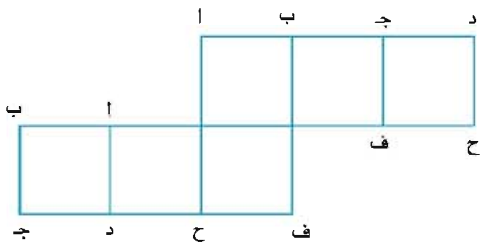
حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi$ نق^3

استقصاء الرياضيات

تذكر شبكة المكعب. إنها تتكون من ستة أوجه وإذا طوينا بطول الخطوط الداخلية للشبكة وزاوجنا النقط ذات الحروف المتطابقة يمكننا تكوين مكعب.



الشكل الثاني هو أيضًا شبكة لمكعب حيث يمكن طيها بطول الخطوط داخل الشبكة لنكون المكعب.



يوجد 11 شبكة مختلفة للمكعب. أوجد التسع شبكات الأخرى للمكعب. حاول استخدام مدخل منهجي لإيجاد الشبكات. يمكن استخدام مقص، ورقة مربعة، لاصق شفاف لتسهيل استقصاءك.

ورقة المراجعة 5

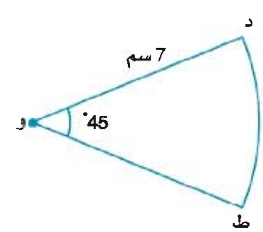
القسم أ

غير مسموح باستخدام الآلة الحاسبة.

1- معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$ احسب :

(أ) طول القوس د ط.

(ب) مساحة القطاع الدائري د و ط.



2- أبعاد 3 مخروطات هي كما يوضحها الجدول التالي.

أوجد القيم الناقصة في الجدول.

	مساحة القاعدة	الارتفاع	الحجم
(أ)	30 سم^2	10سم	
(ب)	40 سم^2		200 سم^3
(جـ)		5 م	3 م^3

3- احسب القيمة الناقصة في الجدول التالي لكل من 3 أهرامات.

	(أ)	(ب)	(حـ)
الطول	5 سم	6م	8سم
العرض	4 سم	6م	
الارتفاع	3 سم		21 سم
الحجم		72 م^3	728 سم^3

4- معتبرًا ($\pi = \frac{22}{7}$) احسب:

(أ) مساحة سطح الكرة التي طول نصف قطرها 7 سم.

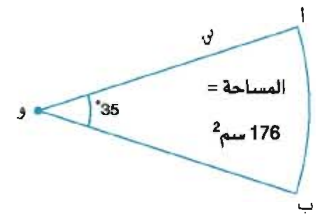
(ب) حجم الكرة التي طول نصف قطرها $10\frac{1}{2}$سم.

القسم ب

غير مسموح باستخدام الآلة الحاسبة.

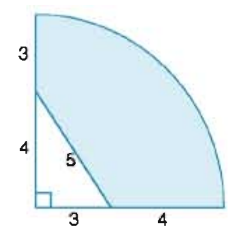
5- معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$ أوجد الزاوية التي تقابل قوس القطاع الدائري الذي مساحته 66 سم^2. ونصف قطره 6 سم.

6- معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$ أوجد طول نصف قطر القطاع الدائري أ و ب.

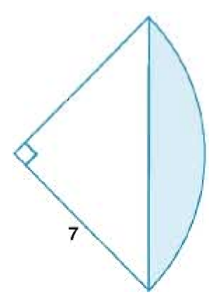


7- معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$ احسب مساحة المنطقة المظللة في كل من الأشكال التالية، الأطوال المعطاة بالسم.

(أ)



(ب)



8- (أ) مساحة السطح المنحنى لمخروط تساوي 220 سم² وطول نصف قطر قاعدته 7 سم.
معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$، احسب الراسم.

(ب) حجم هرم رباعي 196 سم³. فإذا كان ارتفاعه 12سم. احسب:

(i) مساحة قاعدته.

(ii) طول أحد أحرف القاعدة.

القسم جـ

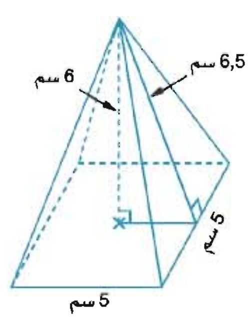
9- قوس من دائرة طوله 7 π سم ونصف قطره 18 سم.

(أ) أوجد الزاوية المركزية التي تقابل القوس.

(ب) احسب مساحة القطاع الدائري معبرًا عن إجابتك بدلالة π.

10- (أ) معتبرًا $\pi = 3.14$، احسب حجم المخروط الذي طول نصف قطره 2.1 سم وارتفاعه 3.4 سم معطيًا إجابتك لأقرب رقم عشري واحد.

(ب) احسب مساحة السطح الكلية للهرم المصمت المرسوم.

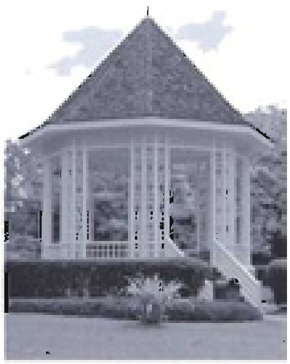


6

المضلعات

Polygons

فن «الفنجشوي» أو فن التنبؤ بالأشكال فن صيني معروف منذ أكثر من 3000 سنة، وهو يبرز أهمية الأشكال في تخطيط المباني. فيفصل الشكل المثمن الأضلاع فقط للمباني الضخمة أو المهمة مثل المعبد السماوي في مدينة بكين. وتفضل في هذا الفن الغرف المربعة أو المستطيلة عن الغرف الخماسية أو الرباعية شبه المنحرفة. وينتشر في الحدائق الصينية الفسطاط المسدس والمثمن الأضلاع.



فسطاط مثمن

لقد شيدت المباني في الصورة إلى اليمين وفقًا لأفكار فن «الفنجشوي» فهل تستطيع ملاحظة الأشكال متعددة الأضلاع في الصورة؟ تشبه العمارات شكل اليد اليسرى للإنسان حيث مبنى المعارض والمؤتمرات هو المعصم، والأبراج الخمسة تمثل الأصابع، والنافورة في مهد الكف. هل يمكنك ذكر بعض أسماء المباني الموجودة في طرابلس والتي لها أشكال متعددة الأضلاع؟

في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادرًا على:

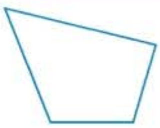
- تسمية أنواع المضلعات.
- حساب مجموع الزوايا الداخلة للمضلع.
- حساب الزوايا الخارجة للمضلع المنتظم.

1-6 أنواع المضلعات Types of Polygon

المضلع شكل هندسي مغلق مستوى يتكون من ثلاثة أو أكثر من القطع أو الجوانب. وللمضلعات أسماء مختلفة وفقًا لعدد أركانها (أو جوانبها).

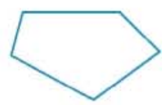
مستوى ذو ثلاثة أركان (أو ثلاث زوايا) يسمى **مثلثًا**.

مستوى ذو أربعة أركان (أو أربعة جوانب) يسمى شكلًا **رباعي الأضلاع**.

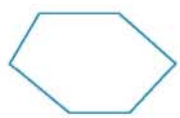


تسمى المضلعات الباقية طبقًا لعدد أركانها (أو أضلاعها) كما يلي:

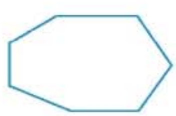
شكل خماسي



شكل سداسي



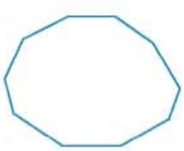
شكل سباعي



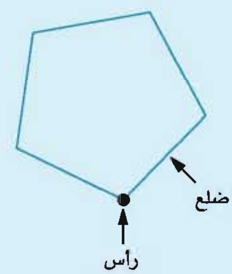
شكل ثماني

شكل تساعي

شكل عشاري



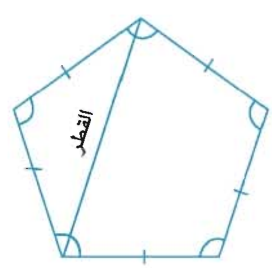
ملحوظة



المضلع الذي تتساوى جميع أضلاعه في الطول وجميع قياسات زواياه يسمى **المضلع المنتظم** .

جميع المضلعات الأخرى تعتبر **غير منتظمة**.

القطر هو القطعة المستقيمة داخل المضلع والتي تصل بين رأسين غير متتاليين.

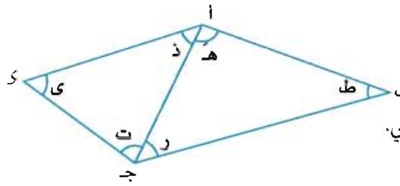


مضلع منتظم

2-6 مجموع قياسات زوايا المضلع Sum of the Angles of a Polygon

نعلم أن مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي °180. تذكر [من دراستك السابقة] أن الشكل الرباعي يمكن أن ينقسم إلى مثلثين. اعتبر المضلع أ ب حـ ء في الصفحة التالية.

إذا تم رسم القطر أ حـ فإن الشكل الرباعي ينقسم إلى مثلثين.



في Δ أ ب حـ $\hat{\text{هـ}} + \hat{\text{ط}} + \hat{\text{ر}} = 180°$

في Δ أ حـ ى $\hat{\text{ذ}} + \hat{\text{ت}} + \hat{\text{ى}} = 180°$

∴ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي.

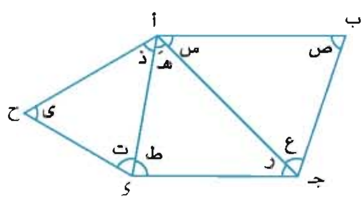
$= \underbrace{\hat{\text{هـ}} + \hat{\text{ط}} + \hat{\text{ر}}} + \underbrace{\hat{\text{ذ}} + \hat{\text{ت}} + \hat{\text{ى}}}$

$= 180° + 180°$

$= 2 \times 180° = 360°$

لندرس الآن الشكل الخماسي:

قسم القطران أ ى ، أ حـ الشكل الخماسي إلى ثلاثة مثلثات.



في Δ أ ب حـ $\hat{\text{س}} + \hat{\text{ص}} + \hat{\text{ع}} = 180°$

في Δ أ ى حـ $\hat{\text{هـ}} + \hat{\text{ط}} + \hat{\text{ر}} = 180°$

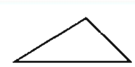
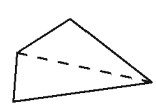
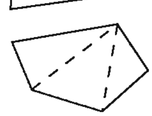
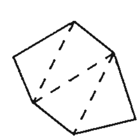
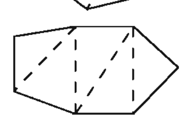
في Δ أ ى ح $\hat{\text{ذ}} + \hat{\text{ت}} + \hat{\text{ى}} = 180°$

مجموع قياسات زوايا الشكل الخماسي:

$\underbrace{\hat{\text{س}} + \hat{\text{ص}} + \hat{\text{ع}}} + \underbrace{\hat{\text{هـ}} + \hat{\text{ط}} + \hat{\text{ر}}} + \underbrace{\hat{\text{ذ}} + \hat{\text{ت}} + \hat{\text{ى}}} =$

$180° + 180° + 180° = 180° \times 3 = 540°$

بالمثل، يمكن إيجاد مجموع قياسات زوايا أي شكل مضلع عن طريق تقسيمه إلى عدد من المثلثات.

عدد الأضلاع	الشكل المضلع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا
3		1	180°
4		2	2 × 180° = 360°
5		3	3 × 180° = 540°
6		4	4 × 180° = 720°
7		5	5 × 180° = 900°
ن		ن − 2	(ن − 2) × 180°

1- مجموع قياسات الزوايا الداخلة لأي مضلع = (ن – 2) × 180° حيث ن = عدد الأضلاع.

2- المضلع الذي جميع أضلاعه متساوية في الطول وجميع قياسات زواياه متساوية يسمى مضلعًا منتظمًا.

جميع المضلعات الأخرى تعتبر مضلعات **غير منتظمة**.

مثال 1:

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الثماني الأضلاع.

الحل

مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع = (ن – 2) × 180°

∴ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثمن = (8 – 2) × 180°

= 6 × 180 = 1080°

مثال 2:

أوجد قياس كل زاوية من الزوايا الداخلة للشكل التساعي **المنتظم**.

الحل

مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع = (ن – 2) × 180°

∴ مجموع قياسات التسع زوايا الداخلة للتساعي = (9 – 2) × 180°

= 7 × 180°

∴ قيمة كل زاوية من الزوايا الداخلة = $\frac{7 \times \overset{20}{\cancel{180}}}{\underset{1}{\cancel{9}}}$ = 140°

مثال 3:

مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل المضلع هو 1440° كم يكون عدد أضلاع المضلع؟

الحل

افترض أن عدد أضلاع المضلع = ن.

مجموع الزوايا الداخلة للشكل المضلع = 1440°

∴ (ن – 2) × 180° = 1440°

ن – 2 = $\frac{1440°}{180°}$ = 8

∴ ن = 8 + 2 = 10

المضلع له 10 أضلاع

مثال 4:

قياس كل من خمس زوايا داخلة في شكل سداسي (غير منتظم) 110°

احسب قياس الزاوية السادسة.

الحــل

افترض أن قياس الزاوية السادسة = س

مجموع قياسات زوايا الشكل الداخلة = (ن − 2) × 180°

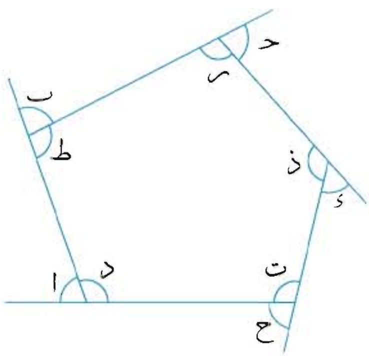
5 × 110° + س = (6 − 2) × 180°

550° + س = (6 − 2) × 180°

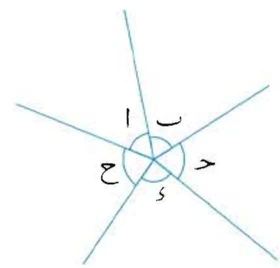
550° + س = 4 × 180° = 720°

س = 720° − 550° = 170°

3-6 الزوايا الخارجة للمضلع — Exterior Angles of a Polygon



في الشكل الخماسي المرسوم على اليسار ∠د، ∠ط، ∠ر ، ∠ذ، ∠ت، **زوايا داخلة** بينما ∠ا ، ∠ب، ∠حـ، ∠ء، ∠ح هي **الزوايا الخارجة للمضلع**.



إذا قصصنا الزوايا الخارجة ولصقناها بجوار بعضها كما هو موضح في الشكل إلى اليمين فإنها ستكون زاوية مثل زاوية الدائرة الكاملة والتي قياسها 360°.

وعليه فإن مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع تساوي 360°.

كرر هذا الإجراء مع شكل سداسي وآخر سباعي. ما مجموع قياسات الزوايا الخارجة لأي مضلع؟

مجموع قياسات الزوايا الخارجة لأي مضلع هو 360°

مثال 5:

أوجد قياس الزاوية الخارجة للشكل العشاري المنتظم.

الحــل

مجموع قياسات الزوايا الخارجة للشكل العشاري المنتظم = 360°

∴ مجموع قياسات 10 زوايا خارجة = 360°

∴ قياس كل زاوية خارجة = $\frac{360^\circ}{10}$ = 36°

مثال 6:

أوجد عدد أضلاع مضلع منتظم إذا كان قياس كل زاوية من زواياه الداخلة تساوي 135°.

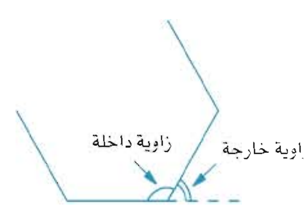
الحــل

قياس كل زاوية داخلة= 135°

∴ قياس كل زاوية خارجة = 180° − 135° = 45° (زوايا متجاورة على مستقيم)

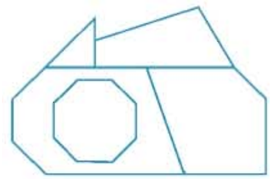
مجموع قياسات الزوايا الخارجة = 360°

∴ عدد الأضلاع = $\frac{360^\circ}{45^\circ}$ = 8



تمرين 16أ

1- اذكر اسم جميع الأشكال المختلفة التي تجدها في الشكل المستوي المعطى.



2- أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلة لكل من المضلعات الآتية:

(أ) الشكل السداسي. (ب) الشكل التساعي.

3- أوجد قياس كل زاوية من الزوايا الداخلة:

(أ) للشكل الخماسي المنتظم.

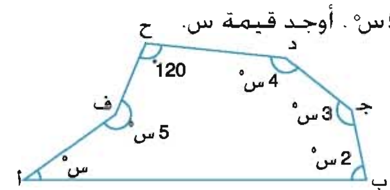
(ب) الشكل الثماني المنتظم.

4- كم عدد الأضلاع الموجودة في مضلع إذا كان مجموع قياسات زواياه الداخلة

(أ) 900° (ب) 360° ؟

5- أربع من الزوايا الداخلة لشكل خماسي قياس كل منها 110°. أوجد قياس الزاوية الخامسة.

6- أ ب حـ ى ح ف شكل سداسي. الزوايا أ، ب، حـ، ى، ح، ف هي على الترتيب س°، 2س°، 3س°، 4س°، 120°، 5س°. أوجد قيمة س.



7- أوجد قياس الزاوية الخارجة في

(أ) الشكل المنتظم ذي (12) ضلعًا.

(ب) مثلث منتظم.

8- كم عدد الأضلاع في مضلع منتظم إذا كان قياس كل زاوية من الزوايا الداخلة هي:

(أ) 150° (ب) 144° ؟

9- إذا كان قياس الزاوية الداخلة 8 أمثال قياس الزاوية الخارجة في مضلع منتظم، أوجد.

(أ) قياس الزاوية الخارجة.

(ب) عدد أضلاع المضلع المنتظم.

10- إذا كانت الزوايا الخارجة للشكل الخماسي هي على الترتيب 2س°، 3س°، 3س°، 3س°، 4س°. احسب قيمة س.

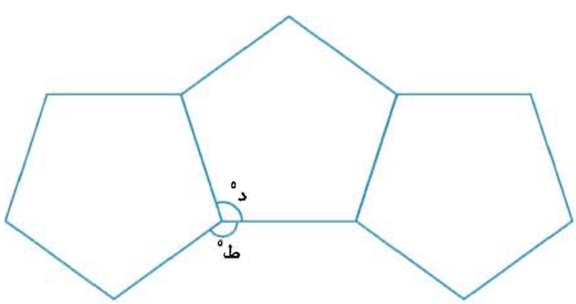
11- أنشئ شكلًا مسدسًا منتظمًا طول ضلعه 4 سم.

12- كل زاوية من الزوايا الداخلة في مضلع منتظم تساوي 156°. كم عدد أضلاع هذا المضلع ؟

13- خمس من الزوايا الداخلة لمسدس قياسها على الترتيب 100°، 110°، 125°، 134°، 140°. احسب قياس الزاوية الداخلة المتبقية.

14- إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع يساوي 12 زاوية قائمة. أوجد عدد أضلاع هذا المضلع.

15-



(أ) يبين الشكل المرسوم ثلاثة أشكال خماسية منتظمة. أوجد قياس كل من

(i) $\hat{د}$

(ii) $\hat{ط}$

(ب) أضيفت أشكال خماسية أخرى إلى هذه الأشكال الخماسية الثلاثة لتُكوّن طوقًا مغلقًا من الأشكال الخماسية المنتظمة تحيط بمضلع، كم يكون العدد الكلي للأشكال الخماسية التي تُكوّن هذا الطوق؟

ملخص

1- المضلع

(أ) الحد الأدنى لعدد أضلاع أي مضلع هو ثلاثة أضلاع.

(ب) مجموع قياسات الزوايا الداخلة لأي مضلع = (ن − 2) × 180° حيث ن = عدد الأضلاع.

(جـ) مجموع قياسات الزوايا الخارجة لأي مضلع = 360°

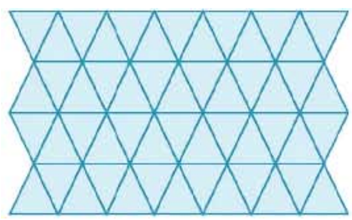
(د) المضلع المنتظم هو الذي تتساوى فيه أطوال أضلاعه وقياسات زواياه.

رياضيات ممتعة

الفسيفساء [التزيين برسم المربعات]

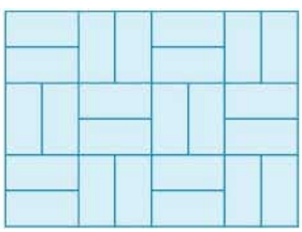
الفسيفساء هو نموذج الترصيع بالبلاط: بمعنى أنه عند تكرار شكل واحد أو مجموعة أشكال يتم ملء مساحة معطاة وفيما يلي بعض الأمثلة.

(أ)



ترصيع بفسيفساء المثلثات المتساوية

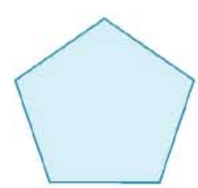
(ب)



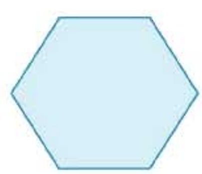
ترصيع بفسيفساء المستطيلات حيث طول المستطيل = 2 × العرض

1- استشف كلًّا من الأشكال الآتية على قطع من الورق الملون، ثم انسخ عدة نسخ من كل شكل وضع النسخ الخاصة بكل شكل جنبًا إلى جنب لتعرف أي الأشكال يمكن استخدامها في الترصيع بالفسيفساء.

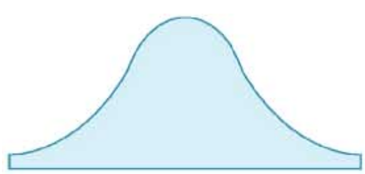
(أ)



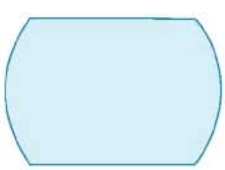
(ب)



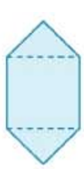
(جـ)



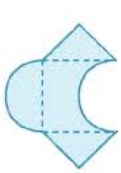
(د)



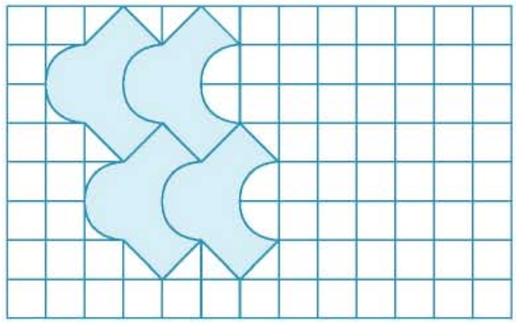
2- طريقة سهلة لرسم بعض أنماط الفسيفساء أو نماذج التبليط هي استخدام ورق المربعات أو ورق الرسم البياني، يمكن البدء بشكل أساسي يمكن استخدامه في الترصيع بالفسيفساء:



ثم اقطع نصف دائرة من أحد الجوانب وحولها إلى الجانب الآخر بحيث تحصل على شكل يمكن استخدامه في الترصيع بالفسيفساء:



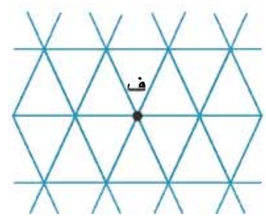
انقل النموذج الآتي وأكمل التصميم.



3- أثبت الإغريق أن هناك ثلاثة مضلعات **منتظمة** فقط يمكن استخدامها في الترصيع بالفسيفساء: المثلث المتساوي الأضلاع، والمربع، والمسدس.

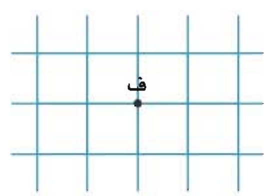
استخدام المثلث المتساوي الأضلاع في الترصيع بالفسيفساء.

لاحظ أن ستة مثلثات متساوية الأضلاع تنطبق تمامًا حول النقطة (ف) ما هو القياس الذي ينبغي أن تكون عليه كل زاوية من الزوايا حول النقطة (ف)؟



استخدام المربعات في الترصيع بالفسيفساء

كم عدد المربعات التي تنطبق تمامًا حول النقطة (ف)؟ ماذا يجب أن يكون قياس كل زاوية حول النقطة (ف)؟



استخدام المسدس المنتظم في الترصيع بالفسيفساء

كم عدد المسدسات المنتظمة التي تنطبق تمامًا حول النقطة (ف)؟ وماذا يجب أن يكون عليه قياس كل زاوية حول النقطة (ف)؟

ماذا يمكن استنتاجه مما سبق؟

إذا تم استخدام مضلع منتظم في الترصيع بالفسيفساء، فإن عددًا تامًّا من الزوايا يجب أن ينطبق تمامًا حول الرأس (ف). لذا فإن قياس كل من الزوايا الداخلة يجب أن يكون عامل من 360°، وبما أن المثلث المتساوي الأضلاع له أقل عدد من الأضلاع فإن الزوايا يجب أن تكون 60° أو أكبر مثل 72°، 90°، 120°.

(أ) أي المضلعات المنتظمة لها زوايا داخلة تساوي 72°، 90°، 120°؟

(ب) أي المضلعات الثلاثة المنتظمة في (أ) لا يمكن استخدامها في الترصيع بالفسيفساء؟

ورقة المراجعة 6

1 - (أ) احسب مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل العشاري.

(ب) احسب قياس كل من الزوايا الداخلة للشكل العشاري المنتظم.

3 - د ط ر ذ ت ى شكل سداسي قياسات زواياه الداخلة د . ط ، ر ، ذ ، ت ، ى هي على الترتيب ، س°، س°، 2س°، 3س°، 5س°، 120°.

(أ) احسب قياس أكبر الزوايا الخارجة.

(ب) احسب قياس أكبر الزوايا الداخلة.

2 - (أ) كم عدد أضلاع مضلع منتظم إذا كان قياس كلٍّ من زواياه الخارجة = 45°؟

(ب) كم عدد أضلاع مضلع إذا كان مجموع قياسات زواياه الداخلة 1800°؟

7 التماثل

Symmetry

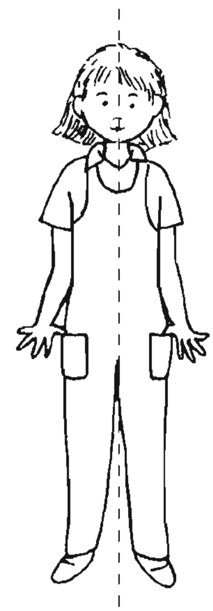
يبين الشكل المرسوم أعلاه كلمة صينية وتعني (هناءً مضاعفًا) وهي متماثلة [بمعنى أن نصفها الأيمن يعتبر صورة طبق الأصل من نصفها الأيسر] نجد العديد من المباني، والأشكال الفنية، والأجسام الطبيعية متماثلة.

في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادرًا على:

- التحقق من الأشكال المستوية التي لها خط تماثل، وتعيين موضع خطوط التماثل.
- التحقق من الأشكال المستوية التي تعرض التماثل الدوراني، وتعيين موضع مركز التماثل الدوراني.
- تحديد رتبة التماثل الدوراني للشكل المستوي.
- تحديد خواص تماثل المضلعات.
- التحقق من المجسمات المصمتة التي تعرض التماثل المستوي، وتعيين موضع مستويات التماثل.
- التحقق من المجسمات المصمتة التي تعرض التماثل الدوراني، وتعيين موضع محاور التماثل الدوراني.
- تحديد رتبة التماثل الدوراني لجسم مصمت حول محور معطى.
- تحديد خواص التماثل للمنشور، والهرم، والأسطوانة، والمخروط.

1-7 التماثل الخطي في الأشكال المستوية Line Symmetry of Plane Figures

عندما ننظر حولنا نرى العديد من الأشكال التي تبدو متزنة من حيث أن لها نصفين كل منهما يشبه الآخر. لننظر إلى سعاد.



إذا رسمنا خطًّا يمر بمنتصف جسدها سوف نرى أنها تملك العديد من (الأعضاء) التي تتشابه مع بعضها على جانبي الخط. تماثل على سبيل المثال قدمها اليمنى قدمها اليسرى. يدها اليمنى تتوافق مع يدها اليسرى. انظر إلى وجه سعاد سوف ترى عينيها وأذنيها أيضًا في اتزان على جانبي الخط.

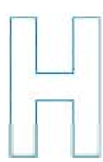
لاحظ أيضًا أن الخط يقسم أنفها وفمها إلى نصفين متزنين على جانبيه. يوجد اسم خاص يعطى لهذه الخاصية، إنها تسمى **تماثلًا** وحيث أن التماثل يتضمن جزأين متزنين **حول خط**، فإن هذا الخط يسمى **خط التماثل**.

مثال 1:

حدد خطوط التماثل للأشكال المرسومة أدناه:

(أ)

(ب)

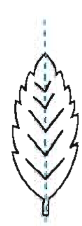


الحل

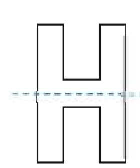
ملحوظة

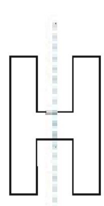
أسهل طريقة للحصول على خط التماثل هو تخيل الموضع الذي يمكنك عنده طي الورقة إلى جزأين بحيث ينطبق كل جزء تمامًا على الجزء الآخر.

(أ) يقسم الخط المنقط الورقة إلى جزأين متزنين.

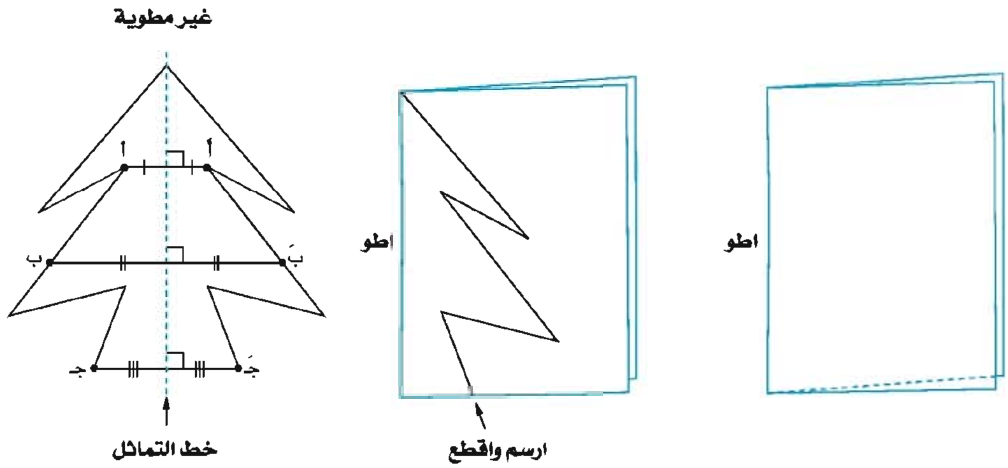


(ب) هذا الحرف له خطا تماثل. خط تماثل رأسي وخط تماثل أفقي.





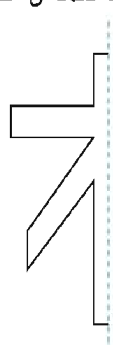
يمكن تكوين الأشكال المتماثلة عن طريق طي وتقطيع الورقة، وفيما يلي مثال لذلك.



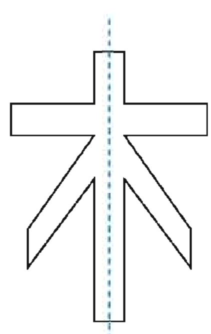
سوف تلاحظ أن النقطة أ تتزن مع النقطة أ′ وأن النقطتين تبعدان بمسافة متساوية عن خط التماثل وبالمثل فإن النقط ب، ب′ أيضًا تبعدان بمسافة متساوية عن خط التماثل وكذلك النقط حـ ، حـ′. ولهذا فإن خط التماثل هو **العمود المنصف للقطع المستقيمة** أ أ′ ، ب ب′، حـ حـ′.

مثال 2:

انقل وأكمل الصورة الآتية بحيث تتماثل حول الخط المنقط.



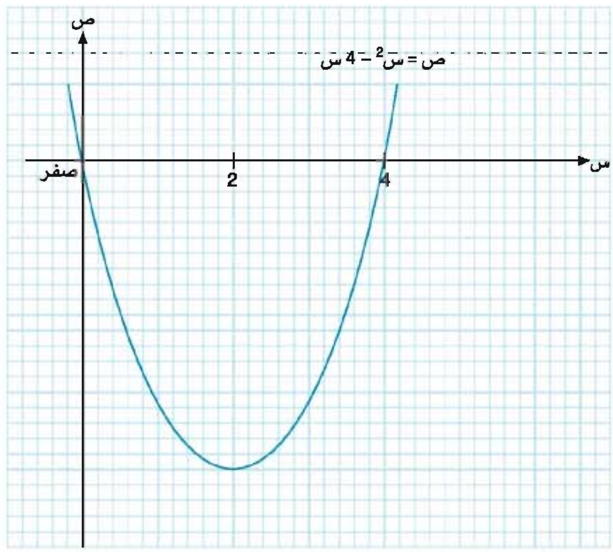
الحل



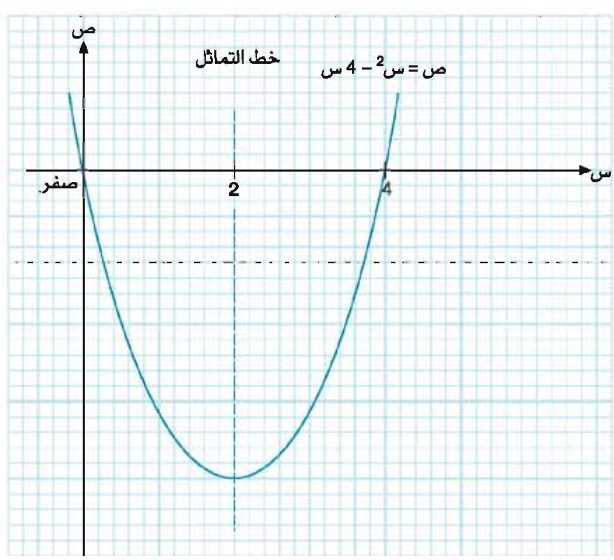
مثال 3:

اكتب معادلة خط التماثل للشكل البياني المعطى

ص = س^2 - 4س.



الحــل



معادلة خط التماثل هي س = 2

تمرين 7أ

1- انقل الصور الآتية ثم حدد خطًّا واحدًا للتماثل في كل منها.

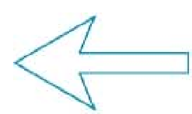
(أ)

(ب)

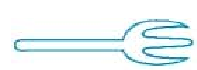
(جـ)

(د)

(هـ)



(و)



(ز)

(ح)

2- انقل الحروف الآتية ثم حدد خطًّا واحدًا للتماثل لكل منها.

(أ) M

(ب) A

(جـ) E

(د) C

(هـ) T

(و) W

(ز) D

(ح) K

(ط) U

(ى) V

3- انقل الأشكال الآتية ثم حدد خطين للتماثل في كل منها.

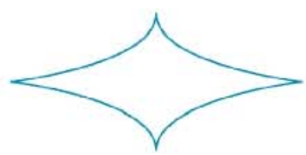
(أ)

(ب)

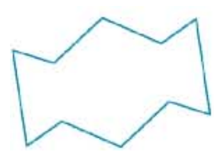
(جـ)

(د)

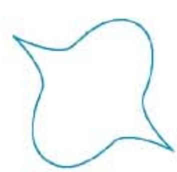
(هـ)



(و)



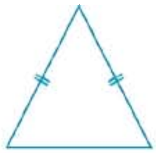
(ز)



(ح)

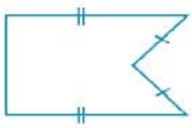
4- كم عدد خطوط التماثل الموجودة في كل شكل من الأشكال التالية؟

(أ)

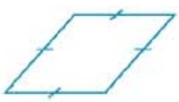


(ب)

(جـ)



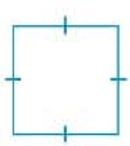
(د)



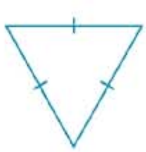
(هـ)

(و)

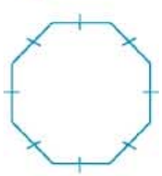
(ز)



(ح)

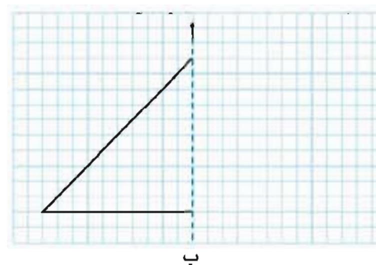


(ط)

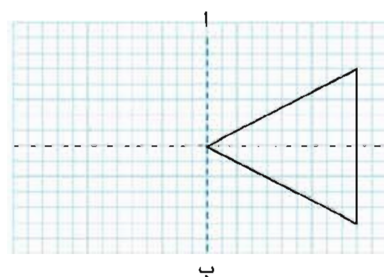


5- انقل كلًّا من الأشكال الآتية على ورقة رسم بياني. مستخدمًا الخط المنقط أب كخط تماثل. ارسم النصف الآخر من الشكل.

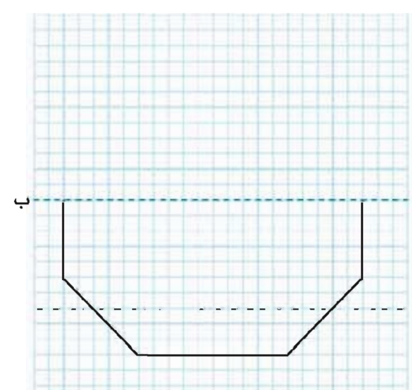
(أ)



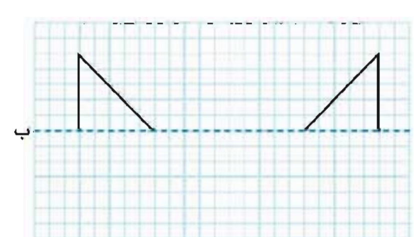
(ب)



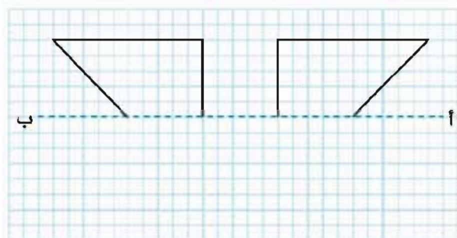
(جـ)



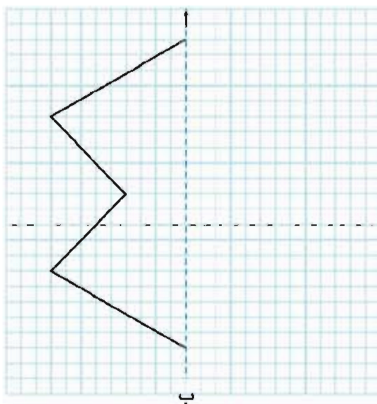
(د)



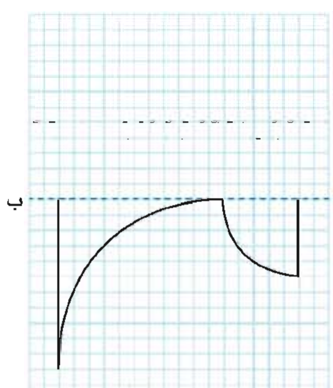
(هـ)



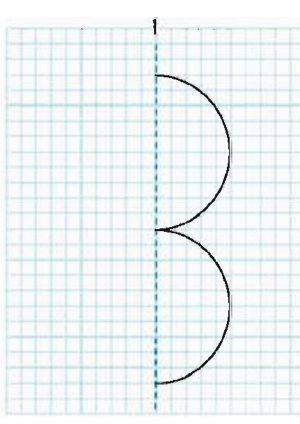
(و)



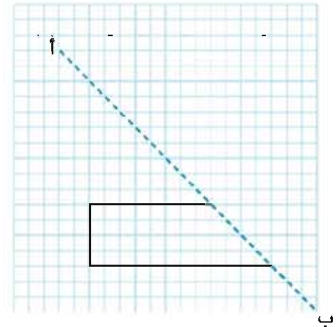
(ز)



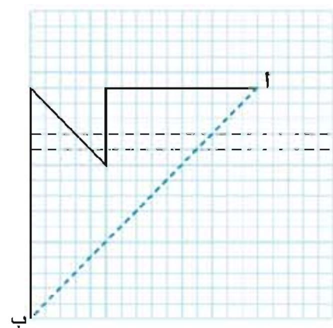
(ح)



(ط)

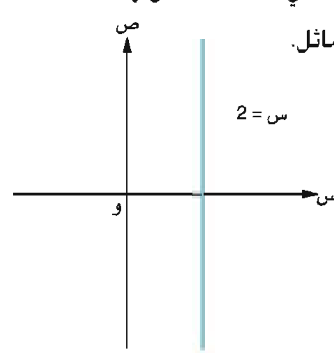


(ى)

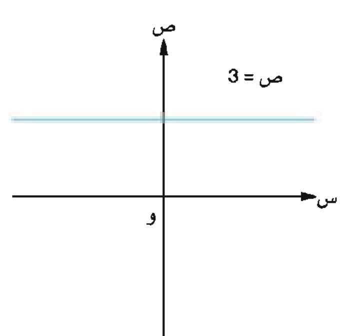


6- أي الأشكال البيانية لها خط تماثل واحد فقط؟ للشكل الذي له خط تماثل واحد فقط اكتب معادلة خط التماثل.

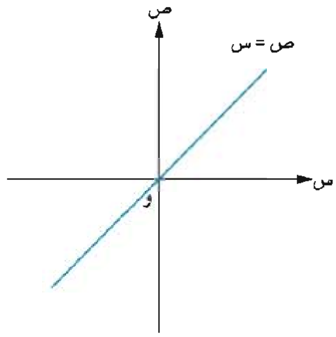
(أ)



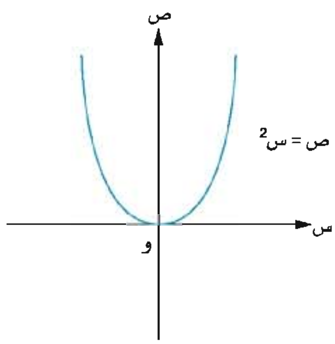
(ب)



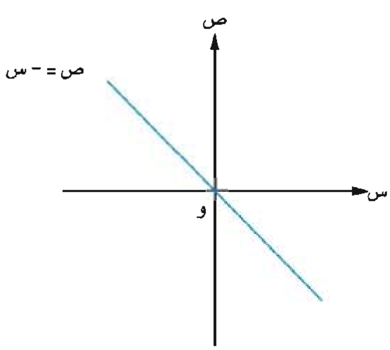
(جـ)



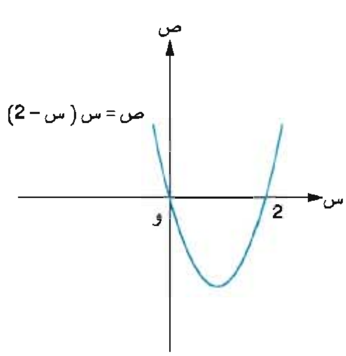
(د)



(هـ)

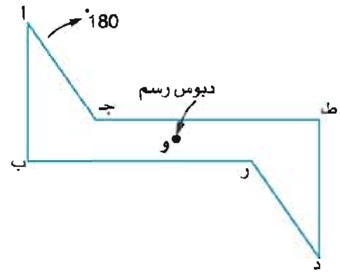


(و)



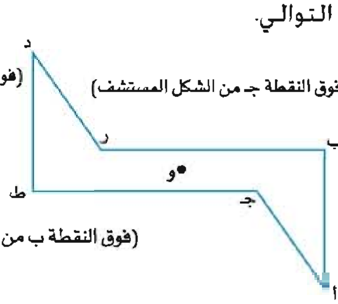
2-7 التماثل الدوراني في الأشكال المستوية
Rotational Symmetry of Plane figures

اصنع نسخة للشكل أدناه من الورق المقوى. ضع دبوس رسم خلال النقطة (و) في الورق المقوى ليمر عبر قطعة ورق موضوعة على لوح لين.



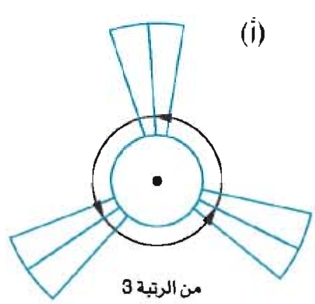
ثم استشف الخط المحيط بالشكل على قطعة الورق، وعنون النقاط تمامًا مثل التي على الورق المقوى.

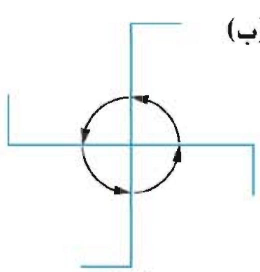
أدر الشكل المقوى 180°. سوف تلاحظ تطابق الشكل المقوى تمامًا على الشكل المستشف، والنقاط د، ط، ر على الشكل المقوى أصبحت فوق النقاط أ، ب، حـ بالشكل المستشف على التوالي.

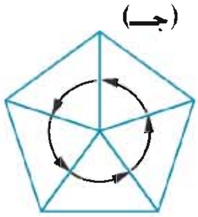


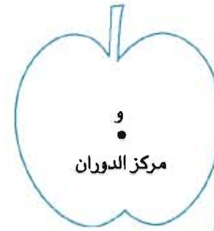
أدر الشكل المقوى 180° أخرى، في هذه المرة سوف ينطبق الشكل المقوى على المستشف ولكن تصبح النقاط أ، ب، حـ بالورق المقوى فوق النقاط أ،ب،حـ بالشكل المستشف على التوالي، بمعنى أخر يمكن القول بأن الشكل المقوى عاد إلى موضعه الأصلي.

ولذا فإن الشكل المقوى ينطبق تمامًا على الشكل المستشف مرتين أثناء عملية دورانه إلى موضعه الأصلي، أي أن هذا الشكل له تماثل دوراني من الرتبة 2 حول النقطة (و) والتي تعرف بمركز التماثل الدوراني. الأشكال التالية لها تماثل دوراني من رتب أخرى:









الصورة المرسومة لتفاحة إلى اليمين. عند إدارتها حول النقطة (و)، فإنها تنطبق على نفسها فقط عند رجوعها إلى نفس موضعها الأصلي بمعنى بعد استكمالها دورة كاملة. نقول ليس لها تماثل دوراني، حيث أنها تنطبق على محيطها بطريقة واحدة فقط، بمعنى أنها يجب أن تكمل دورة واحدة كاملة قبل أن تنطبق على محيطها، ويمكن أيضًا القول بأن رتبة هذا التماثل الدوراني 1.

يقال إن الشكل له تماثل دوراني حول نقطة (و) إذا كان بدورانه حول النقطة و ينطبق على الخط المحيط به على الأقل مرة واحدة قبل استكماله دورة كاملة.

ملحوظة

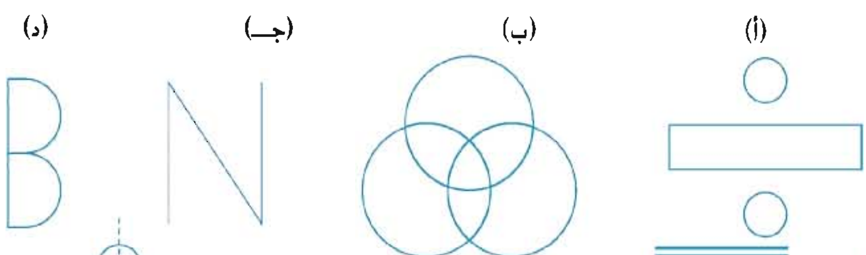
يقال إن الشكل يمتلك تماثلًا دورانيًا إذا كان له تماثل دوراني من الرتبة 2 أو أكثر.

مثال 4:

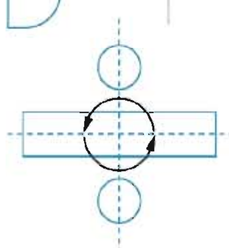
لكل من الأشكال التالية، حدد

(i) عدد خطوط التماثل

(ii) رتبة التماثل الدوراني.



الحل

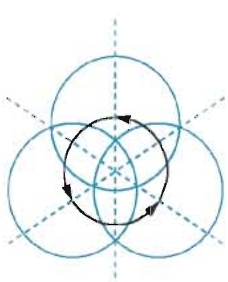


(أ) (i) عدد خطوط التماثل = 2

(ii) رتبة التماثل الدوراني = 2

ملحوظة

(أ) (ii) عندما يدور الشكل °180 فإنه ينطبق على محيطه الأصلي. وعندما يدور °180 مرة أخرى ينطبق مرة ثانية على محيطه. ولهذا فإنه في الدورة الكاملة (°360) يكون قد انطبق على محيطه الأصلي مرتين. ولهذا فإن التماثل الدوراني في هذه الحالة يكون من الرتبة 2.



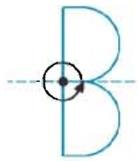
(ب) (i) عدد خطوط التماثل = 3

(ii) رتبة التماثل الدوراني = 3

(جـ) (i) عدد خطوط التماثل = 0

(ii) رتبة التماثل الدوراني = 2

(د) (i) عدد خطوط التماثل = 1
(ii) رتبة التماثل الدوراني = 1

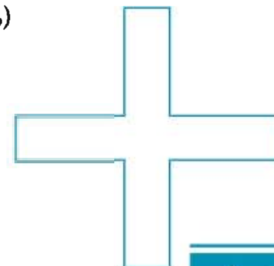


مثال5:

لكل من الأشكال التالية،

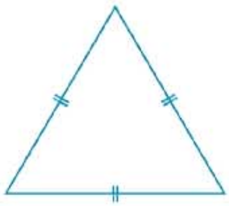
(i) انقل الرسم .
(ii) حدد مركز التماثل الدوراني بالعلامة (x).
(iii) حدد رتبة التماثل الدوراني.

(أ)



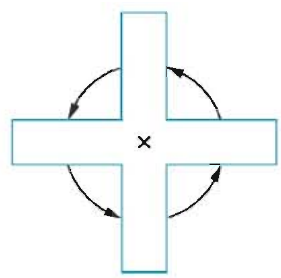
(ب)

(جـ)



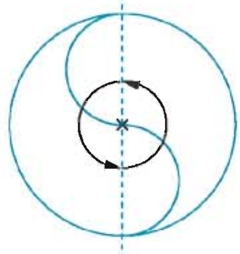
الحــل

(أ)



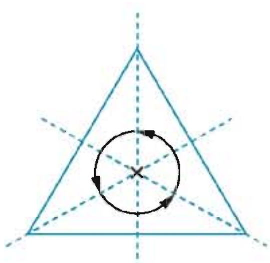
تماثل دوراني من
الرتبة الرابعة

(ب)



تماثل دوراني من
الرتبة الثانية

(جـ)

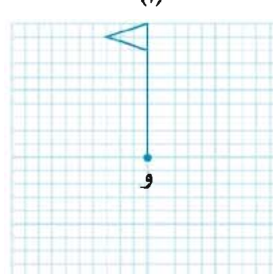


تماثل دوراني من
الرتبة الثالثة

مثال6:

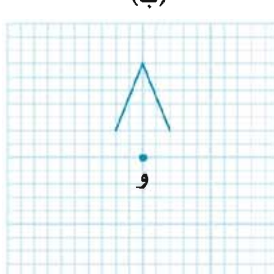
انقل الأشكال التالية على ورق رسم بياني. (و) هي مركز التماثل الدوراني. أكمل كل شكل بحيث تكون رتبة تماثله الدوراني كما هو محدد.

(أ)



تماثل دوراني من
الرتبة الثالثة

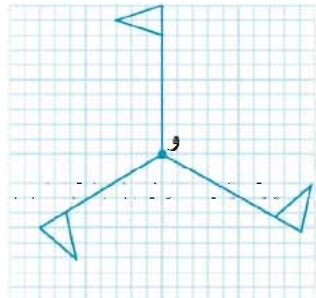
(ب)



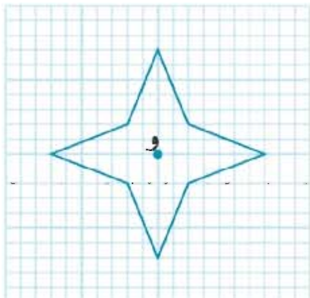
تماثل دوراني من
الرتبة الرابعة

الحــل

(أ)



(ب)



تمرين 7ب

1- لكل من الأشكال التالية حدد

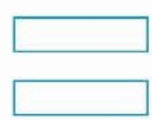
(i) عدد خطوط التماثل.

(ii) رتبة التماثل الدوراني.

(أ)

(ب)

(جـ)



(د)

(هـ)

(و)

(ز)

(ح)

(ط)

(ى)

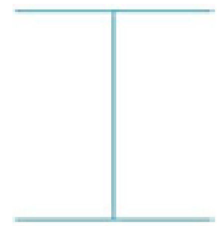
2- لكل من الأشكال التالية:

(i) انقل الشكل المرسوم.

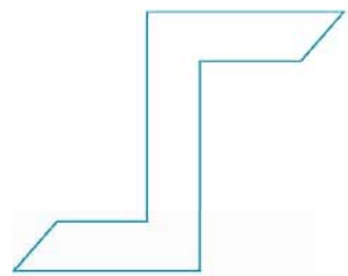
(ii) حدد مركز التماثل الدوراني بالعلامة (x)

(iii) حدد رتبة التماثل الدوراني.

(أ)



(ب)

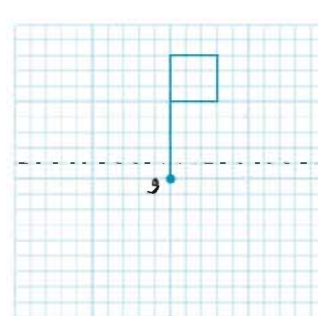


(جـ)

(د)

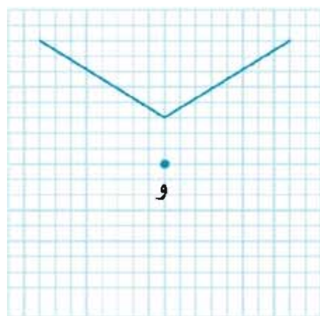
3- انقل الأشكال التالية في ورق رسم بياني. مستخدماً النقطة (و) كمركز للتماثل الدوراني أكمل كل شكل بحيث تكون رتبة التماثل الدوراني الخاصة به كما هو محدد بالشكل.

(أ)



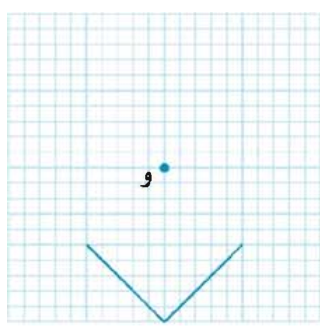
الرتبة 2

(ب)



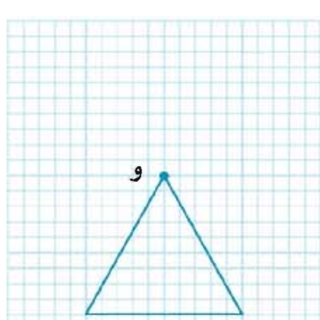
الرتبة 4

(جـ)



الرتبة 4

(د)



الرتبة 6

4- اكتب قائمة بالحروف الأجنبية الكبيرة بدءًا من A إلى Z التي لها تماثل دوراني من

(أ) الرتبة 2.

(ب) الرتبة 3.

(جـ) الرتبة 4.

(د) رتبة لا نهائية (لا يمكن عدها).

3-7 تماثل المضلعات Symmetry of Polygons

سوف تدرس في النشاطات التالية خطوط التماثل. وخواص التماثل الدوراني للمضلعات المختلفة والتي تتضمن أنواعًا مختلفة من المثلثات والأشكال رباعية الأضلاع.

نشاطات

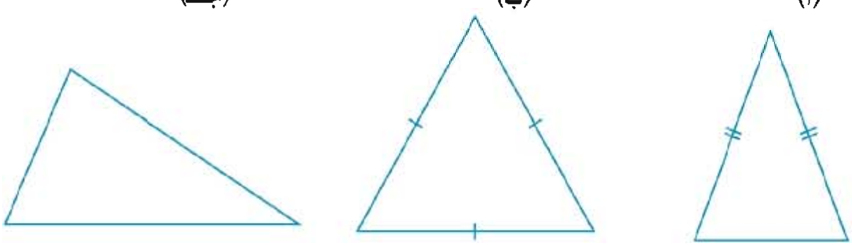
1- لكل من المثلثات الآتية.

(i) انقل الرسم،

(ii) ارسم خطوط التماثل بالنقط إن وجد.

(iii) حدد مركز التماثل الدوراني إن وجد بالعلامة (x).

(أ) (ب) (جـ)



2- مستخدمًا نتائج النشاط السابق 1، انقل وأكمل الجدول التالي:

	نوع المثلث	عدد خطوط التماثل	رتبة التماثل الدوراني
أ	متساوي الساقين		
ب	متساوي الأضلاع		
حـ	مختلف الأضلاع		

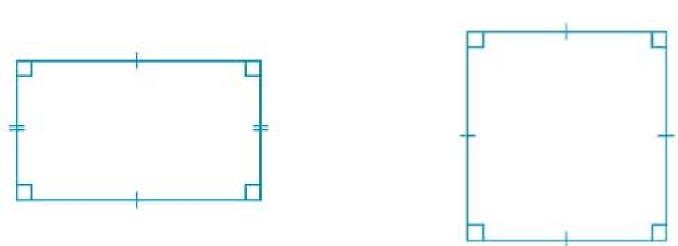
3- لكل من الأشكال الرباعية.

(i) انقل الرسم

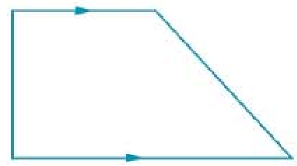
(ii) ارسم خطوط التماثل (بالنقط) إن وجدت.

(iii) حدد مركز التماثل الدوراني إن وجد بالعلامة (x).

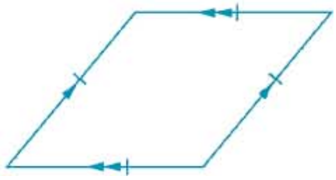
(أ) (ب)



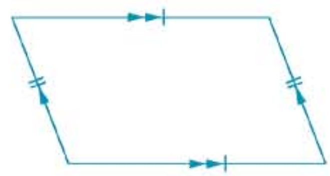
(جـ)



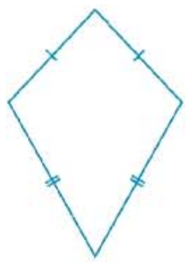
(د)



(هـ)



(و)



4- مستخدمًا نتائج النشاط 3، انقل وأكمل الجدول التالي.

	نوع الشكل الرباعي	عدد خطوط التماثل	رتبة التماثل الدوراني
أ	مربع		
ب	مستطيل		
جـ	شبه منحرف		
د	معين		
هـ	متوازي أضلاع		
و	طائرة ورقية		

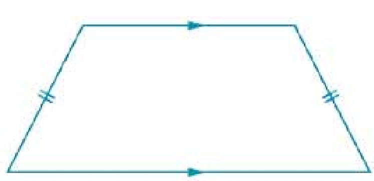
5- بالنسبة لشبه المنحرف متساوي الساقين المبين.

(أ) انقل الشكل.

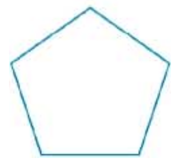
(ب) ارسم خطوط التماثل بالنقط إن وجدت.

(جـ) حدد مركز التماثل الدوراني إن وجد بالعلامة (x).

(د) حدد رتبة التماثل الدوراني.

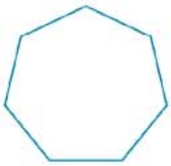


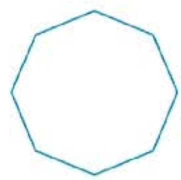
6- لكل من المضلعات المنتظمة.
(i) انقل الرسم
(ii) ارسم خطوط التماثل إن وجدت بالنقط.
(iii) حدد مركز التماثل الدوراني إن وجد بالعلامة (x).

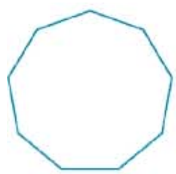
(أ)

خماسي

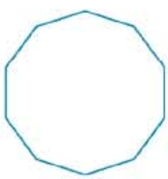
(ب)

سداسي

(جـ)

سباعي

(د)

ثماني

(هـ)

تساعي

(و)

عشاري

7- مستخدمًا النتائج التي حصلت عليها من النشاطات 1، 3، 6 انقل وأكمل الجدول التالي لهذه المضلعات المنتظمة.

	نوع المضلع	عدد خطوط التماثل	رتبة التماثل الدوراني
أ	مثلث متساوي الأضلاع		
ب	مربع		
جـ	خماسي منتظم		
د	سداسي منتظم		
هـ	سباعي منتظم		
و	ثماني منتظم		
ز	تساعي منتظم		
ح	عشاري منتظم		

التعميم بالاستقراء

8- مستخدمًا نتائج النشاط 7، استنتج.
(i) عدد خطوط التماثل،
(ii) رتبة التماثل الدوراني،
بالنسبة للمضلع المنتظم الذي له:
(أ) 100 ضلع. (ب) (ن) من الأضلاع.

ملخص

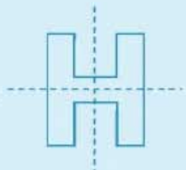
1- الخط الذي يقسم الشكل المستوى إلى نصفين متساويين بحيث تناظر أي نقطة في الجانب الأيمن نقطة أخرى في الجانب الأيسر يعرف بخط التماثل.

في الشكلين التاليين:

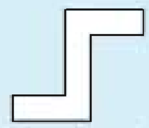
الشكل (أ) ليس له خط تماثل.

الشكل (ب) له خطا تماثل.

(ب)



(أ)



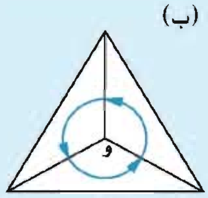
2- يقال إن الشكل المستوي له تماثل دوراني حول نقطة (و) إذا كان بدورانه حول نقطة (و) ينطبق مع محيطه المرسوم على الأقل مرة واحدة قبل أن يتم دورة كاملة.

في الشكلين التاليين:

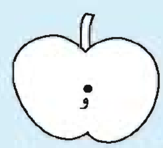
الشكل (أ) له تماثل دوراني من الرتبة 1 (أي ليس له تماثل دوراني).

الشكل (ب) له تماثل دوراني من الرتبة 3 حيث مركز الدوران هو (و).

(ب)



(أ)



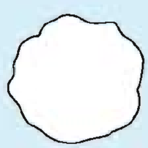
3- المضلعات المنتظمة التي لها عدد أضلاع (ن) لها (ن) من خطوط التماثل وتماثل دوراني من الرتبة (ن).

4- مستوى التماثل يقسم الجسم إلى قطعتين **متطابقتين**.

5- في الجسمات التالية،

الشكل (أ) ليس له مستوى تماثل.

(أ)



حجر غير منتظم

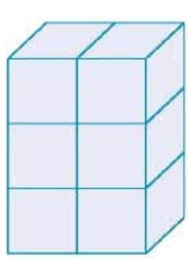
رياضيات ممتعة

في كل ما يأتي، كل سطح من السطوح الخارجية تم طلاؤه باللون الرصاصي.

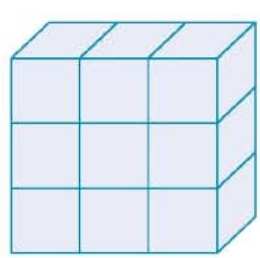
(i) كم عدد وجوه المكعب التي تم طلاؤها؟

(ii) كم عدد المكعبات التي لها 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6 وجوه مطلية؟

(ب)



(أ)

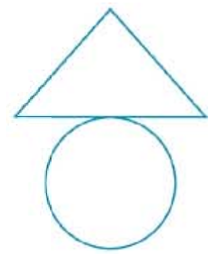


ورقة المراجعة 7

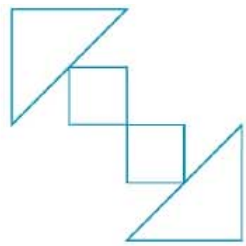
القسم (أ)

1- ارسم جميع خطوط التماثل الممكنة في كل من الأشكال التالية:

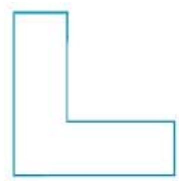
(أ)



(ب)

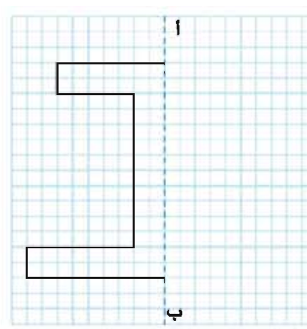


(جـ)

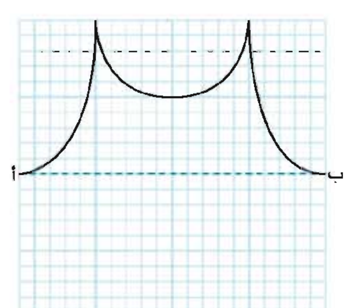


2- أكمل كلًّا من الأشكال التالية ليتماثل حول الخط المنقط أ ب.

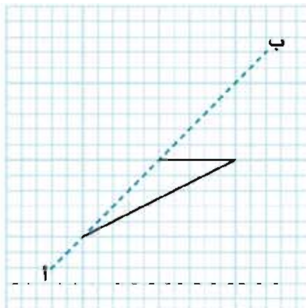
(أ)



(ب)



(جـ)

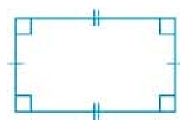


3- اكتب جميع حروف اللغة الإنجليزية في قائمة من A وحتى Z ثم حدد أي منها ليس له خط تماثل.

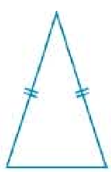
4- حدد

(i) عدد خطوط التماثل.

(ii) رتبة التماثل الدوراني لكل من



(أ) مستطيل



(ب) مثلث متساوي الساقين

القسم (ب)

5- حدد رتبة التماثل الدوراني لكل من :

(أ) المربع.

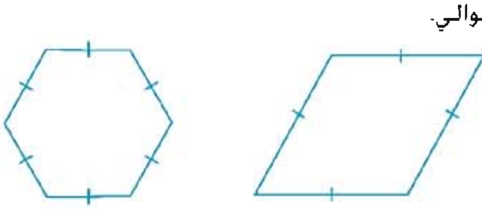
(ب) متوازي الأضلاع.

(جـ) المثلث المتساوي الأضلاع

(د) الطائرة الورقية.

(هـ) الخماسي المنتظم.

6- الشكلان الآتيان لمعين وسداسي منتظم على التوالي.

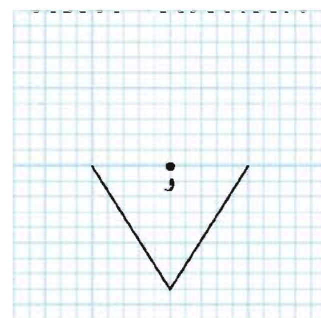


(أ) كم عدد خطوط التماثل الموجودة في كل شكل؟

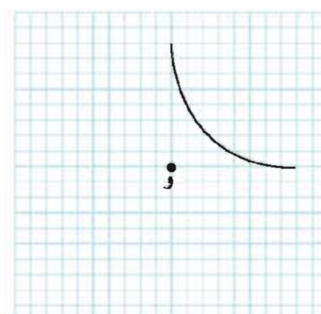
(ب) ما هي رتبة التماثل الدوراني في كل حالة؟

7- استخدم النقطة (و) كمركز للتماثل الدوراني وأكمل كل شكل بحيث يكون له تماثل دوراني من:

(أ) الرتبة 2

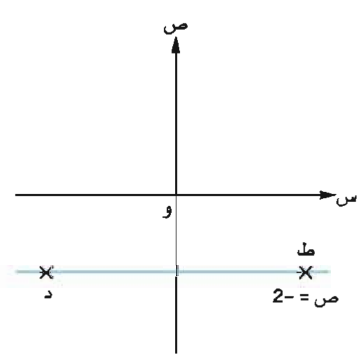


(ب) الرتبة 4

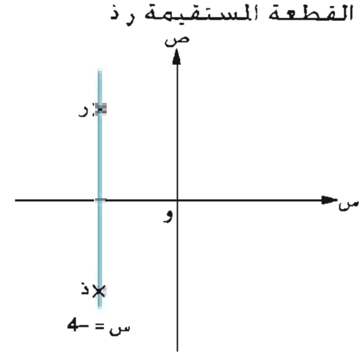


8- حدد معادلة محور التماثل بالنسبة لكل شكل من الأشكال التالية.

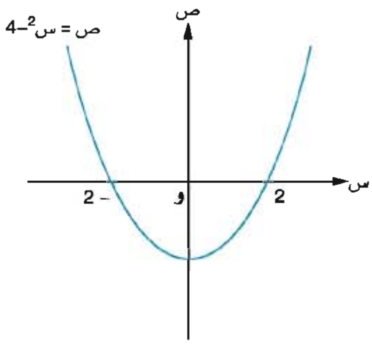
(أ) القطعة المستقيمة د ط



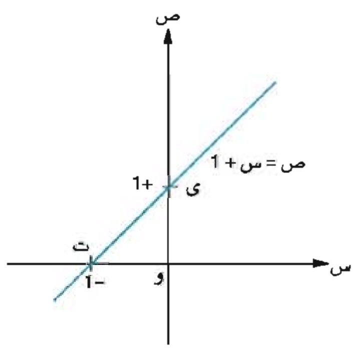
(ب) القطعة المستقيمة ر ذ



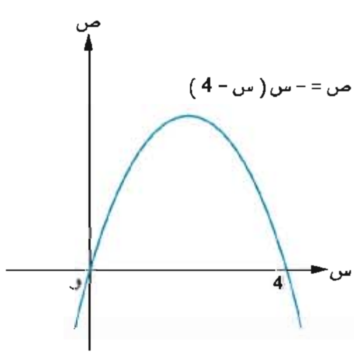
(جـ) المنحنى ص = س^2 - 4



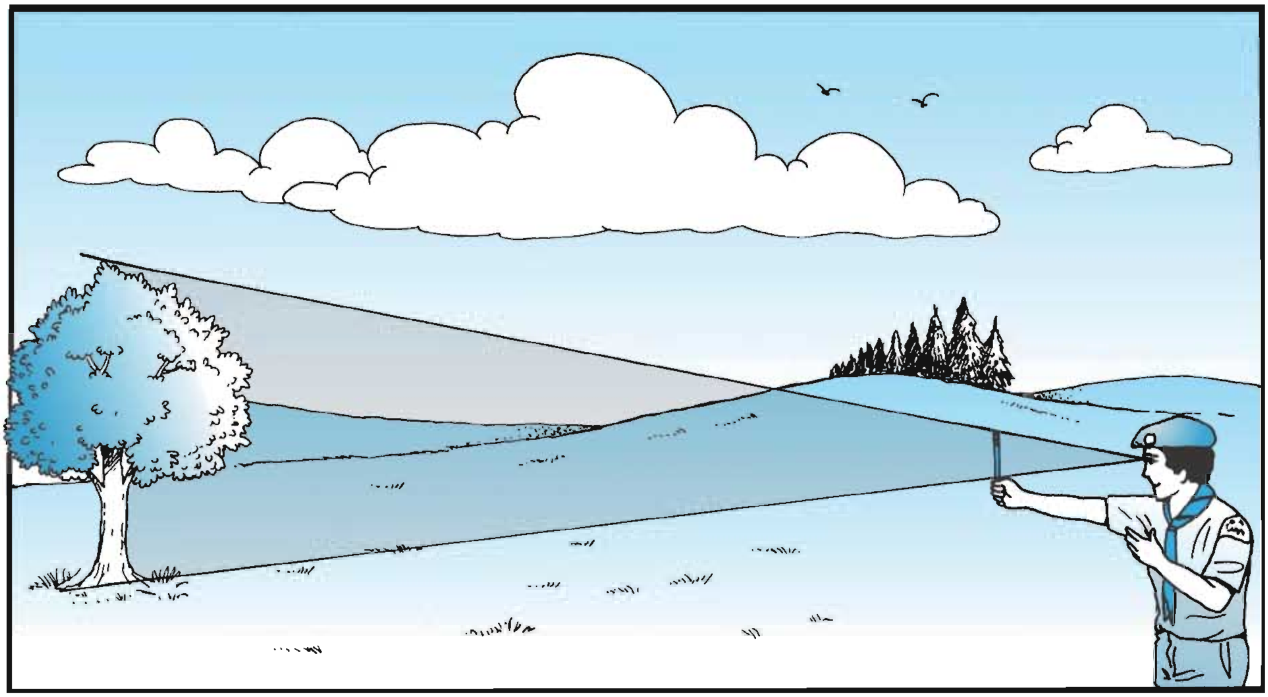
(د) القطعة المستقيمة ت ى



(هـ) المنحنى ص = -س (س - 4)



8 التطابق والتشابه
Congruency and Similarity



تقدير الارتفاع لشجرة عالية أو مبنى عالٍ واحدة من المهارات الأساسية التي يتعلمها الكشاف. ولفعل ذلك عليه تطبيق مفهوم المثلثات المتشابهة.

وفي نهاية هذا الفصل سوف تكون قادرًا على:

- التحقق من تطابق الأشكال متعددة الأضلاع وربط رؤوسها المتناظرة.
- إثبات تطابق المثلثين باستخدام الأضلاع الثلاثة (ض ض ض)، وضلعين وزاوية محصورة بينهما (ض ز ض)، وزاويتين وضلع (ز ض ز)، والمثلثين قائمي الزاوية بمعلومية وتر وضلع (و ض ق).
- التحقق من تشابه الأشكال متعددة الأضلاع والربط بين رؤوسها المتناظرة.
- إثبات تشابه المثلثين واستخدام خواص التشابه في المثلثين لإيجاد القيم المجهولة.
- تطبيق الصيغ الرياضية للأشكال المتشابهة.

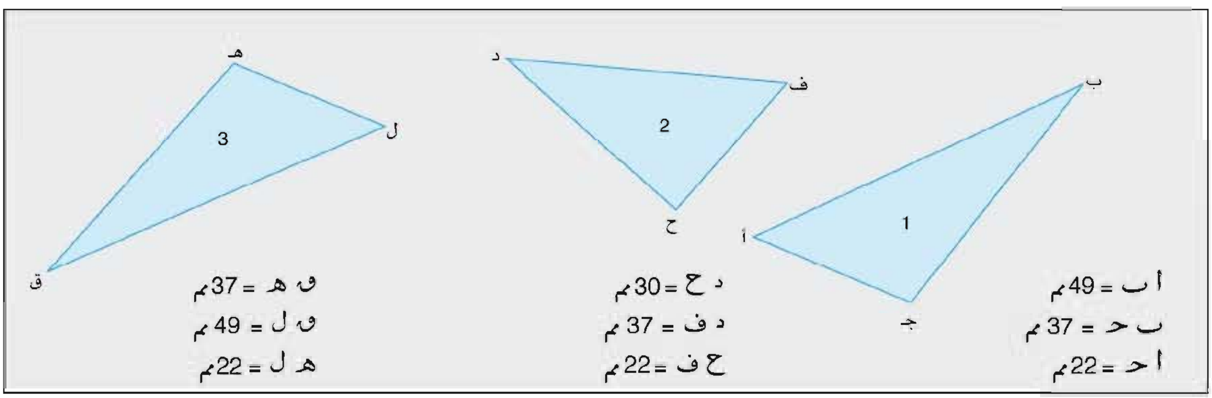
$$\frac{أ_1}{أ_2} = \left(\frac{ل_1}{ل_2}\right)^2$$

$$\frac{ح_1}{ح_2} = \left(\frac{ل_1}{ل_2}\right)^3$$

1-8 التطابق Congruency

انظر إلى الصور المبينة بأعلى. نريد مقارنة الأحجام والأشكال. من السهل رؤية تطابق الأشكال (أ)، (ب)، (حـ) في الشكل والحجم ولكن الشكل (د) أصغر. وللمقارنة بين (أ)، و(حـ) قد يكون قص شكلٍ ووضعه فوق الآخر سهلًا، وعند فعل ذلك سوف نجد أن الشكلين (أ) ، (جـ) لهما نفس الشكل والحجم. ولهذا نقول: أن الشكلين **متطابقان**.

نجد أحيانًا أنه من الأيسر والأسهل مقارنة الأشكال عن طريق القياس، فإذا ما قسنا كل الأضلاع لكل من الأشكال التالية، سوف نجد أن:



إذا قارنا أطوال الأضلاع في المثلث الأول مع المثلث الثاني سوف نجد:

أ حـ = ح ف، ب حـ = د ف، ولكن أ ب ≠ د ح

وعند مقارنة أطوال أضلاع المثلث الأول مع المثلث الثالث نجد أن:

أ ب = ق ل ، ب حـ = ق هـ ، أ حـ = هـ ل

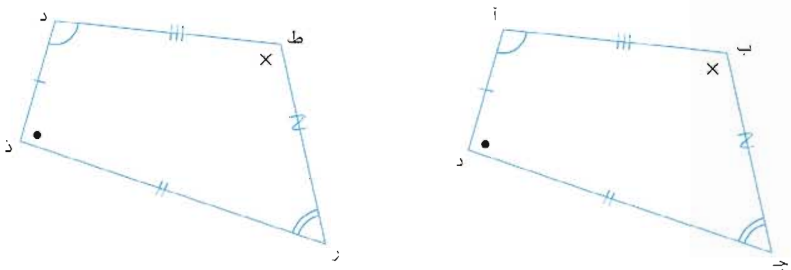
وهذا يعني أن كل ضلع في المثلث الأول **يناظر** ضلعًا يتساوى معه في الطول في المثلث الثالث، وهنا نقول أن **المثلثين متطابقان**.

CD-Rom

سلسلة الرياضيات الديناميكية عبر العصور مع التطابق والتشابة

الأشكال المتطابقة

الأشكال المتطابقة لها نفس الشكل والحجم بحيث يمكن لكل شكل تغطية الشكل الآخر تمامًا. ويمكن مراجعته عن طريق القياس.



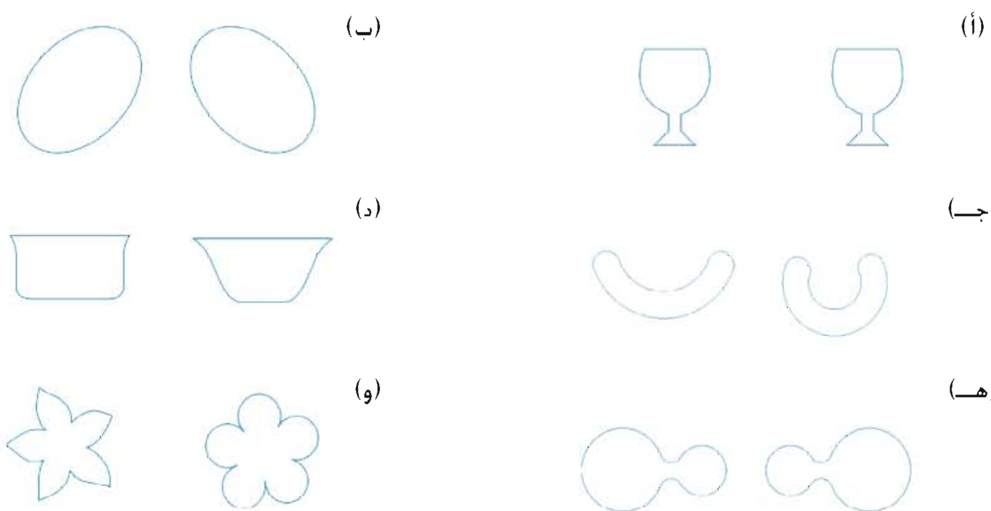
الشكلان الرباعيان المرسومان إلى أعلى متطابقان لأن

(أ) الأضلاع المتناظرة متساوية في الطول.

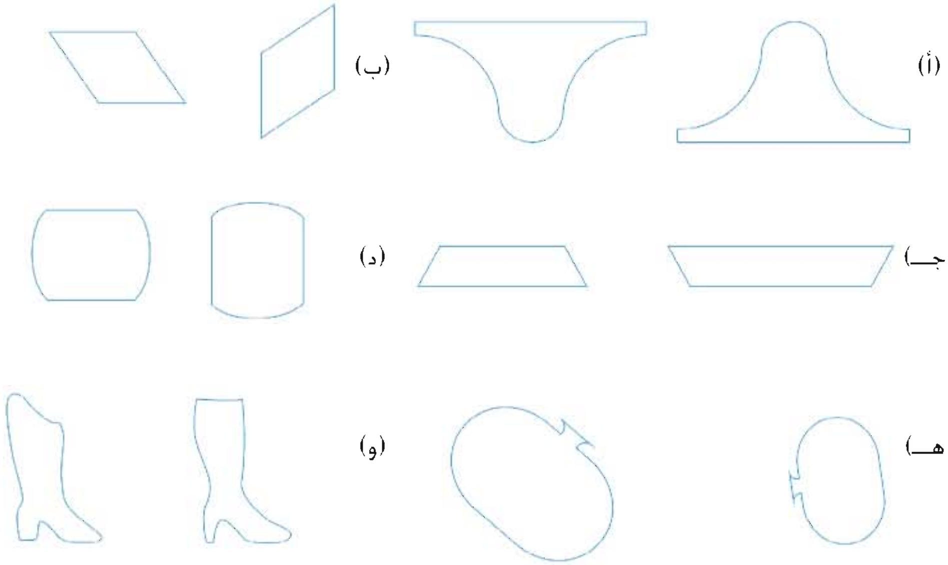
(ب) الزوايا المتناظرة متساوية في **القياس**.

أنشطة

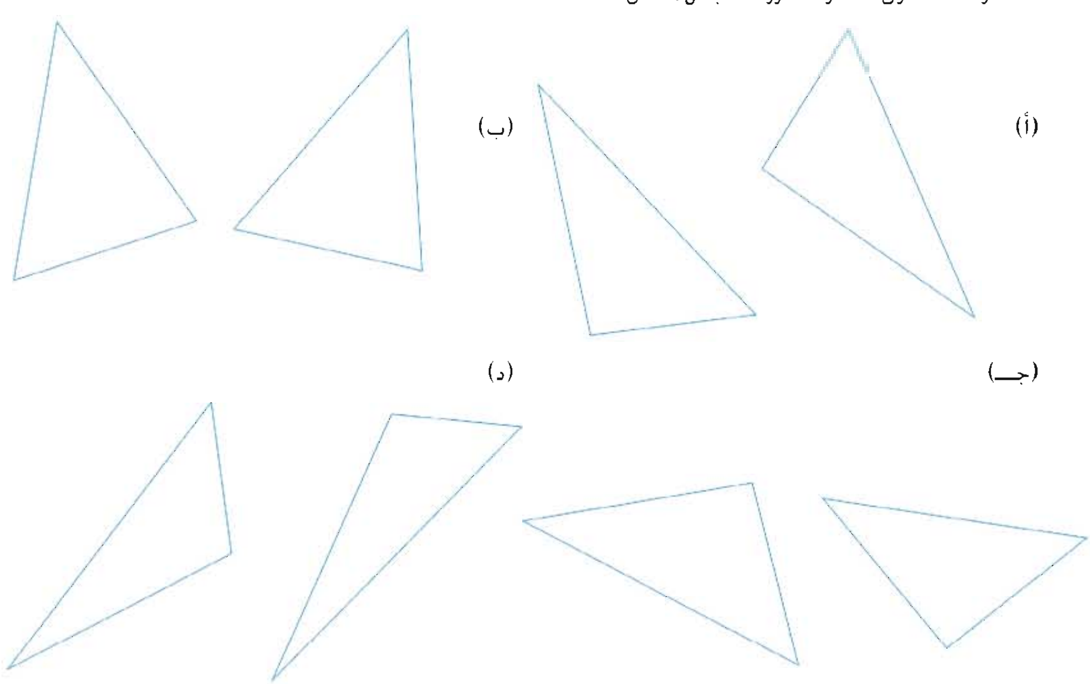
1- استشف شكلًا من كل زوج، وضعه فوق الآخر لترى ما إذا كانا يغطيان بعضهما **تمامًا**. ومن ثم حدد أي زوج من هذه **الأشكال** متطابق وأيها غير متطابق.



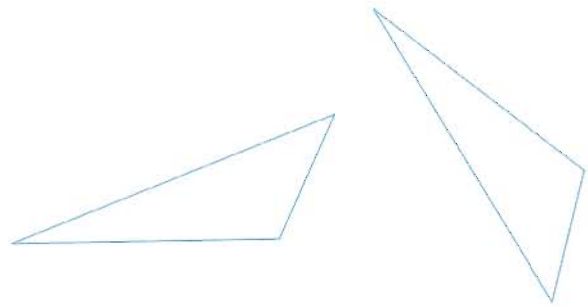
2- من دون قياس حدد أي زوج من الأشكال الآتية متطابق.



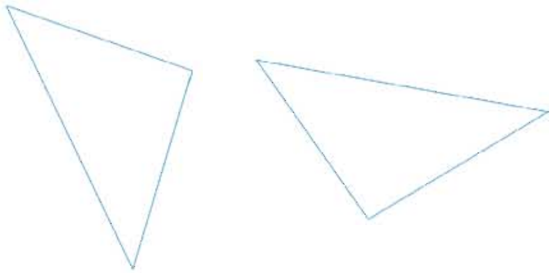
3- بالنسبة لكل زوج من المثلثات الآتية.استشف واحدًا منها على ورقة شفافة وضعه فوق الآخر لتقرر تطابقهما من عدمه.



(هـ)

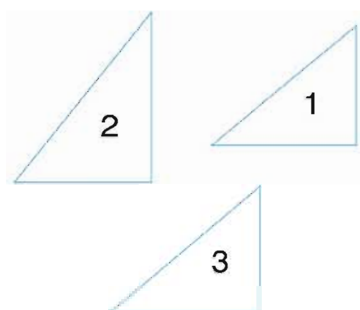


(و)

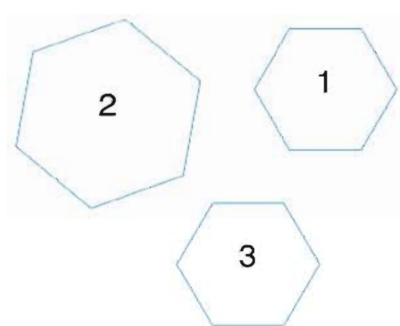


4- قس أطوال أضلاع كل مجموعة من الأشكال الآتية واستنتج أي الأشكال متطابقة في كل مجموعة.

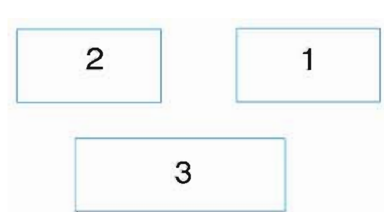
(أ)



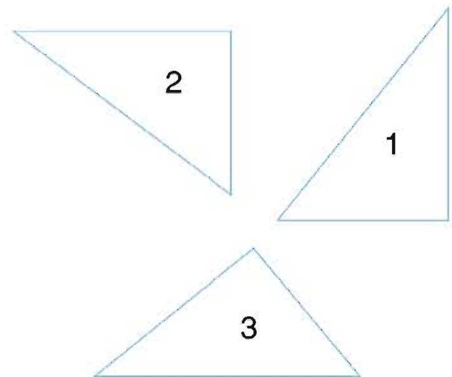
(ب)



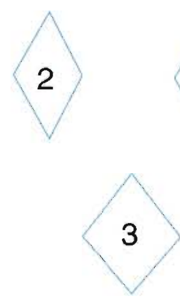
(جـ)



(د)

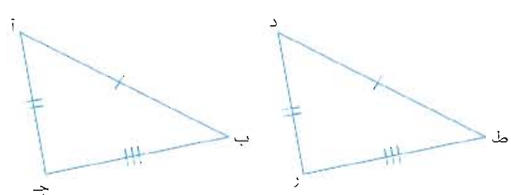


(هـ)

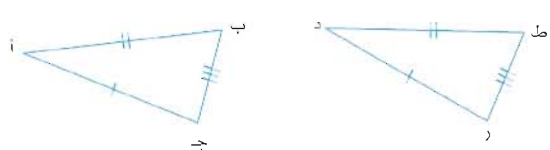


5- كل مما يلي زوج من الأشكال المتطابقة. أوجد الضلع الذي يناظر الضلع أ ب، و الزاوية التي تناظر ∠أ.

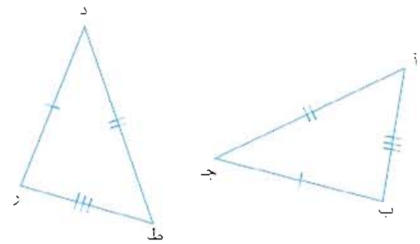
(أ)



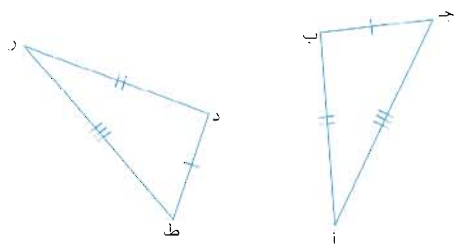
(ب)



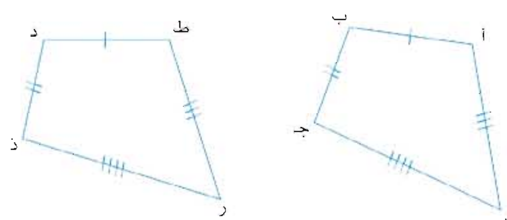
(جـ)



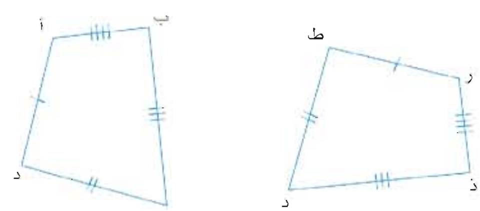
(د)



(هـ)



(و)



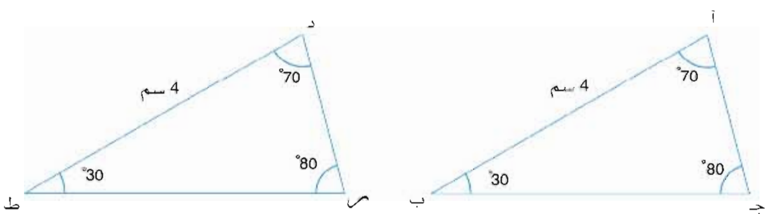
2-8 المثلثات المتطابقة Congruent Triangles

تبدو أحيانًا المثلثات متطابقة في حين أنها ليست كذلك، كما أننا لا نعطي دائمًا أطوال كل الأضلاع أو قياسات كل الزوايا. ومن المهم معرفة أي المعلومات نحتاجها لنكون قادرين على استنتاج تطابق المثلثين.

دعنا نعتبر الحالة التي رسم فيها المثلثان أ ب حـ ، د ط س بحيث:

∠ أ = ∠ د = 70°
∠ ب = ∠ ط = 30°
∠ حـ = ∠ س = 80°
أ ب = د ط = 4 سم

هل المثلثان متطابقان؟

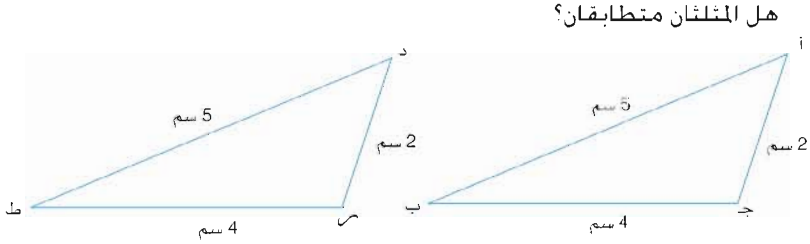


بالنظر إلى المثلثين أ ب حـ ، د ط س يمكن القول بتطابقهما. بمعلومية تساوي قياسات الزوايا المتناظرة ووجود ضلع يساوي نظيره في المثلث الآخر، لا نقول في هذه الحالة أن المثلثين لهما نفس الشكل فقط بل أن لهما نفس الحجم أيضًا. لاحظ هنا ضرورة معرفة قياس زاويتين فقط من الثلاث وليس قياس كل الزوايا في المثلثين، فالزاوية الثالثة يمكن الحصول عليها عن طريق استخدام قاعدة (مجموع قياسات زوايا المثلث =180°). **ولهذا فإن المثلثين يتطابقان إذا تساوى في أحدهما قياس زاويتين وطول ضلع مع زاويتين وضلع مناظر في المثلث الآخر**. وهذه الحالة يطلق عليها (**زاوية - ضلع - زاوية**) أو (**ز ض ز**) كشرط لتطابق المثلثين.

ليكن لدينا الحالة التي رسم فيها المثلثان أ ب حـ ، د ط س بحيث:

أ ب = د ط = 5 سم
ب حـ = ط س = 4 سم
أ حـ = د س = 2 سم

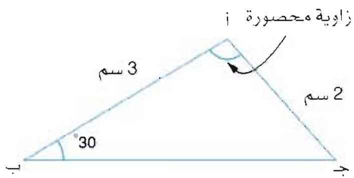
هل المثلثان متطابقان؟



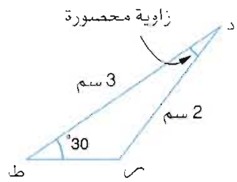
نلاحظ أن أي مثلث له هذه القياسات سيكون له نفس الشكل ، ولهذا فإن المثلثين متطابقان. ومن هنا فإن المثلثين يتطابقان **إذا تساوت فيهما أطوال الأضلاع المتناظرة**. وتسمى هذه الحالة أحيانًا (**ضلع - ضلع - ضلع**) أو (**ض ض ض**) كشرط لتطابق المثلثين.

دعنا نتأمل حالة أخرى حيث رسم المثلثان أ ب جـ، د ط ر بحيث:

∠ب = ∠ط = 30°
أب = د ط = 3 سم
أجـ = د ر = 2 سم



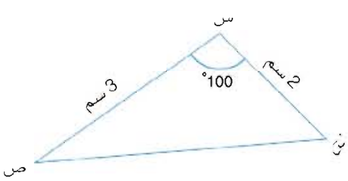
هل المثلثان متطابقان؟

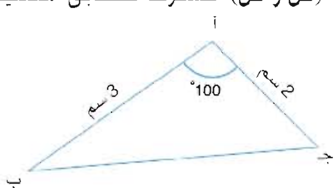


نرى أن المثلثين المرسومين بالقياسات والزوايا المعطاة ليس لهما نفس الشكل ولا نفس المساحة. إذا عُلِم طولا ضلعين فإن الزوايا بينهما (بمعنى أن ∠أ، ∠د) يجب أن تكون معلومة وتسمى الزوايا المحصورة، وفي الحالة أعلاه الزوايا المحصورة بين الضلعين غير متساوية في القياس بمعنى أن (قياس ∠أ ≠ قياس ∠د) ومن ثم فإن المثلثين غير متطابقين، إلا أنهما يتطابقان إذا **تساوى الضلعان وقياس الزاوية المحصورة بينهما**. وتسمى هذه الحالة أحيانًا (**ضلع - زاوية - ضلع**) أو (**ض ز ض**) كشرط لتطابق المثلثين.

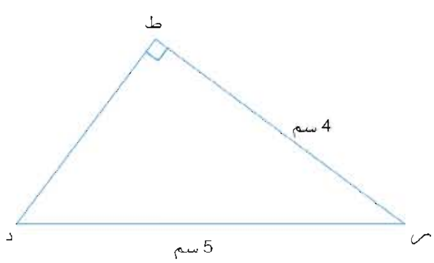
ملحوظة

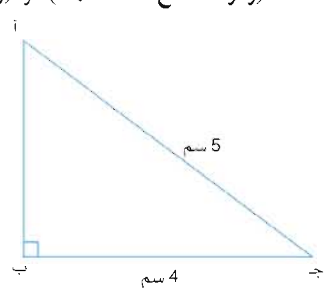
المثلثان أ ب جـ . س ص ش متطابقان. السبب: ض ز ض.





وأخيرًا بالنسبة للحالة الخاصة بالمثلثين قائمي الزاوية. نرى تطابقهما إذا **ساوى الوتر وضلع في أحد المثلثين نظائرهما في المثلث الآخر**، وتسمى أحيانًا هذه الحالة (**وتر - ضلع - القائمة**) أو (**و ض ق**) كشرط لتطابق المثلثين.





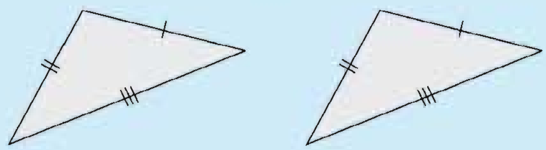
على سبيل المثال، المثلثان أ ب جـ، د ط ر متطابقان لأن:

∠ب = ∠ط = 90° (قائمة)
أجـ = د ر = 5 سم (الوتر)
ب جـ = ط ر = 4 سم (أضلاع)

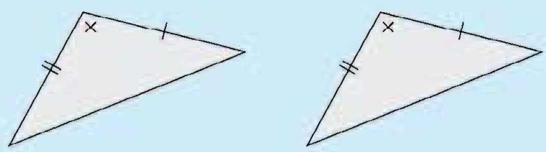
يمكن كتابة ذلك رمزيًّا Δ أ ب جـ ≡ Δ د ط ر حيث "≡" تعني "يطابق" والرؤوس المتناظرة يجب أن تتزاوج بشكل صحيح.

يتطابق المثلثان إذا تحقق أي شرط من الشروط الآتية:

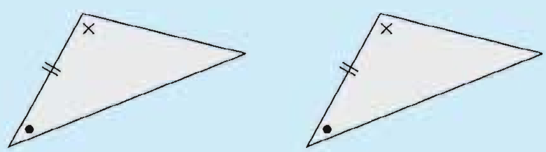
1- الأضلاع المتناظرة متساوية في الطول (ض ض ض):



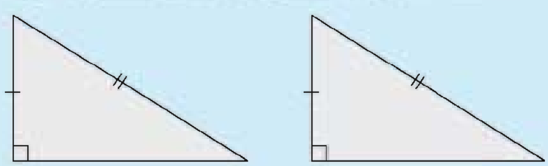
2- تساوى ضلعان وقياس الزاوية المحصورة بينهما (ض ز ض):



3- تساوى قياس زاويتين وضلع متناظر (ز ض ز):

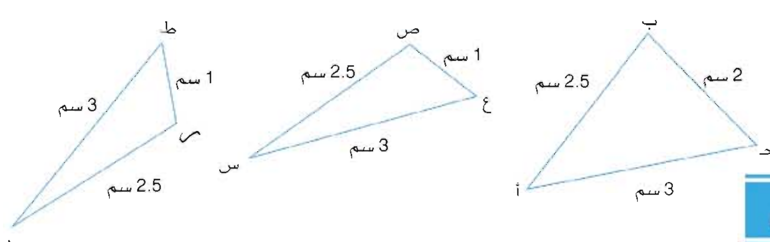


4- بالنسبة للمثلث قائم الزاوية: تساوى الوتر وضلع متناظر (و ض ق):



مثال 1:

حدد أيًّا ما يأتي زوج من المثلثات المتطابقة موضحًا أسباب إجابتك.



الحل

دط = س ع

ط ر = ع ص

ر د = س ص

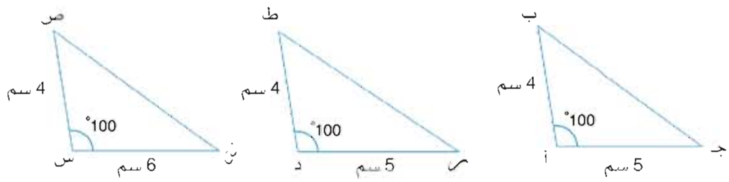
∴ Δ د ط ر ≡ Δ س ع ص (ض ض ض)

ملحوظة

يجب أن تتزاوج رؤوس الزوايا المتناظرة بشكل صحيح.

مثال 2:

حدد أيًّا ما يأتي زوج من المثلثات المتطابقة موضحًا أسباب إجابتك.



الحــل

أ ب = د ط

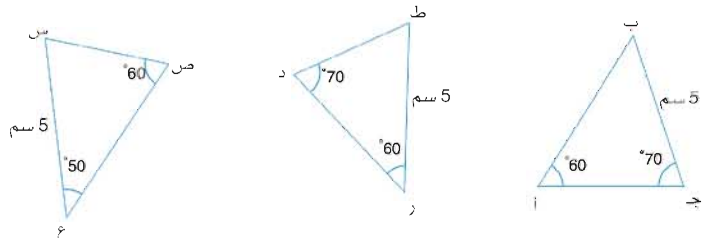
∠ أ = ∠ د

أ جـ = د ى

∴ Δ أ ب جـ ≡ Δ د ط ى (ض ز ض)

مثال 3:

أوجد ∠ ب، ثم حدد أيًّا ما يأتي زوج من المثلثات المتطابقة موضحًا سبب إجابتك.



الحــل

قياس ∠ ب = 180° − 60° − 70°

= 50°

قياس ∠ س = 180° − 60° − 50°

= 70°

∴ قياس ∠ ب = قياس ∠ ع

ب جـ = س ع

قياس ∠ جـ = قياس ∠ س

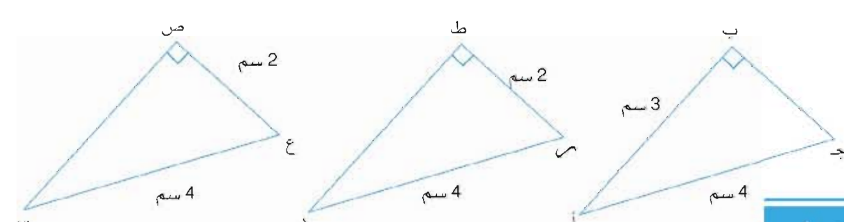
∴ Δ أ ب جـ ≡ Δ ص ع س (ز ض ز)

ملحوظة

المثلثان أ ب جـ، د ط ى ليسا متطابقين. ورغمًا من تساوي ضلع واحد وزاويتين من المثلثين. فالأضلاع المتساوية ليست متناظرة.

مثال 4:

حدد أيًّا ما يأتي زوج من المثلثات المتطابقة موضحًا سبب إجابتك.



الحــل

قياس ∠ ط = قياس ∠ ص = 90°

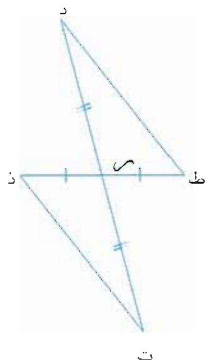
د ى = س ع

ط ى = ص ع

∴ Δ د ط ى ≡ Δ س ص ع (و ض ق)

مثال 5:

بالنسبة للشكل المعطى دمت، ذمط مستقيمان، اثبت أن المثلثين دطم، ت ذم متطابقان.



الحـــل

طم = ذم (معطى)

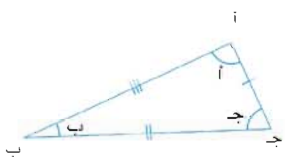
دم = تم (معطى)

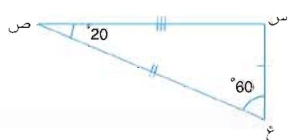
∠ دمط = ∠ تمذ (زوايا رؤوس متقابلة)

∴ Δ دطم ≡ Δ ت ذم (ض ز ض)

مثال 6:

بالنسبة للمثلثين المتطابقين الآتيين، أوجد قياسات الزوايا المجهولة المشار إليها.





الحـــل

قياس ∠س = 180° − 20° − 60°

= 100°

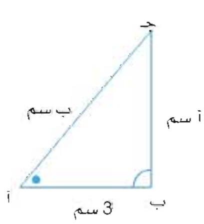
Δ أ ب جـ ≡ Δ س ص ع (ض ض ض)

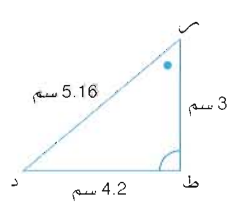
∴ قياس ∠أ = قياس ∠س، قياس ∠ب = قياس ∠ص، قياس ∠جـ = قياس ∠ع

∴ قياس ∠أ = 100°، قياس ∠ب = 20°، قياس ∠جـ = 60°

مثال 7:

بالنسبة للمثلثين المتطابقين. أوجد أطوال الأضلاع المجهولة المشار إليها.





الحـــل

Δ أ ب جـ ≡ Δ م د ط

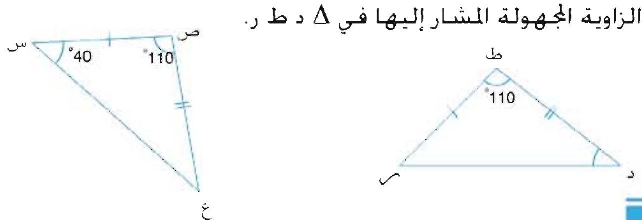
∴ ب جـ = ط د، أ جـ = د م

أ = 4.2، ب = 5.16

ب جـ = 4.2 سم، أ جـ = 5.16 سم

مثال 8:

أوجد الزاوية المجهولة المشار إليها في Δ د ط ر.



الحل

Δ د ط ر ≡ Δ ع ص س (ض ز ض)

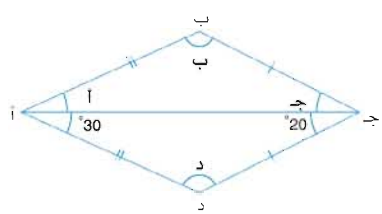
قياس ∠ د = قياس ∠ ع

∠ د = 180° − 110° − 40°

= 30°

مثال 9:

أوجد قياس الزوايا المجهولة المشار إليها في الشكل المرسوم.



الحل

∠ د = 180° − 20° − 30°

= 130°

Δ أ ب جـ ≡ Δ أ د جـ (ض ض ض)

∴ قياس ∠ أ = 30°

قياس ∠ ب = 130°

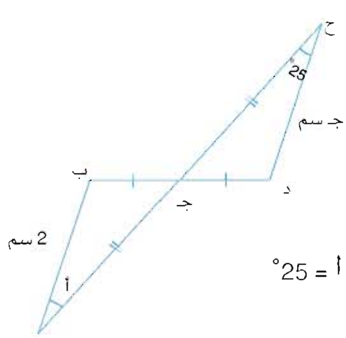
قياس ∠ جـ = 20°

ملحوظة

أ جـ مشترك في كل من المثلثين

مثال 10:

أوجد الضلع المجهول والزاوية المجهولة المشار إليهما في الشكل المرسوم إذا كان ب جـ د ، أ جـ ح مستقيمين.



الحل

Δ أ ب جـ ≡ Δ ح د جـ (ض ز ض)

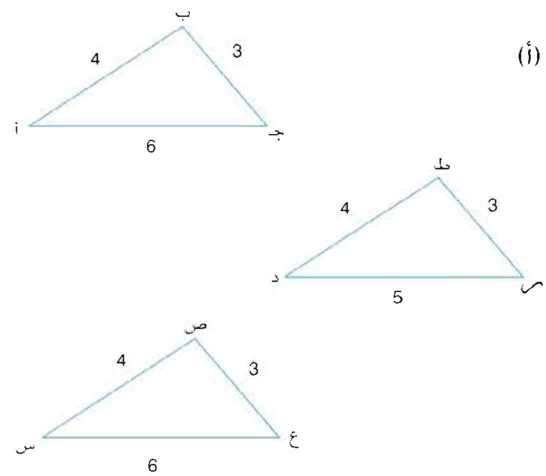
قياس ∠ أ = قياس ∠ ح أي قياس ∠ أ = 25°

ح د = أ ب أي جـ = 2 سم

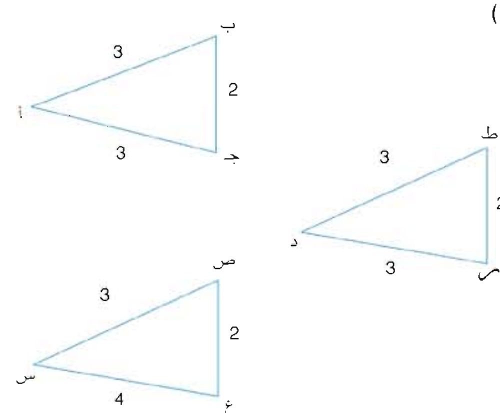
تمرين 8أ

1- حدد زوجي المثلثات المتطابقة في كل مجموعة من المجموعات الآتية. ثم وضح سبب إجابتك. كل الزوايا مقاسة بالدرجات وكل الأطوال مقاسة بالسنتيمترات (المثلثات رسمت لتبدو متطابقة حتى وإن كانت الحقيقة غير ذلك).

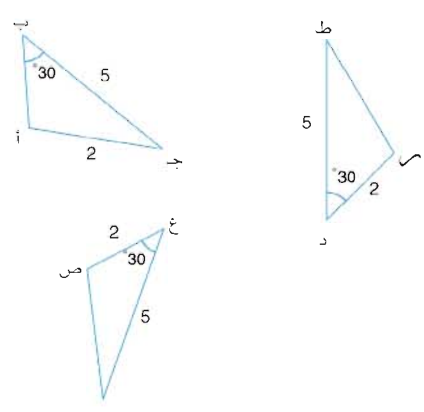
(أ)



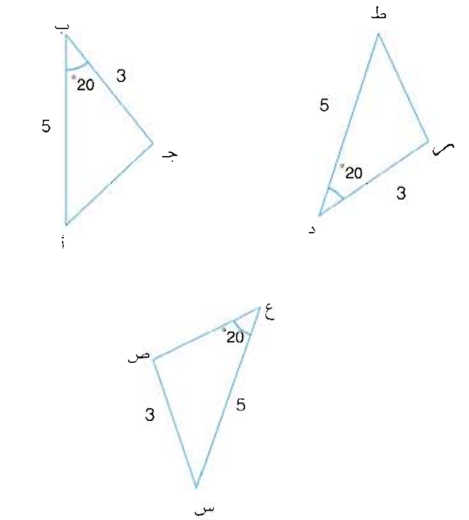
(ب)



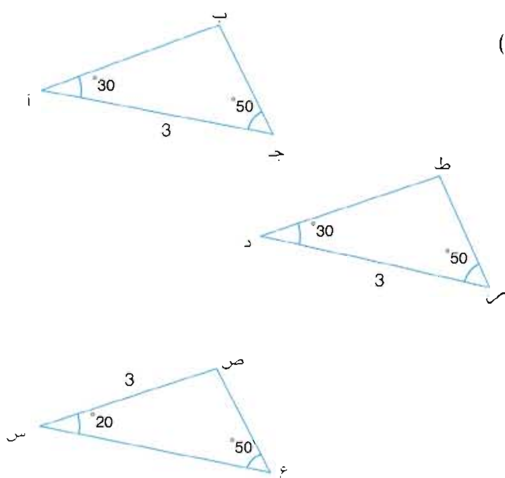
(جـ)



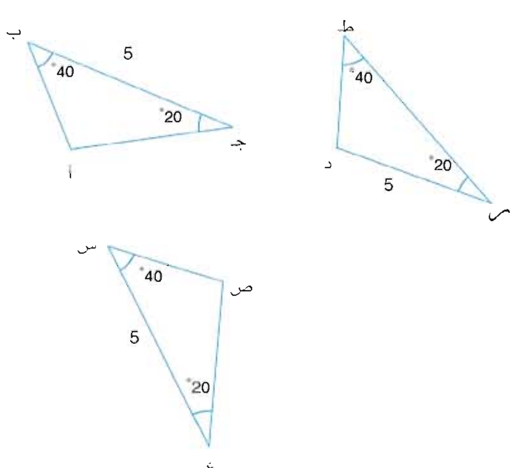
(د)



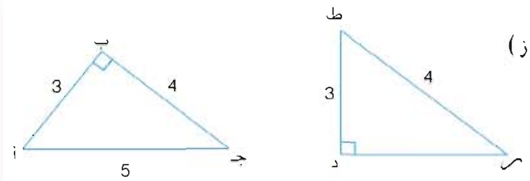
(هـ)

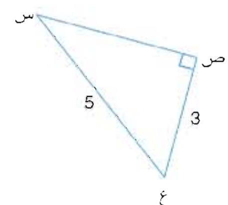


(و)

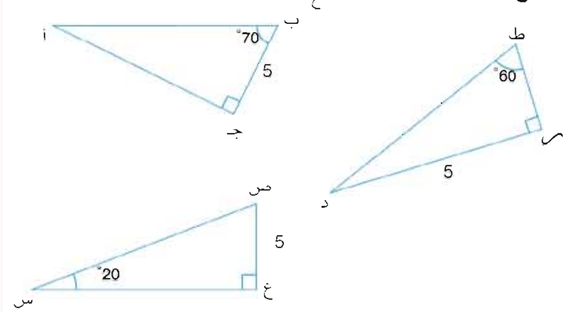


(ز)



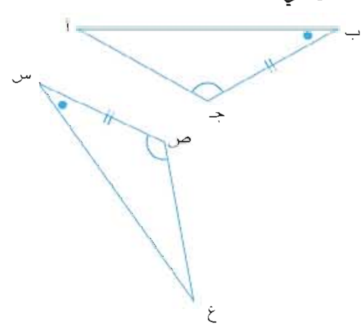


(ح)



2- انقل وأكمل كلًّا مما يأتي:

(أ)



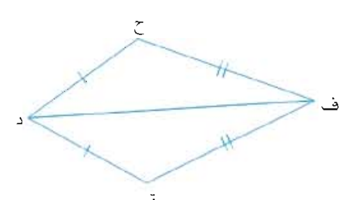
قياس ∠ب = ...

ب جـ = ...

قياس ∠جـ = ...

∴ Δ أ ب جـ ≡ .... (السبب ....)

(ب)



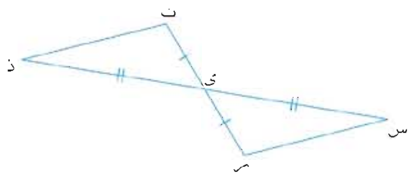
د ح = ...

ح ف = ...

د ف = ... (ضلع مشترك)

∴ Δ د ح ف ≡ .... (السبب ....)

(جـ) ت ي ر، ذ ي س مستقيمان متقاطعان.



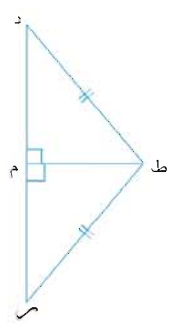
ذ ي = ...

قياس ∠ ذ ي ت = ... (السبب ....)

ت ي = ...

∴ Δ ذ ي ت ≡ .... (السبب ....)

(د)



قياس ∠ د م ط = ... (السبب ....)

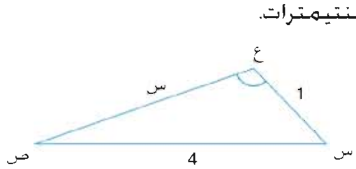
د ط = ...

م ط ضلع ....

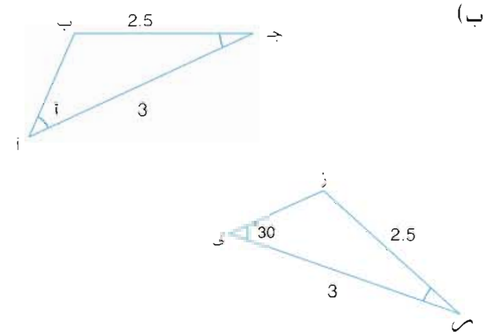
Δ م د ط ≡ .... (السبب ....)

3- أوجد جميع الأضلاع والزوايا المجهولة المشار إليها بالحروف في كل زوج من المثلثات المتطابقة التالية. كل الأضلاع مقاسة بالسنتيمترات.

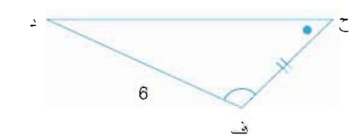
(أ)

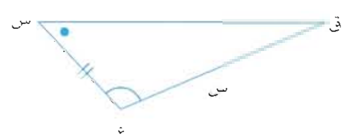


(ب)

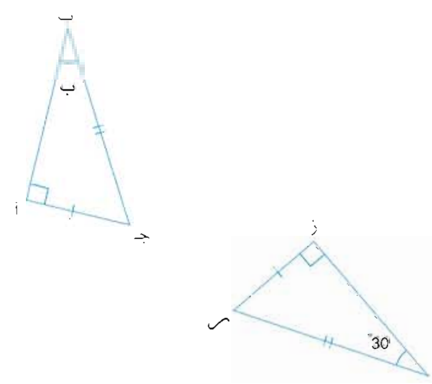


(جـ)

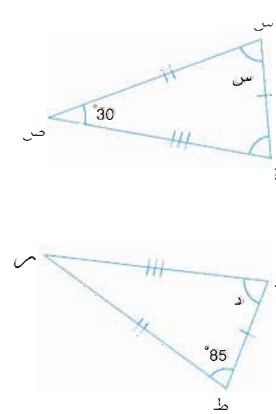




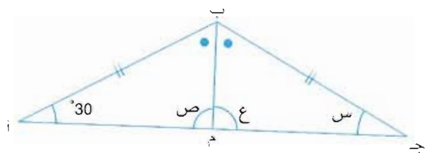
(د)



(هـ)

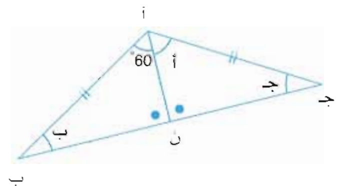


(و)



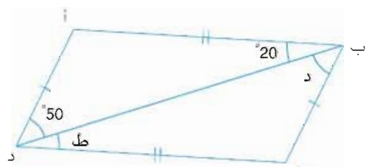
أ م جـ خط مستقيم.

(ز)

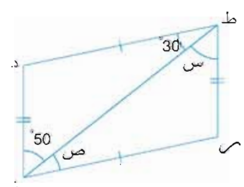


ب ن جـ خط مستقيم.

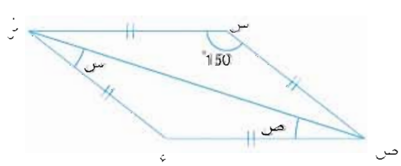
(ح)



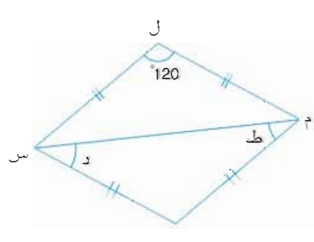
(ط)



(ى)



(ك)



3-8 التشابه Similarity

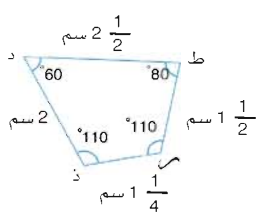
عندما يقوم المهندس المعماري بعمل تصميم هندسي لمبنى فإنه لا يرسمه بنفس الحجم، وإنما يستخدم مقياس رسم مناسب لتصغيره ثم يقوم بإنتاج تصميم مشابه لما سيتم بناؤه.

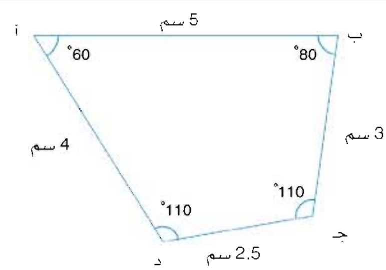
وعندما يقوم المهندس الميكانيكي بإنشاء نموذج لسفينة أو طائرة، فإنه يحافظ على شكل السفينة، أما الحجم فإنه يصغره بمقياس رسم مناسب، ونقول أن هذا النموذج يشابه الجسم الأصلي.

الأشكال المتشابهة لها نفس الشكل ولكن ليس بالضرورة نفس المساحة.

في الشكلين المتشابهين يجب أن يتحقق ما يلي:

- تساوى الزوايا المتناظرة في القياس.
- تناسب الأضلاع المتناظرة في الطول.





بالإشارة إلى المضلعين أ ب حـ ء، د ط ر ذ نجد أن:

قياس ∠ أ = قياس ∠ د

قياس ∠ ب = قياس ∠ ط

قياس ∠ حـ = قياس ∠ ر

قياس ∠ ء = قياس ∠ ذ

أي أن **الزوايا المتناظرة متساوية**.

وأيضًا، $\frac{\text{أ ب}}{\text{د ط}} = \frac{5}{2.5} = 2$

$\frac{\text{ب حـ}}{\text{ط ر}} = \frac{3}{1\frac{1}{2}} = 2$

$\frac{\text{حـ ء}}{\text{ر ذ}} = \frac{2\frac{1}{2}}{1\frac{1}{4}} = 2$

$\frac{\text{ء أ}}{\text{ذ د}} = \frac{4}{2} = 2$

أي أن **الأضلاع المتناظرة لها نفس النسبة**.

وهذا يشير إلى أن المضلعين أ ب حـ ء، د ط ر ذ متشابهان، حيث أن الزوايا المتناظرة متساوية في القياس، والأضلاع المتناظرة متناسبة في الطول.

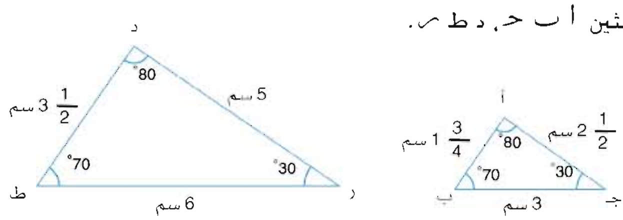
ملحوظة

لسهولة المرجعية، يمكن كتابة الرؤوس المتناظرة في الشكلين الرباعيين واحدًا فوق الآخر كما يلي:

المضلعان $\frac{\text{أ ب حـ ء}}{\text{د ط ر ذ}}$ متشابهان

4-8 المثلثات المتشابهة Similar Triangles

تأمل المثلثين أ ب جـ، د ط ر.



نلاحظ أن هذين المثلثين لهما نفس الشكل حيث

∠ أ = ∠ د = 80°، ∠ ب = ∠ ط = 70°، ∠ جـ = ∠ ر = 30°

ولكن ليس لهما نفس المساحة. في الحقيقة أطوال أضلاع Δ د ط ر ضعف أطوال الأضلاع التي تناظرها في Δ أ ب جـ. يمكن أيضًا قول أن الأطوال المتناظرة في Δ أ ب جـ، Δ د ط ر لهما النسبة 1 : 2. ونقول أن مثل هذين المثلثين متشابهان. وسوف نحتاج إلى كم أدنى من المعلومات للبرهنة على التشابه.

يتشابه المثلثان إذا تحقق أحد الشروط التالية:

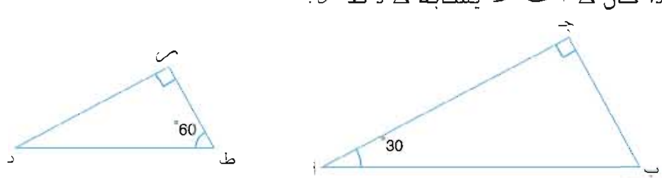
1- تساوى قياس الزوايا المتناظرة (ز ز ز) (إذا تساوى قياس زاويتين في مثلث، وقياس زاويتين في المثلث الآخر، فإن قياس الزاوية الثالثة في المثلث الأول تساوى قياس نظيرتها في المثلث الآخر).

2- أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة.

3- إذا تناسب طولا ضلعين متناظرين في المثلث، وتساوى قياس الزاوية المحصورة بينهما.

مثال 11:

حدد ما إذا كان Δ أ ب جـ يشابه Δ د ط ر.



الحل

في Δ أ ب جـ، قياس ∠ب = 180° − 90° − 30°

= 60°

في Δ د ط ر، قياس ∠ د = 180° − 90° − 60°

= 30°

∴ قياس ∠ أ = ∠ د

قياس ∠ب = ∠ ط

قياس ∠جـ = ∠ ر

∴ المثلثان متشابهان (ز ز ز).

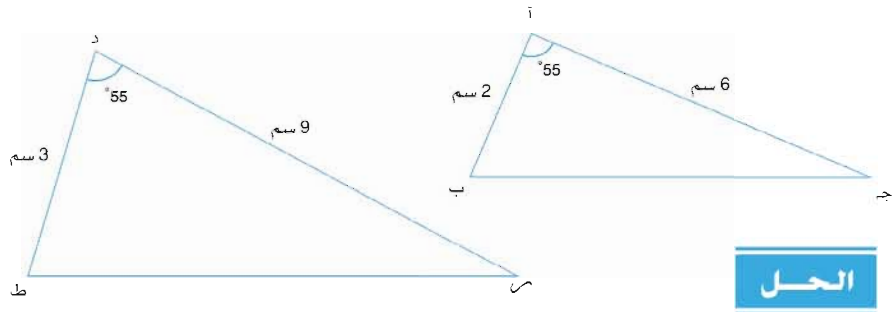
ملاحظة

لسهولة المرجعية، يمكن كتابة الرؤوس المتناظرة في المثلثين واحدًا فوق الآخر كما يلي:

المثلثان Δ أ ب جـ / Δ د ط ر متشابهان

مثال 12:

اثبت أن Δ أ ب جـ يشابه Δ د ط ى.



الحل

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{د ط}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\text{أ جـ}}{\text{د ى}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

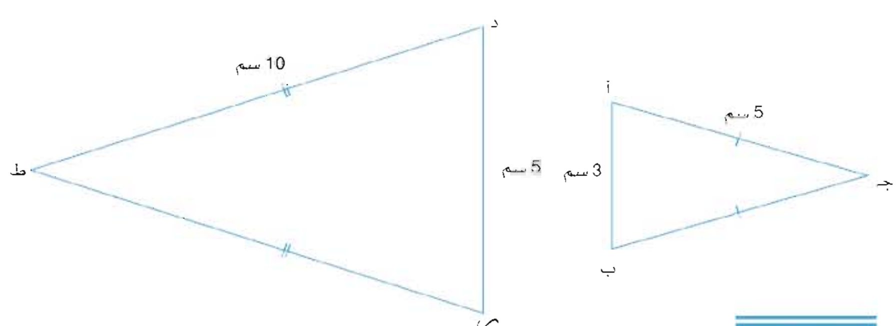
$$\angle \text{أ} = \angle \text{د}$$

يتناسب ضلعان متناظران ويحصرا زاوية متساوية.

$\therefore$ Δ أ ب جـ يشابه Δ د ط ى.

مثال 13:

تحقق هل Δ أ ب جـ يشابه Δ د ط ى؟



الحل

$$\frac{\text{أ جـ}}{\text{د ط}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

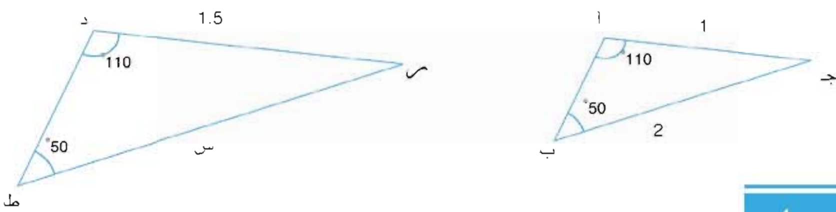
$$\frac{\text{أ ب}}{\text{د ى}} = \frac{3}{5} \neq \frac{1}{2}$$

زوج الأضلاع المتناظرة ليس لهما نفس النسبة.

$\therefore$ المثلثان غير متشابهين.

مثال 14:

أوجد قيمة س مع العلم بأن كل الأطوال بالسنتيمتر.



الحل

عندنا قياس ∠أ = قياس ∠د = 110°

قياس ∠ب = قياس ∠ط = 50°

قياس ∠جـ = قياس ∠هـ = 20°

∴ الزوايا المتناظرة متساوية في القياس.

∴ Δ أ ب جـ ، Δ د ط هـ متشابهان (ز ز ز).

ومن ثم فإن أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

أي ط هـ / ب جـ = د هـ / أ جـ

س / 2 = 1.5 / 1

س = 2 × 1.5 = 3

ملحوظة

من الأسهل جبريًا اعتبار الضلع المجهول كبسط للنسبة الأولى.

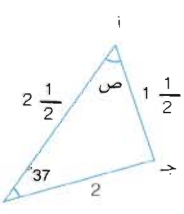
لاحظ أن

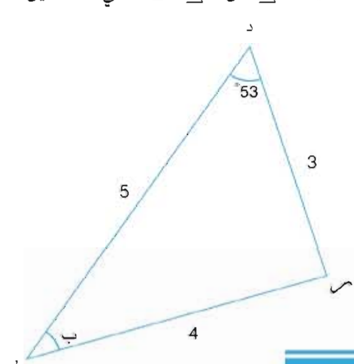
د ↕ أ ، ط ↕ ب ، هـ ↕ جـ

∴ ط هـ / ب جـ = د هـ / أ جـ

مثال 15:

أوجد قيمة ∠ص ، ∠ب في المثلثين الآتيين:





الحل

د ط / أ ب = د هـ / أ جـ = ط هـ / ب جـ = 2 / 1

الأضلاع المتناظرة متناسبة.

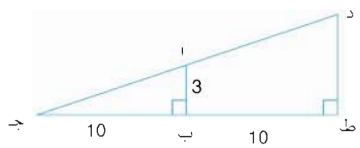
∴ Δ د ط هـ ، Δ أ ب جـ متشابهان

∴ ∠د = ∠أ ، ∠ط = ∠ب

∴ ∠ص = 53° ، ∠ب = 37°

مثال 16:

بالنسبة للشكل الموضح أوجد طول $\overline{\text{دط}}$. جميع الأطوال بالسنتيمتر.



الحـــل

يمكن إعادة رسم الشكل كما هو موضح أدناه.

$\angle$ ط = $\angle$ ب = 90°

$\angle$ جـ مشتركة في Δ د ط جـ، Δ ا ب جـ

وبما أن زاويتين متناظرتين متساويتان.

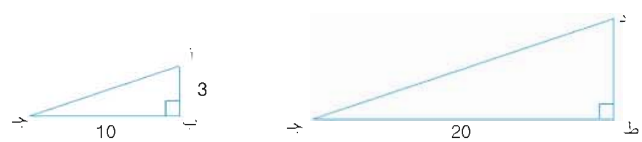
Δ د ط جـ ، Δ ا ب جـ متشابهان.

$\therefore \frac{\text{د ط}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ط جـ}}{\text{ب جـ}}$

$\frac{\text{د ط}}{3} = \frac{20}{10}$

د ط = $\frac{20}{10} \times 3$

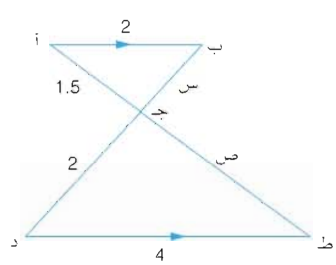
د ط = 6سم



مثال 17:

ا جـ ط ، ب جـ د مستقيمان. فإذا كان $\overline{\text{ا ب}}$ // $\overline{\text{د ط}}$ أوجد قيمة س ، ص [جميع الأطوال بالسنتيمتر].

الحـــل



$\angle$ ا جـ ب = $\angle$ د جـ ط (زوايا رؤوس متناظرة)

قياس $\angle$ ا = قياس $\angle$ ط

قياس $\angle$ ب = قياس $\angle$ د

$\therefore$ قياسات الزوايا المتناظرة متساوية.

$\therefore \Delta$ ا ب جـ ، Δ ط د جـ متشابهان (ز ز ز)

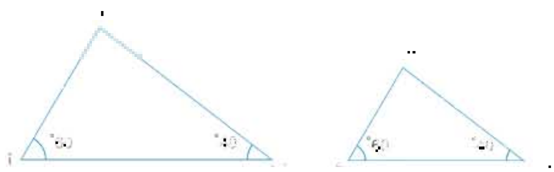
$\therefore \frac{\text{ا ب}}{\text{د ط}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{ط جـ}}$ (الأضلاع المتناظرة متناسبة)

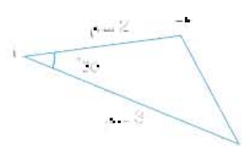
$\frac{2}{4} = \frac{\text{س}}{2} = \frac{1.5}{\text{ص}}$

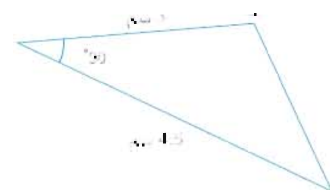
بمعنى $\frac{2}{4} = \frac{\text{س}}{2}$ و $\frac{2}{4} = \frac{1.5}{\text{ص}}$

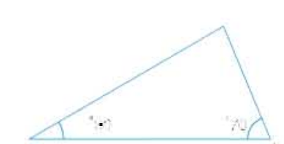
س = $\frac{4}{4}$	ص = $\frac{4 \times 1.5}{2}$
$\therefore$ س = 1سم	$\therefore$ ص = 3سم

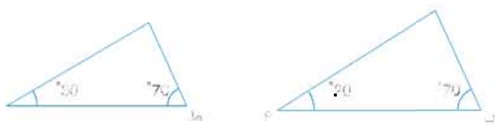
تمرين 8 ب

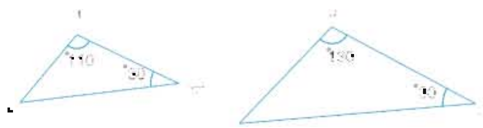


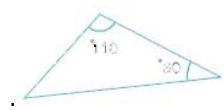


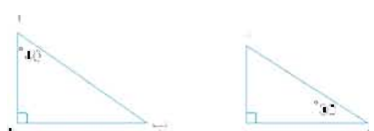


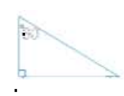


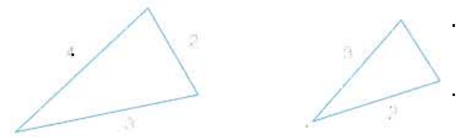


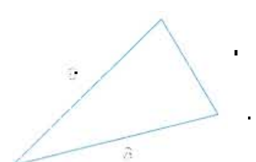


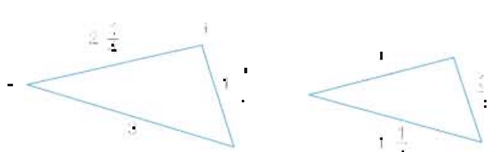


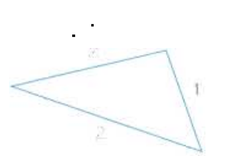






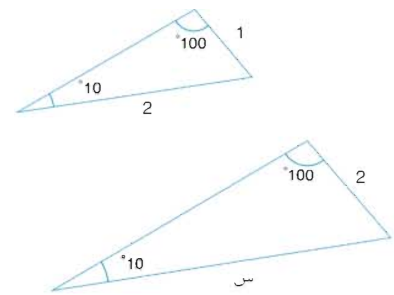




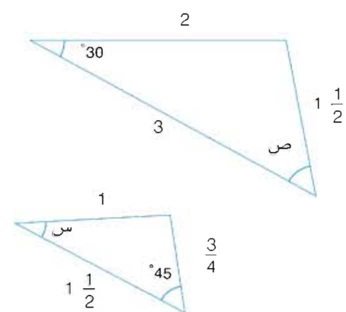


3- أوجد الزوايا والأضلاع المجهولة والمشار إليها في الأشكال المرسومة [كل الأطوال مقاسة بالسنتيمتر].

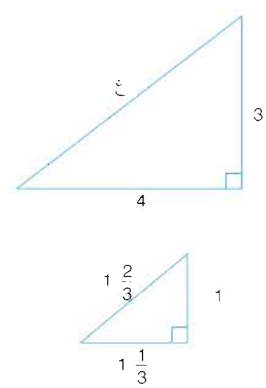
(أ)



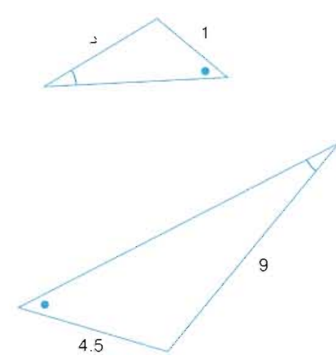
(ب)



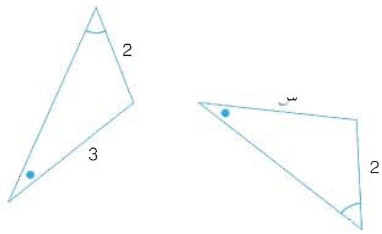
(جـ)



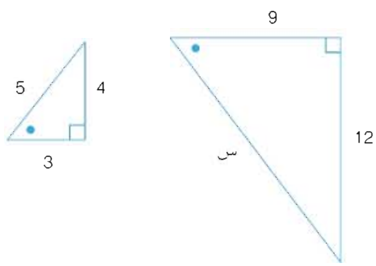
(د)



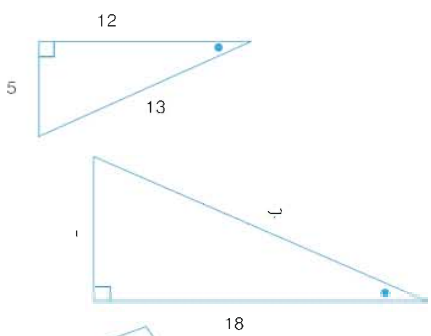
(هـ)



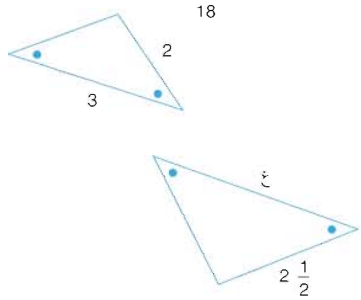
(و)



(ز)

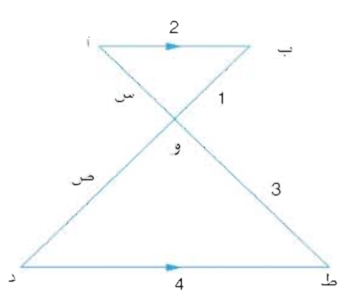


(ح)

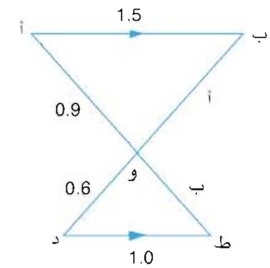


4- أوجد الأطوال المشار إليها في الأشكال المرسومة علمًا بأن أ و ط ، ب و د مستقيمان في الشكل المرسوم في (أ) ، (ب) ، (حـ)
[جميع الأطوال بالسنتيمتر].

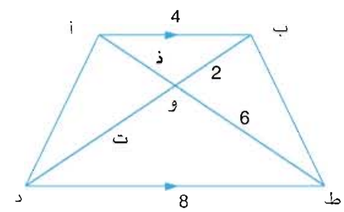
(أ)



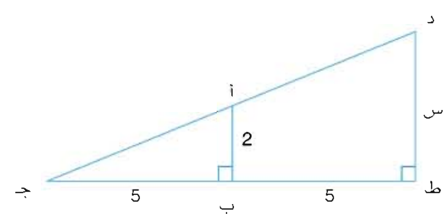
(ب)



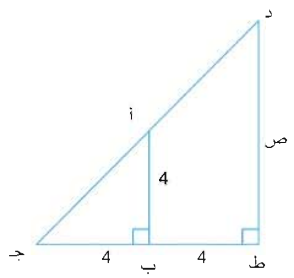
(جـ)



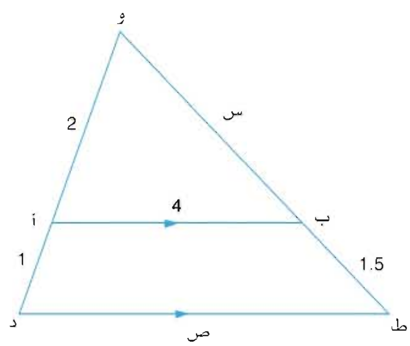
(د)



(هـ)



(و)



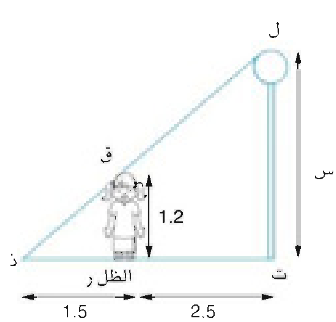
5-8 تطبيقات على التشابه Applications of Similarity

الهندسة لها الكثير من التطبيقات في حياتنا اليومية، وخاصة مفهوم التشابه.

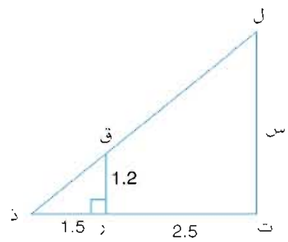
مثال 18:

بنت طولها 1.2م وقفت على بعد 2.5م من مصباح إضاءة في الشارع وألقت ظلًّا على الأرض طوله 1.5م فما إرتفاع مصباح الإضاءة؟

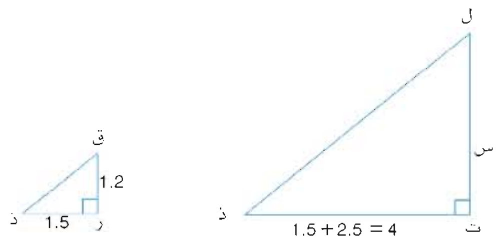
الحـل



بإعادة رسم الشكل هندسيًّا مرة أخرى . نجد أن الشكل:



ينقسم إلى مثلثين متشابهين ق ∽ ذ. ل ت ذ



وحيث $\frac{\text{ل ت}}{\text{ق ر}} = \frac{\text{ذ ت}}{\text{ذ ر}}$

أي $\frac{4}{1.5} = \frac{\text{س}}{1.2}$

$\therefore \text{س} = \frac{1.2 \times 4}{1.5}$

$= \frac{4.8}{1.5} = \frac{\cancel{48}^{16}}{\cancel{15}_{5}} = 3.2$

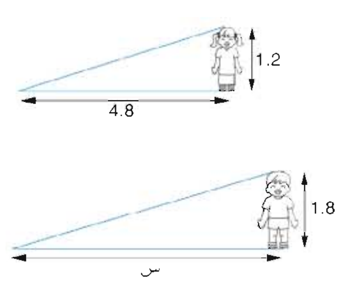
ولهذا فإن ارتفاع مصباح الإضاءة 3.2 متر فوق سطح الأرض.

ملحوظة

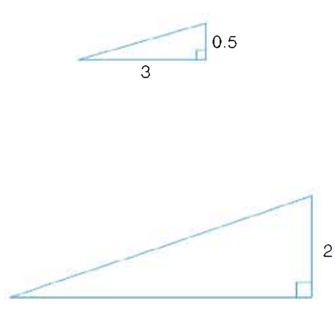
الأضلاع المتناظرة تكون في نفس النسبة. اضرب الطرفين في 1.2

تمرين 8 جـ

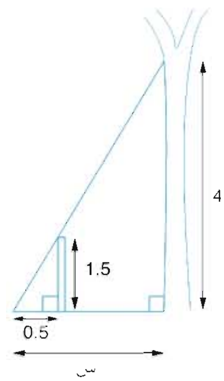
1- فتاة طولها 1.2م ألقت ظلًّا طوله 4.8 متر في وقت معين من الصباح . محمد طوله 1.8 متر . فما طول ظله إذا وقف في نفس الموضع في نفس الوقت؟



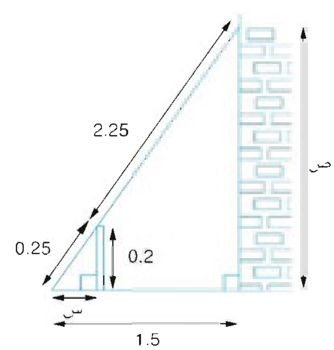
2- عصا طولها 0.5 متر ألقت ظلًّا طوله 3 أمتار، فما طول ظل عصا طولها 2متر وضعت في نفس الموضع؟ ونفس الوقت.



3- يرتكز سلم على حائط طوله 1.5متر، وطرفه العلوي على شجرة ارتفاعها 4 أمتار فوق سطح الأرض وطرفه السفلي على الأرض. فإذا كان الحائط يبعد 0.5 متر عن قاعدة السلم (القياس في مستوى سطح الأرض) . أوجد المسافة الأفقية بين قاعدة الشجرة وقاعدة السلم.



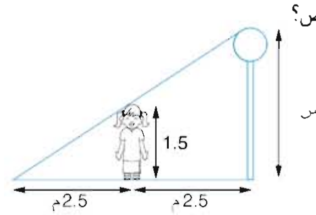
4- سلم طوله 2.5م يرتكز على حائط رأسي، ونهايته الأخرى على الأرض تبعد عن قاعدة الحائط 1.5 متر، فإذا وضعت دعامة رأسية طولها 0.2م بين الحائط والسلم كما هو موضح.



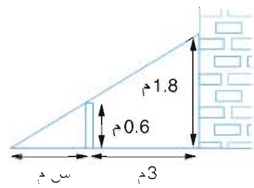
(أ) فكم يرتفع الحائط عند النقطة المسنود عليها رأس السلم؟

(ب) ما هي المسافة الأفقية من طرف قاعدة السلم إلي الدعامة الرأسية ؟

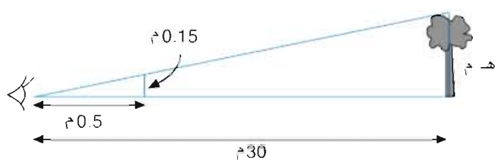
5- فتاة طولها 1.5 م تقف على بعد 2.5 متر من عمود إنارة في الشارع ألقت ظلًا طوله 2.5م. فكم يرتفع عمود الإضاءة عن سطح الأرض؟



6- يرتكز طرف سلم على الأرض والطرف الآخر على حائط رأسي بارتفاع 1.8م فإذا وضعت دعامة رأسية طولها 0.6م تحت السلم على بعد 3م عن الحائط. أوجد المسافة الأفقية بين الدعامة وقاعدة السلم.

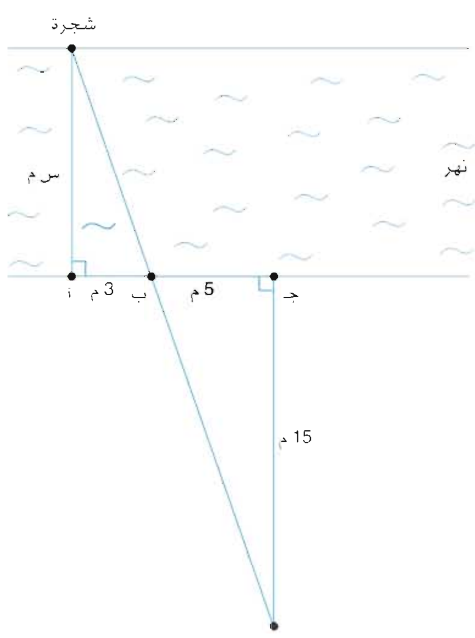


-7



قدر كشاف ارتفاع شجرة بإمساك مسطرة طولها 15سم رأسيًّا على بعد 0.5م أمامه . فإذا كان يبعد عن الشجرة مسافة 30م كما هو موضح بالشكل فما هو طول الشجرة المقدر؟

-8



أراد كشاف أن يقدر عرض نهر، مستخدمًا شجرة على الشاطئ المقابل من النهر، غرس أعمدة رأسية في النقط أ ، ب ، جـ ، د كما هو موضح. احسب عرض النهر المقدر.

6-8 مساحتا الشكلين المتشابهين — Areas of Similar Figures

ستساعدك الأنشطة التالية في استقصاء النسبة بين مساحتي الشكلين المتشابهين.

مهارة التفكير: استنباط

في نهاية الأنشطة سوف يمكنك استخدام مهارة الاستنباط للحصول على صيغة رياضية للنسبة بين مساحتي الشكلين المتشابهين.

أنشطة

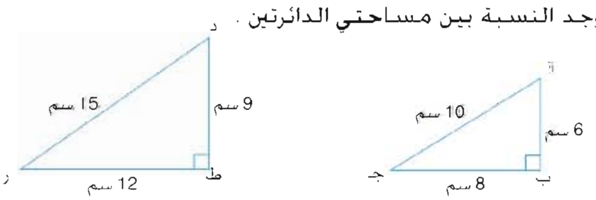
1- (أ) ما مساحة مربع طول ضلعه 2 سم ؟
(ب) ما مساحة مربع طول ضلعه 6 سم ؟
(جـ) أوجد النسبة بين طولي ضلعي المربعين.
(د) أوجد النسبة بين مساحتي المربعين.

2- (أ) ما مساحة مربع طول ضلعه 3 سم ؟
(ب) ما مساحة مربع طول ضلعه 15 سم ؟
(جـ) أوجد النسبة بين طولي ضلعي المربعين.
(د) أوجد النسبة بين مساحتي المربعين.

3- (أ) ما مساحة دائرة نصف قطرها 7 سم ؟ (اكتب إجابتك بدلالة π).
(ب) ما مساحة دائرة نصف قطرها 21 سم ؟ (اكتب إجابتك بدلالة π).
(جـ) أوجد النسبة بين طولي نصفي قطري الدائرتين.
(د) أوجد النسبة بين مساحتي الدائرتين .

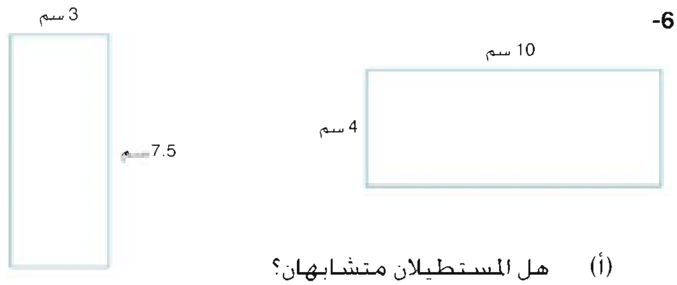
4- (أ) ما مساحة دائرة طول نصف قطرها 14 سم ؟ (اكتب إجابتك بدلالة π).
(ب) ما مساحة دائرة طول نصف قطرها 70 سم ؟ (اكتب إجابتك بدلالة π).
(جـ) أوجد النسبة بين طولي نصفي قطري الدائرتين.
(د) أوجد النسبة بين مساحتي الدائرتين .

5-



(أ) هل المثلثان أ ب جـ، د ط ر متشابهان؟
(ب) أوجد النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.
(جـ) أوجد النسبة بين مساحتي المثلثين.

-6



(أ) هل المستطيلان متشابهان؟

(ب) أوجد النسبة بين أطوال أضلاعهما المتناظرة.

(جـ) أوجد النسبة بين مساحتيهما.

يتضح من الأنشطة السابقة أن النسبة بين مساحتي الشكلين المتشابهين ليست هي النسبة بين أطوال أضلاعهما المتناظرة.
وبتعميم النتائج:

> **النسبة بين مساحتي الشكلين المتشابهين** هي مربع نسبة طولي ضلعين متناظرين فيهما.
>
> بمعنى $\frac{أ_2}{أ_1} = \left(\frac{ل_2}{ل_1}\right)^2$

مثال 19:

مستطيل مساحته 15 سم^2. أوجد مساحة مستطيل آخر طوله 3 أضعاف طول المستطيل الأول وعرضه 3 أضعاف عرض المستطيل الأول .

الحل

∵ المستطيلان متشابهان.

$$\therefore \frac{أ_2}{أ_1} = \left(\frac{ل_2}{ل_1}\right)^2$$

$$\frac{أ_2}{15} = \left(\frac{3}{1}\right)^2$$

∴ مساحة المستطيل الثاني = أ$_2$ = 15 × 9 = 135 سم^2

> **ملحوظة**
>
> أ$_1$ و ل$_1$ تشير إلى مساحة وطول ضلع الشكل الأول بينما أ$_2$ و ل$_2$ تشير إلى مساحة وطول ضلع الشكل الثاني.
> لاحظ تشابه المستطيلين أو تناسب أبعادهما المتناظرة.

مثال 20:

دائرتان مساحتيهما 80 سم^2، 20 سم^2، أوجد النسبة بين طولي نصفي قطريهما.

الحل

$$\left(\frac{نق_2}{نق_1}\right)^2 = \frac{أ_2}{أ_1} = \frac{80}{20} = 4$$

$$\frac{نق_2}{نق_1} = \sqrt{4} = 2$$

∴ النسبة بين طولي نصفي قطري الدائرتين 2 : 1

تمرين 8 د

1- مربع مساحته 10 سم^2، أوجد مساحة المربع الذي طول ضلعه:
(أ) ضعف طول الأول.
(ب) ثلاثة أمثال الطول.
(جـ) خمسة أمثال الطول.
(د) ثمانية أمثال الطول.
(هـ) نصف الطول.
(و) مرة ونصف طول المربع الأول.

2- دائرة مساحتها 8 سم^2، أوجد مساحة الدائرة التي طول نصف قطرها:
(أ) ضعف طول نصف قطر الأولى .
(ب) ثلاثة أمثال طول نصف قطرها .
(جـ) ستة أمثال طول نصف قطرها .
(د) عشرة أمثال طول نصف قطرها .
(هـ) نصف طول نصف قطرها .
(و) ربع طول نصف قطرها .
(ز) مرة ونصف طول نصف قطرها.
(ح) مرتان ونصف طول نصف قطرها.

3- أوجد النسبة بين طولي ضلعين متناظرين في مثلثين متشابهين إذا كانت مساحتهما:
(أ) 5 سم^2، 20 سم^2
(ب) 3 م^2، 48 م^2
(جـ) 18 سم^2، 2 سم^2
(د) 6 مم^2، 1.5 مم^2
(هـ) 108 م^2، 3 م^2
(و) 1 سم^2، 100 سم^2
(ز) 4 سم^2، 9 سم^2
(ح) 72 سم^2، 50 سم^2
(ط) 128 سم^2، 98 سم^2
(ى) 63 مم^2، 175 مم^2
(ك) 1 سم^2، 1 مم^2
(ل) 1 سم^2، 1 م^2

4- قرص دائري مساحته 5 سم^2، أوجد مساحة قرص دائري آخر طول نصف قطره 3 أمثال طول نصف قطر القرص الأول.

5- متوازيا أضلاع متشابهان لهما ضلعان متناظران طولهما 7 سم، 9 سم، أوجد النسبة بين مساحتيهما.

6- طائرتان ورقيتان متشابهتان مساحتهما 30 سم^2، 7.5 سم^2، أوجد النسبة بين أطوال أضلاعهما المتناظرة.

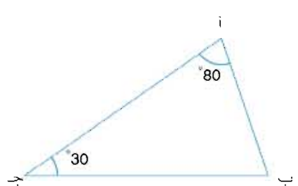
7- يتكلف طلاء نيشان دائري 18 دينارًا، أوجد تكلفة طلاء نيشان آخر يشابهه وطول نصف قطره ضعف طول نصف قطر الأول.

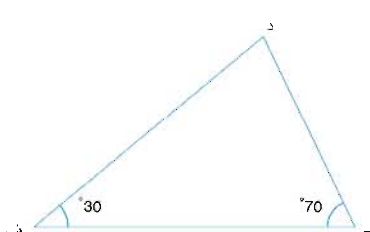
8- يتكلف شراء لوح زجاجي 11.5 دينار، أوجد تكاليف شراء لوح زجاجي آخر ليغطي نافذة ثلاثة أمثال حجم الأولى.

9- استُخدم مقياس رسم في عمل تصميم هندسي لمبنى بنسبة 1 : 50 فما هي نسبة مساحة جزء من التصميم إلى المساحة المناظرة في المبنى الفعلي؟

10- تكلفة تغطية فناء 900 دينار، أوجد تكلفة تغطية فناء آخر بنفس المادة المستخدمة إذا كانت أبعاده نصف أبعاد الفناء الأول.

11- (أ) هل Δ أ ب جـ، Δ ى ح ف متشابهان؟
(ب) إذا كان Δ أ ب جـ مساحته 30 سم^2، Δ ى ح ف مساحته 67.5 سم^2،
(i) أوجد النسبة بين طولي الضلعين المتناظرين.
(ii) إذا كان أ جـ = 10.7 سم احسب د ف.
(iii) إذا كان ف ح = 16.8 سم احسب جـ ب.



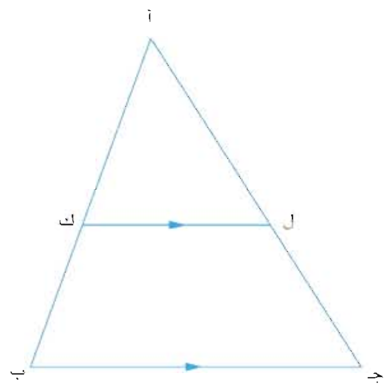


-12 إذا كان أ ب = 7 سم، أ ك = 4 سم و مساحة Δ أ ب حـ = 49 سم^2.

أوجد:

(أ) مساحة Δ أ ك ل.

(ب) مساحة شبه المنحرف ك ل حـ ب.



7-8 حجما الشكلين المتشابهين Volumes of Similar Figures

ستساعدك الأنشطة التالية في استقصاء النسبة بين حجمي الشكلين المتشابهين.

مهارة التفكير: استنباط

في نهاية الأنشطة . سوف تكون قادرًا على استخدام مهارة الاستنباط للحصول على الصيغة الرياضية للنسبة بين حجمي الشكلين المتشابهين.

أنشطة

-1 (أ) ما حجم مكعب طول حرفه 3 سم؟
(ب) ما حجم مكعب طول حرفه 6 سم؟
(جـ) أوجد النسبة بين طولي حرفي المكعبين.
(د) أوجد النسبة بين حجمي المكعبين.

-2 (أ) ما حجم مكعب طول حرفه 4 سم؟
(ب) ما حجم مكعب طول حرفه 1 سم؟
(جـ) أوجد النسبة بين طولي حرفي المكعبين.
(د) أوجد النسبة بين حجمي المكعبين.

-3 (أ) ما حجم متوازي مستطيلات طوله 3 سم، وعرضه 5 سم، وارتفاعه 2 سم؟
(ب) ما حجم متوازي مستطيلات طوله 15 سم، وعرضه 25 سم، وارتفاعه 10 سم؟
(جـ) هل متوازيا المستطيلات متشابهان؟
(د) أوجد النسبة بين طولي متوازيي المستطيلات المتناظرة.
(هـ) أوجد النسبة بين حجمي متوازيي المستطيلات.

4- (أ) ما حجم مكعب طول حرفه 2 سم؟
(ب) ما حجم مكعب طول حرفه $\frac{1}{2}$ سم؟
(جـ) أوجد النسبة بين طولي حرفي المكعبين.
(د) أوجد النسبة بين حجمي المكعبين.

5- (أ) ما حجم أسطوانة دائرية طول نصف قطر قاعدتها 7 سم وطولها 10 سم؟ $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$
(ب) ماحجم أسطوانة دائرية طول نصف قطر قاعدتها 21 سم وطولها 30 سم؟
(جـ) هل الأسطوانتان متشابهتان؟
(د) أوجد النسبة بين الأطوال المتناظرة في الأسطوانتين.
(هـ) أوجد النسبة بين حجمي الأسطوانتين.

يتضح مرة أخرى من الأنشطة أن النسبة بين حجمي شكلين متشابهين ليست نفس النسبة بين أطوالهما المتناظرة.

ويمكن تعميم النتائج كما يلي:

النسبة بين حجمي شكلين متشابهين هي مكعب النسبة بين أطوالهما المتناظرة.

بمعنى $\frac{ح_2}{ح_1} = \left(\frac{ل_2}{ل_1}\right)^3$

حيث ح الحجم ول الطول.

ملحوظة

مثال21:
يشير $ح_1$، $ل_1$ إلى حجم وطول متوازي المستطيلات الأول ويشير $ح_2$، $ل_2$ إلى حجم وطول متوازي المستطيلات الثاني.

مثال 21:

متوازي مستطيلات حجمه 15 سم³. أوجد حجم متوازي مستطيلات مشابه طوله 3 أمثال طول متوازي المستطيلات الأول.

الحل

$$\frac{ح_2}{ح_1} = \left(\frac{ل_2}{ل_1}\right)^3$$

$$\frac{ح_2}{15} = \left(\frac{3}{1}\right)^3$$

$$ح_2 = 15 \times 27 = 405 \text{ سم}^3$$

∴ حجم متوازي المستطيلات الثاني 405 سم³

مثال 22:

كُرتان حجمهما 54 سم³، 16 سم³
أوجد النسبة بين طولي نصفي قطريهما.

الحل

$$\left(\frac{نق_2}{نق_1}\right)^3 = \frac{ح_2}{ح_1}$$

$$= \frac{54}{16} = \frac{27}{8}$$

$$\frac{نق_2}{نق_1} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$$

$$= \frac{3}{2}$$

∴النسبة بين طولي نصفي قطريهما هي 3 : 2

تمرين 8 هـ

1- كرة حجمها 8 سم^3 أوجد حجم كرة أخرى نصف قطرها طوله:
(أ) ضعف طول الأول.
(ب) ثلاثة أمثال طول الأول.
(جـ) خمسة أمثال طول الأول.
(د) أربعة أمثال طول الأول.
(هـ) نصف طول الأول.
(و) مرة ونصف طول الأول.

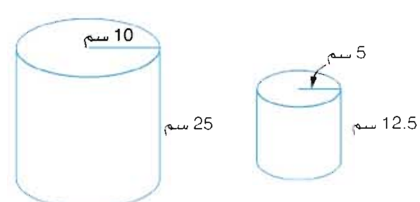
2- متوازي مستطيلات حجمه 1 سم^3. أوجد حجم متوازي مستطيلات آخر يشابهه وطول أحرفه:
(أ) ضعف أطوال أحرف الأول.
(ب) خمسة أمثال أحرف الأول.
(جـ) ثمانية أمثال أحرف الأول.
(د) عشرة أمثال أحرف الأول.
(هـ) نصف طول أحرف الأول.
(و) $\frac{1}{10}$ طول أحرف الأول.

3- مكعبان حجمهما 27 سم^3، 64 سم^3. أوجد النسبة بين طولي حرفيهما.

4- ثلاث كرات أحجامها 2 سم^3، 16 سم^3، 250 سم^3. أوجد النسبة بين أطوال أنصاف أقطارها.

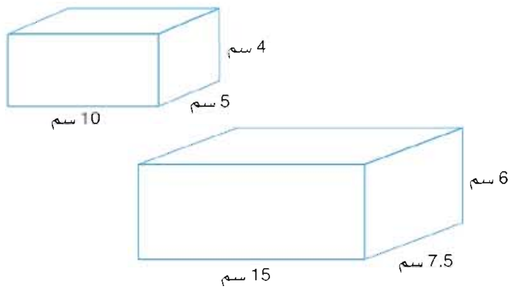
5- مكعب صلب كتلته 50 جرام. أوجد كتلة مكعب مصنوع من نفس المادة ولكن طول حرفه ضعف طول حرف المكعب الأول.

6-



(أ) هل الأسطوانتان متشابهتان؟
(ب) أوجد النسبة بين حجميهما (لا تُوجد حجم كل منهما).

7-

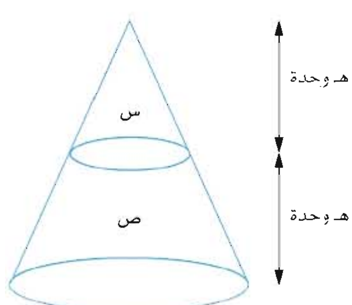


(أ) هل متوازيا المستطيلات متشابهان؟
(ب) أوجد النسبة بين حجميهما.

8- بالون كروي الشكل حجمه 12.2 سم^3 عند نفخه جزئيًا وعند نفخه كليًا أصبح طول نصف قطره ثلاثة أمثال طوله الأول. أوجد حجم الهواء في البالون في هذه اللحظة.

9- هرمان متشابهان ارتفاعهما 5 سم، 15 سم.
(أ) طول قاعدة الهرم الأكبر 9 سم، أوجد طول قاعدة الهرم الأصغر.
(ب) أوجد النسبة بين حجمي الهرمين الأكبر والأصغر. أعط إجابتك على صورة 1 : ن.

10- مخروط دائري قسم إلى مقطعين س، ص بواسطة سطح يوازي القاعدة كما هو موضح. فإذا كان ارتفاع كل مقطع (هـ) وحدة.



(أ) أوجد النسبة بين حجم المخروط س والمخروط الأكبر (الذي يضم س ، ص معًا).
(ب) حينئذ أوجد النسبة بين حجم س إلى ص.

مثال 23:

كرتان مساحة سطحيهما 18 سم^2، 32 سم^2، أوجد النسبة بين حجميهما.

الحل

$$\left(\frac{ل_2}{ل_1}\right)^2 = \frac{أ_2}{أ_1}$$

$$\left(\frac{ل_2}{ل_1}\right)^2 = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{ل_2}{ل_1} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{ح_2}{ح_1} = \left(\frac{ل_2}{ل_1}\right)^3$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

∴ النسبة بين حجميهما 27 : 64

تمرين 8 و

1- هرمان متشابهان حجمهما 10 سم^3، 80 سم^3.

(أ) أوجد النسبة بين ارتفاعيهما.

(ب) إذا كان ارتفاع الهرم الأصغر 5 سم، أوجد ارتفاع الهرم الأكبر.

2- منشوران متشابهان حجمهما 27 سم^3، 64 سم^3.

(أ) أوجد النسبة بين ارتفاعيهما.

(ب) أوجد النسبة بين مساحتي سطحيهما.

(جـ) أوجد النسبة بين مساحتي مقطعيهما.

(د) إذا كانت مساحة مقطع المنشور الأكبر 32 سم^2. أوجد مساحة مقطع المنشور الأصغر.

3- مكعبان مساحة سطحيهما 400 مم^2، 625 مم^2.

(أ) أوجد النسبة بين أطوال حرفيهما.

(ب) أوجد النسبة بين حجميهما.

4- مكعبان مصمتان مصنوعان من نفس المادة. وكتلتهما 27 جرامًا و125 جرامًا.

(أ) أوجد النسبة بين حجميهما.

(ب) أوجد النسبة بين طولي حرفيهما.

(جـ) أوجد النسبة بين مساحتي سطحيهما.

5- جسمان متشابهان مساحتهما السطحية 25 سم^2، 1 سم^2.

(أ) أوجد النسبة بين مساحتي سطحيهما.

(ب) أوجد النسبة بين أطوالهما المتناظرة.

(جـ) أوجد النسبة بين حجميهما.

6- صنع نموذج سيارة بمقياس رسم 1 : 12

(أ) فإذا كان طول النموذج 40 سم. أوجد طول السيارة الحقيقي.

(ب) إذا كان عرض السيارة 162 سم. أوجد عرض النموذج.

(جـ) أوجد النسبة بين مساحة الجزء المدهون من النموذج إلى الجزء المدهون من السيارة.

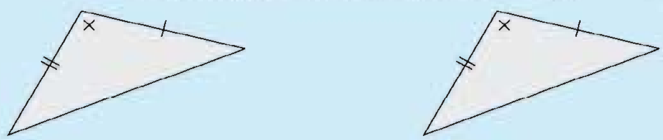
(د) أوجد النسبة بين حجم النموذج وحجم السيارة.

ملخص

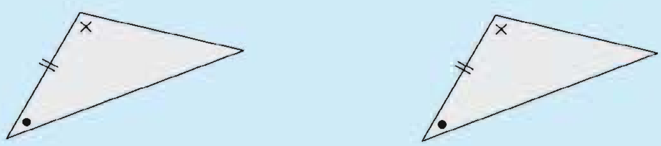
1- ينطبق المثلثان كُلٌّ على الآخر إذا تحقق أي من الشروط التالية:

(أ) الأضلاع المتناظرة متساوية (ض ض ض):

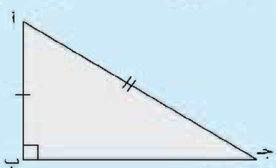
(ب) تساوى ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (ض ز ض):

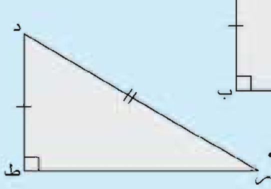


(جـ) تساوت زاويتان في القياس وتناظر طول ضلع مع آخر (ز ض ز):



(د) بالنسبة للمثلثين قائما الزاوية: تساوى وتر وضلع متناظر (و ض ق):





2- إذا كان Δ أ ب جـ ≡ Δ د ط م، فإن
قياس ∠أ = قياس ∠د، قياس ∠ب = قياس ∠ط،
قياس ∠جـ = قياس ∠م
أ ب = د ط، ب جـ = ط م، أ جـ = د م

3- يتشابه المثلثان إذا
(أ) تساوت الزوايا المتناظرة [إذا تساوت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تساوي الزاوية الثالثة في المثلث الآخر].
أو (ب) الأضلاع المتناظرة متناسبة.
أو (جـ) تناسب ضلعان متناظران وتساوت الزوايا المحصورة بينهما.

4- إذا Δ أ ب جـ ، د ط م متشابهان فإن
(أ) قياس ∠أ = قياس ∠د، قياس ∠ب = قياس ∠ط، قياس ∠جـ = قياس ∠م
(ب) $\frac{\text{أ ب}}{\text{د ط}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ط م}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د م}}$

5- بالنسبة للشكلين المستويين المتشابهين $\frac{\text{أ}_2}{\text{أ}_1} = \left(\frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1}\right)^2$

بالنسبة للشكلين المصمتين المتشابهين فإن $\frac{\text{ح}_2}{\text{ح}_1} = \left(\frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1}\right)^3$

استقصاء الرياضيات

لعبة البلياردو

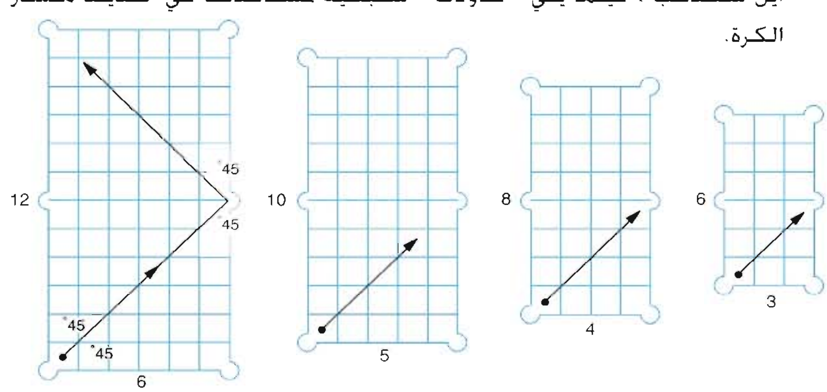
اشُتق الاسم على الأرجح من الكلمة الفرنسية bille وتعني عصا . وعلى الرغم من أن مصدر اللعبة غير محدد، إلا أنها عرفت بفرنسا في القرن الخامس عشر وبإنجلترا أثناء حكم الملكة إليزابيث الأولى.

ظهرت عصا البلياردو في حوالي 1820، فسمحت بدرجة تحكم كبيرة في الكرة، وبالتطورات العلمية الحديثة للبلياردو التي تعتمد إلى حد كبير على مبادئ الهندسة والديناميكا.

واليوم يستطيع اللاعب الماهر تحديد مسار الكرة قبل ضربها. فيعتمد المسار على طريقة ضرب الكرة، وشكل الطاولة، وموقع الكرات الأخرى. فيمكن لأبعاد الطاولات أن تتغير ولكنها دائمًا مستطيلة وطولها ضعف عرضها. وعمومًا تكون أبعادها 3.65 متر × 1.82 متر وارتفاعها 0.86 متر .

ويلاحظ أي شخص يلعب البلياردو أن الكرة التي يضربها يمكن أن تتوقف في مكانها بعد ارتطامها بكرة أخرى. ولحدوث ذلك فإن حركة الكرة المتحركة يجب أن تكون بطول خط مركز الكرتين! ولتحديد مسار الكرة يجب معرفة أنه عند ارتطام الكرة بحافة الطاولة فإن زاوية الانعكاس تساوي زاوية السقوط، بمعنى أنها ترتد بنفس زاوية ارتطامها. من المفيد معرفة هذه الحقيقة في ألعاب مثل التنس والبلياردو.

تخيل كرة ضربت من ركن الطاولة بحيث تتحرك بزاوية °45 مع جوانب الطاولة. أين ستذهب ؟ فيما يلي " طاولات " شبكية لمساعدتك في تحديد مسار الكرة.



ملحوظة

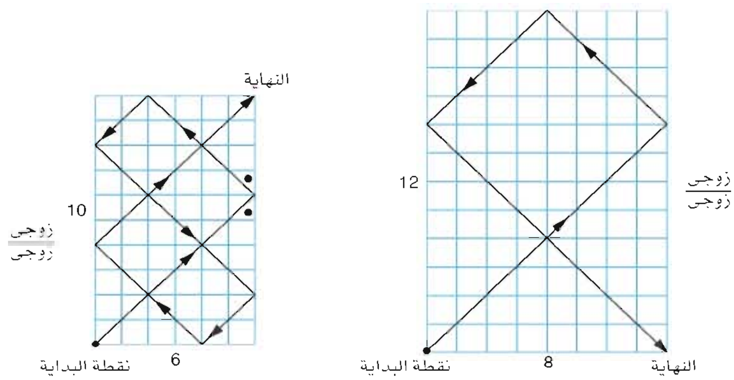
توجد كرة واحدة فقط على كل طاولة شبكية.

وبما أن الطاولات متشابهة (تساوت النسب المتناظرة للأضلاع):

$$2 = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6}$$

فإن مسار الكرة سوف يكون نفسه منتهيًا عند الركن الأعلى الأيسر في كل حالة.

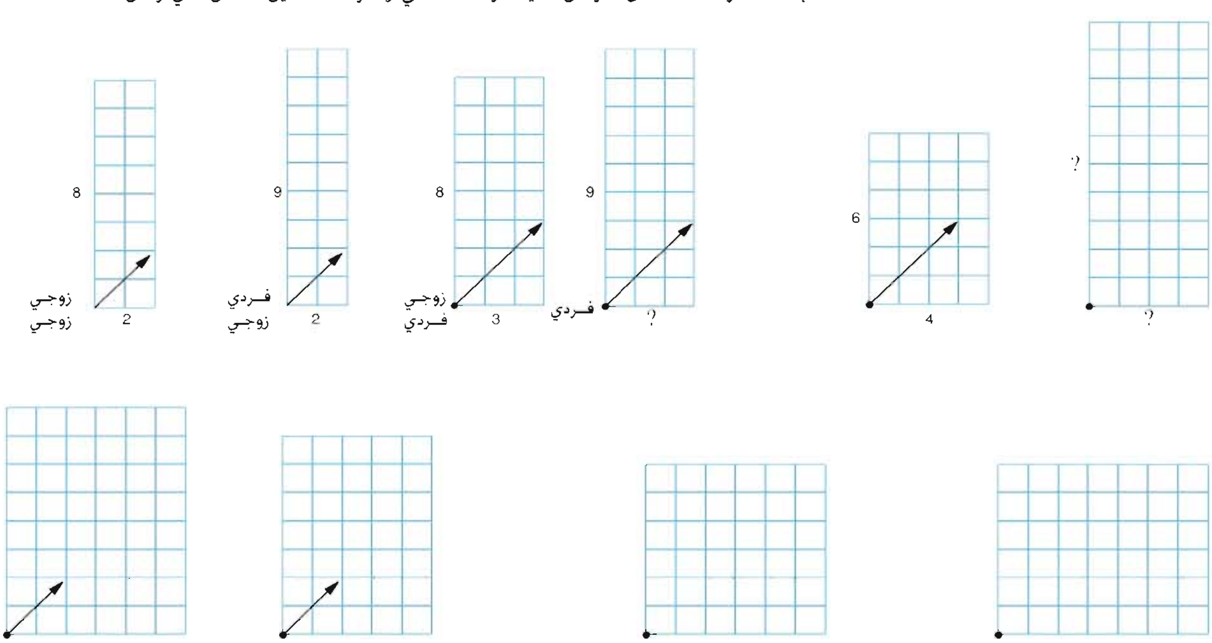
دعنا نتعرف على المسار في طاولة مختلفة الشكل. اتبع المسار في كل شكل، سوف تلاحظ أن الكرة تذهب إلى ركن مختلف بعد ارتدادات عديدة.



أوجد أبسط صورة للنسبة بين طول وعرض المنضدة بالنسبة للمنضدة في كل شكل. العديد من التساؤلات يمكن أن تثار:

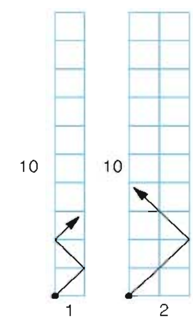
1- هل تعتقد أن الكرة سوف تنتهي دائمًا في أحد الأركان؟
2- هل يمكن للكرة أن ترتد من الجوانب إلى ما لا نهاية؟
3- هل يمكن للكرة الرجوع إلى ركنها الأصلي؟
4- هل يمكن أن تتوقع أي ركن من الأركان الثلاثة سوف تنتهي الكرة عنده إذا كانت أبعاد المنضدة معروفة؟

ولإيجاد الإجابة عن هذه الأسئلة، حل التمارين الآتية بعناية على ورقة مربعات 5مم ثم الصقها وكأنها (منضدة البلياردو) في كراسة التدريبات. اكتب الأبعاد على الأضلاع وحاول صياغة بعض القواعد البسيطة بقدر استطاعتك. تبدأ الكرة دائمًا من الركن الأيسر السفلي وتتوقف حين تصل لأي ركن.



ارسم مجموعة من 8 طاولات بلياردو بأطوال 10 وحدات وعرض يتغير من 1 إلى 8 وحدات. ضع علامة حمراء في الأماكن التي تنتهي عندها الكرات.

- هل توجد أي مفاجأة ؟
- أي المناضد لها أبسط مسار ؟
- ما هي أبعاد المنضدة ذات المسار الأكثر تعقيدًا ؟
- أين تنتهي الكرة على منضدة بلياردو عرضها عدد فردي؟



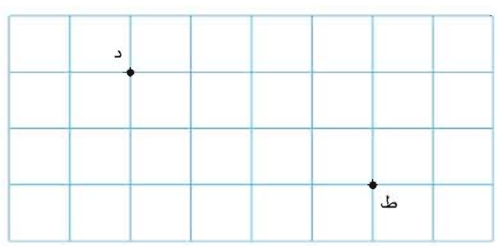
ارسم هذه المرة مجموعة من الطاولات بأطوال (7 وحدات) وعرض من 1 إلى 7، كرر العملية. فكر في قاعدة للتكهن بالمنضدة التي تمر الكرة بها على كل المربعات [فكر في عوامل الأعداد].

اكتب من التمارين السابقة النسب بين الطول والعرض لكل المناضد التي تنتهي الكرة فيها بالركن الأيمن السفلي. عبر عن النسب السابقة في أبسط صورة. كرر الخطوات لجميع المناضد حيث تنتهي الكرة في (i) الركن الأيمن العلوي (ii) الركن الأيسر العلوي.
ما هي القواعد التي يمكن استنتاجها؟

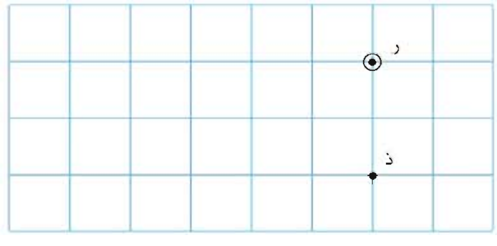
حاول هذا الآن؟

احسب أقصر مسافة من د إلى ط مع السماح بالارتداد مرة واحدة من جانب المنضدة. زوايا الارتطام والانعكاس كليهما 45°.

ملحوظة
اعتبر كل مربع صغير قياسًا لوحدة واحدة بوحدة واحدة.



على ورقة رسم بياني ارسم جميع المسارات التي يمكن بها لكرة (ر) أن تسير لتصطدم بالكرة (ذ). بجانب كل شكل، اكتب عدد الارتدادات وطول المسافة المقطوعة.



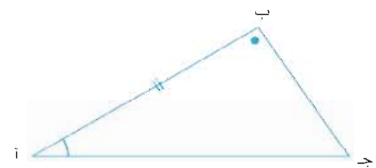
ورقة المراجعة 8

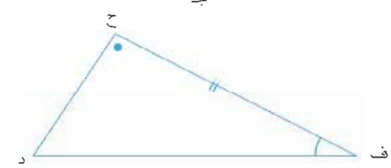
قسم أ

-1 قارن كل زوج من المثلثات ثم أكمل البيانات التالية:

(أ) Δ أ ب حـ ≡ ____________

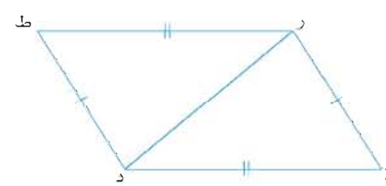
السبب: ____________



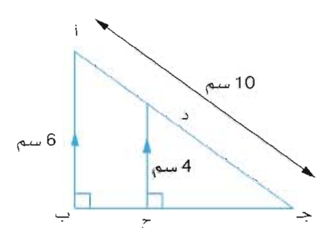


(ب) Δ د ط ر ≡ ____________

السبب: ____________



-2 أوجد طول حـ د.

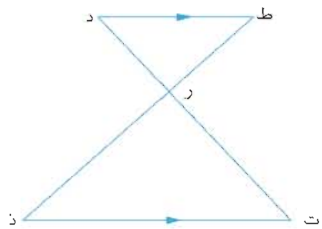


-3 أكمل الفراغات المحددة التالية:

(أ) Δ ☐ ، Δ ☐ متشابهان.

السبب:

(ب) $\frac{\text{د ط}}{\text{ذ ت}} = \frac{\text{\_\_\_\_}}{\text{ر ت}}$ ، $\frac{\text{د ط}}{\text{ذ ت}} = \frac{\text{ط ر}}{\text{\_\_\_\_}}$

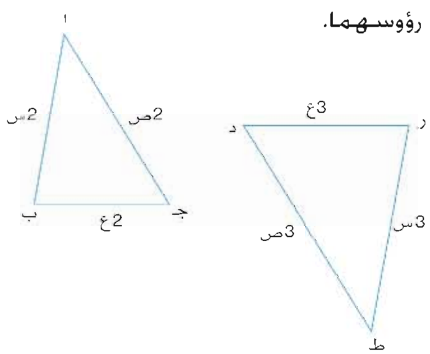


-4 ارجع إلى الأشكال المعطاة،

(أ) واكتب قيمة:

(i) $\frac{\text{أ ب}}{\text{ط ر}}$ (ii) $\frac{\text{أ حـ}}{\text{د ط}}$ (iii) $\frac{\text{ب حـ}}{\text{د ر}}$

(ب) اذكر المثلثين المتشابهين مع تصحيح ترتيب رؤوسهما.

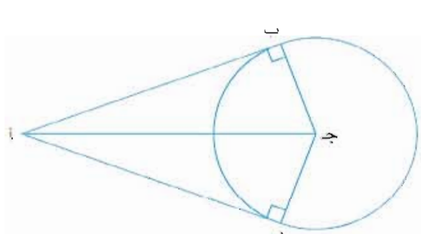


قسم ب

-5 (أ) دائرة مركزها حـ. أكمل الفراغات المحددة التالية:

Δ أ ب حـ ≡ ____________

السبب: ____________

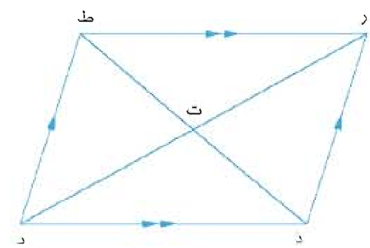


(ب) اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتطابقة في متوازي الأضلاع المبين.

(i) ______ ≡ ______

(ii) ______ ≡ ______

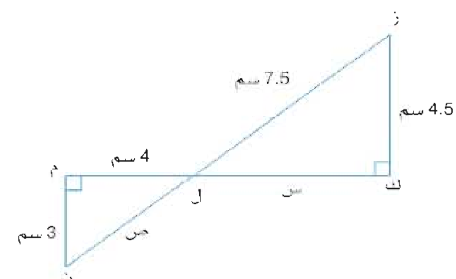
(iii) ______ ≡ ______



6- بالنسبة للشكل المعطى:

(أ) اذكر زوجًا من المثلثات المتشابهة مع كتابة رؤوسهما المتناظرة بالترتيب الصحيح (أعط سببًا لإجابتك).

(ب) احسب قيمة س، ص.



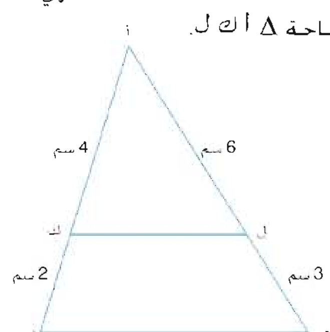
7- بالنسبة للشكل الموضح:

(أ) احسب قيمة $\frac{\text{أ ك}}{\text{أ ب}}$ ، $\frac{\text{أ ل}}{\text{أ جـ}}$

(ب) اذكر بعد ذلك زوجًا من المثلثات المتشابهة مع كتابة رؤوسهما بالترتيب الصحيح.

(جـ) إذا كانت مساحة Δ أ ب جـ تساوي 18 سم^2.

أوجد مساحة Δ أ ك ل.



8- منشوران متشابهان حجمهما 8 سم^3، 27 سم^3.

(أ) أوجد النسبة بين طوليهما.

(ب) أوجد النسبة بين مساحتيهما السطحية.

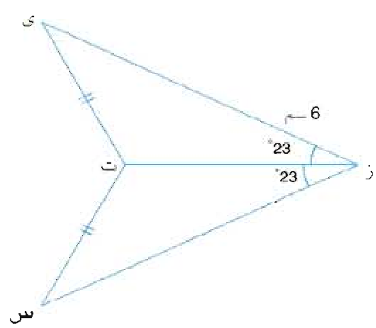
(جـ) إذا كانت المساحة السطحية للمنشور الأصغر 8 سم^2. أوجد المساحة السطحية للمنشور الأكبر.

قسم جـ

9- (أ) اثبت أن المثلثين الموضحين بالشكل متطابقان، ووضح الأسباب.

(ب) اكتب طول س ز.

(جـ) اذكر زاويتين أخرتين متساويتين.



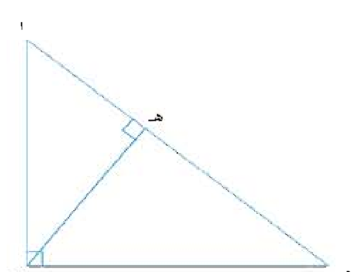
10- (أ) اثبت أن Δ أ ب هـ ، Δ أ جـ ب متشابهان واذكر الأسباب .

(ب) إذا كانت مساحة Δ أ ب هـ ، Δ أ جـ ب هي على الترتيب 2.16 سم^2، 6 سم^2.

(i) أوجد النسبة بين مساحتيهما . ثم

(ii) أوجد النسبة بين طولي وتريهما ___ .

(iii) إذا كان أ جـ = 5 سم . أوجد طول أ ب .



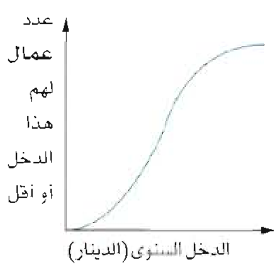
9 المتوسطات الإحصائية

Statistical Averages

تعلمنا في الفصل 6 من كتاب الصف الثامن، كيفية تنظيم البيانات عن طريق الرسم البياني بالصور، وبالأعمدة، وبالقطاعات الدائرية، وبالتوزيعات التكرارية، وبالمدرج التكراري. إن كل هذه الطرق تعطينا فقط صورة كلية عن البيانات، ولكنها لا تكفينا لاتخاذ قرارات محددة.

على سبيل المثال: من البيانات الإحصائية قد نحتاج إلى الإجابة عن أسئلة مثل:

المستهلكون هل ادعاء مصنع الأغذية المحفوظة أن للمعلبات وزن صافي (250 جرام) حقيقي؟



المستخدم ما دخل 50% من **العمال** في مصنع؟

بائع التجزئة ما هو مقاس الحذاء الذي على بائع التجزئة أن يطلبه أكثر؟

للإجابة عن مثل هذه الأسئلة نحتاج إلى معرفة المتوسطات الإحصائية الثلاثة: **المتوسط، الوسيط، المنوال**. هذه المتوسطات يمكن تسميتها أيضًا **بمقاييس النزعة المركزية** حيث تمثل مركز (وسط) القيم للبيانات المعطاة، وهي قلما تتساوى لأي مجموعة من البيانات. وأي هذه الأنواع الثلاثة يعتبر نموذجيًّا لمجموعة بيانات يعتمد على نوع العينة أو البيانات والهدف من وراء ذلك.

في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادرًا على:

- إيجاد المتوسط، والوسيط، والمنوال للتوزيع من:
  - مجموعة أعداد.
  - جداول التكرار.
  - المدرج التكراري.
  - الرسم البياني بالنقط.
- إيجاد المتوسط من التمثيل البياني للأصل والفروع.

1-9 المتوسط Mean

أنتج مصنع مأكولات معلبة كتلتها الصافية 250 جراماً. ووجد في اختبار الجودة أن الكتل تدور حول 248 : 252 جرام. على سبيل المثال (الكتل بالجرام) لعشرة معلبات كانت:

252، 248، 251، 249، 250، 250، 251، 251، 248، 250

في الحقيقة، وجد أن جميع "الكتل" قريبة من 250 جراماً.

المتوسط الحسابي هو القيمة التي يمكن الحصول عليها عن طريق جمع جميع القيم ثم قسمتها على عددها.

$$\therefore \text{المتوسط} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$$

$$= \frac{250 + 248 + 251 + 251 + 250 + 250 + 249 + 251 + 248 + 252}{10}$$

$$= \frac{2500}{10}$$

= 250 جراماً

ومن هنا على المصنع أن يقول بثقة:

"في المتوسط الكتل الصافية للمعلبة هو 250 جراماً".

يُستخدم في أحيان كثيرة المصطلح "معدل" كمترادف مع "المتوسط".

مثال 1:

أوجد متوسط القيم التالية:

(أ) 47، 52، 41، 49، 51.

(ب) 1، 1، 1، 1، 2، 2، 3، 3، 3، 4، 4، 4، 5، 5، 6

> **ملحوظة**
>
> لاحظ أن 1 + 1 + 1 + 1
>
> = 4 × 1 = 4
>
> 5 + 5 = 2 × 5 = 10

الحل

(أ) $\text{المتوسط} = \frac{51 + 49 + 41 + 52 + 47}{5}$

$$= \frac{240}{5} = 48$$

(ب) $\text{المتوسط} = \frac{6 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1}{15}$

$$= \frac{45}{15} = 3$$

طريقة بديلة للمثال 1ب:

إذا عرَّفنا القيم المعطاة باستخدام س وتكرار كل منها باستخدام ف. يمكن أن نعرض البيانات في جدول التكرار بإضافة العمود (ف × س) كما يلي:

القيم (س)	التكرار (ف)	ف س
1	4	4 = 1 × 4
2	2	4 = 2 × 2
3	3	9 = 3 × 3
4	3	12 = 3 × 4
5	2	10 = 2 × 5
6	1	6 = 1 × 6
الكلي	15	45

المتوسط = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

= $\frac{\text{مجموع ف س}}{\text{الكلي ف}}$

= $\frac{45}{15} = 3$

مثال 2:

كان عدد الأهداف التي سجلتها بعض الفرق في مباريات دوري كرة القدم أحد أيام الجمعة كما يلي:

عدد الأهداف	0	1	2	3	4	5	6
عدد الفرق	26	27	19	11	3	3	1

الحل

عدد الأهداف (س)	عدد الفرق (ف)	ف س
0	26	0 = 0 × 26
1	27	27 = 1 × 27
2	19	38 = 2 × 19
3	11	33 = 3 × 11
4	3	12 = 4 × 3
5	3	15 = 5 × 3
6	1	6 = 6 × 1
الكلي	90	131

متوسط عدد الأهداف المسجلة = $\frac{131}{90} = 1.46$ (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

مثال 3:

المرتبات السنوية لخمسة أشخاص كانت 5000، 5500، 6000، 6500، 32000 دينار.

(أ) أوجد متوسط المرتبات.

(ب) هل هذا المتوسط يمثل تلك المرتبات؟

الحل

(أ) متوسط المرتب = $\frac{5000 + 5500 + 6000 + 6500 + 32000}{5}$

$= \frac{55000}{5}$

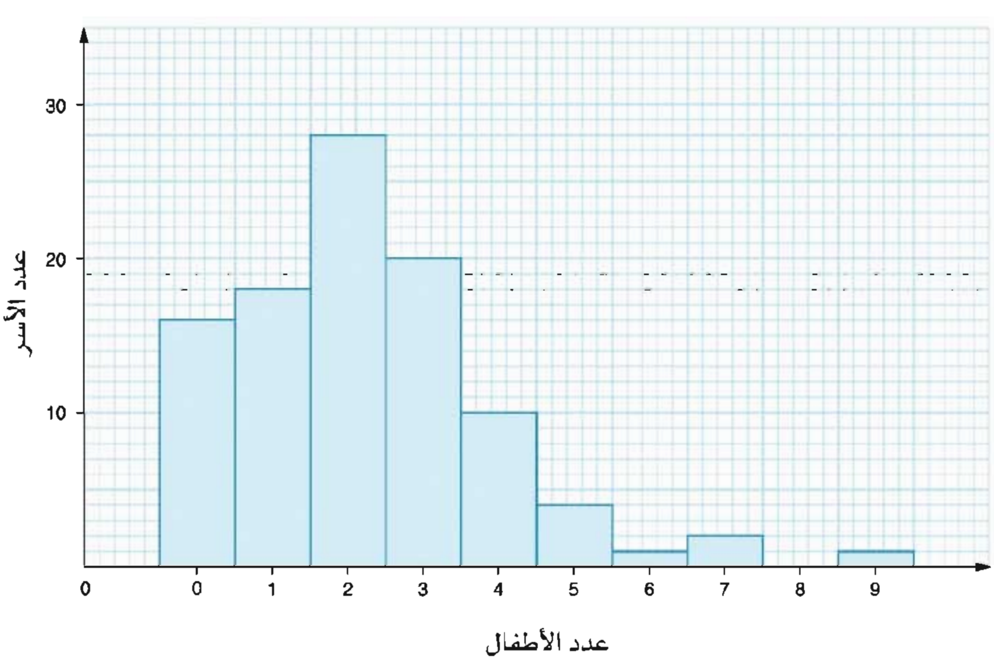
= 11000 دينار.

(ب) المتوسط 11000 دينار هو بالتأكيد لا يمثل مرتباتهم حيث يوجد اختلاف كبير بين المتوسط وكل من القيم. على سبيل المثال $32000 - 11000 =$ 21000 دينار.

نلاحظ من المثال السابق أنه من عيوب المتوسط تأثره بالقيم المتطرفة أي القيم الكبيرة جدًّا أو الصغيرة جدًّا.

مثال 4:

يبين المدرج التكراري توزيع عدد الأطفال لكل أسرة بين مجموعة من المتزوجين . أوجد متوسط هذا التوزيع.



الحل

عدد الأطفال (س)	عدد الأسر (ف)	س ف
0	16	0
1	18	18
2	28	56
3	20	60
4	10	40
5	4	20
6	1	6
7	2	14
8	0	0
9	1	9
الكلي	100	223

المتوسط = $\frac{\text{مجموع س ف}}{\text{الكلي ف}}$

$= \frac{223}{100}$

= 2.23 طفل

ملحوظة

إحصائيًا لا يجب أن يكون المتوسط عددًا صحيحًا

مثال 5:

متوسط الكتلة لعدد 10 طلاب هو 55.5 كيلو جرام.

(أ) أوجد الكتلة الكلية للطلاب العشرة.

(ب) أوجد المتوسط الجديد الكتلة إذا انضم إليهم طالب كتلته 62 كيلوجرام.

الحل

(أ) الكتلة الكلية = المتوسط × 10

= 55.5 × 10

= 555 كجم

(ب) المتوسط الجديد = $\frac{\text{الكتلة الكلية الجديدة}}{11}$

$= \frac{555 + 62}{11}$

$= \frac{617}{11}$

= 56.1 كجم

ملحوظة

العدد الكلي للطلاب أصبح الآن 11

مثال 6:

متوسط مجموعة مكونة من 8 أعداد يساوي 17.5 فإذا كان 6 من هذه الأعداد هي 12، 14، 15، 19، 24، 25 **فأوجد** متوسط العددين الأخرين.

الحل

مجموع الأعداد الثمانية = 8 × 17.5

= 140

مجموع الأعداد الستة = 12 + 14 + 15 + 19 + 24 + 25

= 109

∴ مجموع العددين الأخرين = 140 − 109

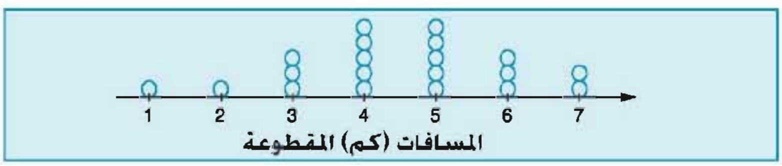
= 31

∴ متوسط العددين الأخرين = $\frac{31}{2}$

= 15.5

مثال 7:

يوضح التمثيل البياني بالنقط نتيجة دراسة مسحية للمسافات التي يقطعها الطلاب في ذهابهم إلى المدرسة.



(أ) كم عدد الطلاب الذين شملهم المسح؟

(ب) احسب متوسط المسافات التي قطعها الطلاب.

ملحوظة

كل نقطة تمثل البيانات المستقاة من كل طالب

الحل

(أ) عدد الطلاب الذين شملهم المسح = 20

(ب)

المسافة بالكيلومتر س	التكرار ، ف (عدد الطلاب)	ف × س
1	1	1 = 1 × 1
2	1	2
3	3	9
4	5	20
5	5	25
6	3	18
7	2	14
الكلي	20	89

∴ متوسط المسافة المقطوعة = $\frac{89}{20}$

= 4.45 كم

مثال 8:

عدد الساعات الضائعة في أحد المصانع خلال السنة والتي تعود إلى تعطل الآلات يوضحها الرسم البياني للأصل والفرع التالي.

عدد الساعات الضائعة	
0	2 5 1 2
1	4 0 1 8 4
2	3 6 8
3	1 8
4	0

(أ) كم عدد الأعطال في السنة؟

(ب) ما هو أقل عدد للساعات الضائعة؟

(جـ) ما هو أكثر عدد للساعات الضائعة؟

(د) احسب متوسط عدد الساعات الضائعة.

الحل

(أ) بِعَدِّ الفروع نجد أنها 15 عطلًا.

(ب) أقل عدد ساعات ضائعة = 1 (من 1)

(جـ) أكثر عدد للساعات الضائعة = 40

(د)

عدد الساعات الضائعة	
2 + 1 + 5 + 2	= 10
14 + 10 + 11 + 18 + 14	= 67
23 + 26 + 28	= 77
31 + 38	= 69
40	= 40
الكلي	=263

∴ متوسط عدد الساعات الضائعة = $\frac{263}{15}$

= 17.5 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

تمرين 9 أ

1- أوجد متوسط كل من مجموعات البيانات التالية:

(أ) 1، 1، 2، 2، 3، 3، 3، 4، 5

(ب) 4، 4، 4، 6، 6، 7، 7، 7، 7

(جـ) 6، 4، 5، 8، 2، 6، 7.

(د) 45، 66، 67، 40، 55، 64، 76

(هـ) 2.1، 5.1، 2.5، 3.1، 4.3

2- (أ) أوجد متوسط كل مجموعة من المجموعات العددية التالية:

(i) 5، 6، 7، 10، 12.

(ii) 305، 306، 307، 310، 312

(ب) إذا كان العدد 9 هو متوسط للأعداد 2، س، 10، 12، 15. أوجد قيمة س.

3- متوسط خمسة أعداد هو 39، اثنان من الأعداد هما 103، 35 وكل من الأعداد الثلاثة الباقية يساوي س. أوجد
(أ) مجموع الأعداد الخمسة
(ب) القيمة العددية للعدد س.

4- أدى 6 طلاب، و4 طالبات امتحانًا. فإذا كان متوسط درجة الطلاب العشرة 51
(أ) احسب مجموع الدرجات التي حصل عليها الطلاب العشرة.
(ب) إذا كانت الدرجة المتوسطة للطلاب الستة هي 49، احسب الدرجة المتوسطة للطالبات الأربع.

5- عدد العمال الذين أبلغوا مرضى في مصنع خلال فترة محددة سجل كما يلي.

عدد العمال المبلغين مرضى	عدد الأيام (التكرار)
0	2
1	3
2	5
3	6
4	7
5	8
6	9
7	7
8	3
9	2
10	2

احسب متوسط عدد العمال المبلغين مرضى في اليوم.

6- في أحد سباقات الرماية يمكن لرجل إحراز نتيجة 1، 2، 3، 4، 5 أو 6 وكانت نتيجته بعد 100 طلقة كما هو موضح في الجدول التالي.

النتيجة	التكرار
1	26
2	15
3	14
4	15
5	18
6	12

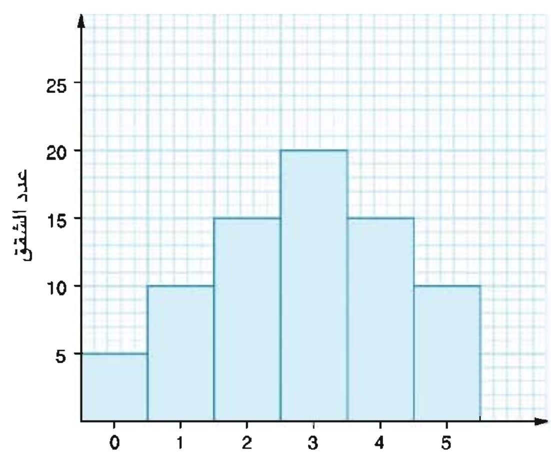
احسب متوسط الرميات.

7- أجريت دراسة مسحية لإيجاد عدد الأطفال في كل من 400 أسرة. والنتائج يوضحها الجدول التالي.

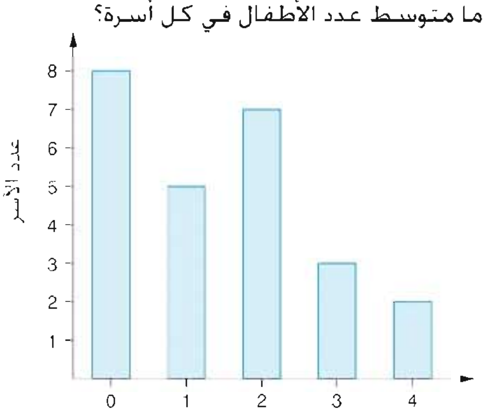
عدد الأطفال في كل أسرة	عدد الأسر
0	46
1	92
2	98
3	104
4	60

(أ) احسب متوسط عدد الأطفال لكل أسرة.

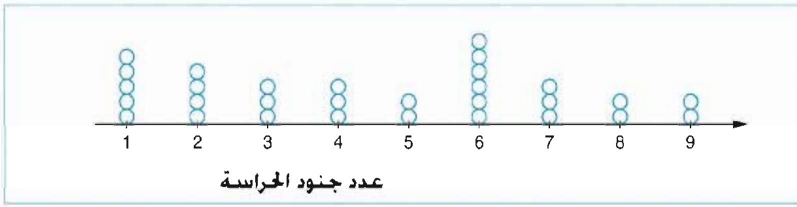
8- يبين التمثيل البياني للمدرج التكراري عدد السكان في كل من 75 وحدة (شقة) في مجمع سكني. أوجد متوسط عدد السكان في كل وحدة.



9- يبين الرسم البياني بالأعمدة عدد الأطفال لكل أسرة في مجمع سكني.
(أ) كم عدد الأسر التي لها طفلين؟
(ب) كم عدد الأسر التي لديها أقل من ثلاثة أطفال؟
(جـ) كم عدد الأسر الإجمالي في المجمع السكني؟
(د) ما إجمالي عدد الأطفال في المجمع السكني؟
(هـ) ما متوسط عدد الأطفال في كل أسرة؟



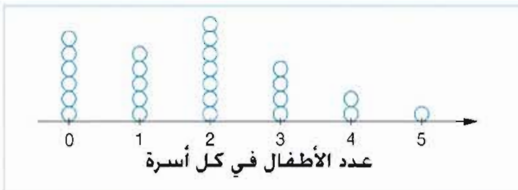
10- يبين الشكل البياني بالنقط عدد الجنود الذين يقومون بالحراسة كل يوم.



(أ) ما هو العدد الكلي لجنود الحراسة؟

(ب) احسب متوسط عدد جنود الحراسة في اليوم الواحد

11- يبين الشكل البياني بالنقط نتائج دراسة مسحية لإيجاد عدد الأطفال في كل أسرة.



(أ) كم عدد الأسر الذين شملتهم الدراسة؟

(ب) ما عدد الأطفال الإجمالي؟

(جـ) ما هو متوسط عدد الأطفال في كل أسرة؟

2-9 الوسيط Median

إذا كانت المرتبات الشهرية لخمسة موظفين هي كما يلي:

900 دينار ، 975 دينارًا، 1050 دينارًا، 1100 دينار، 2300 دينار

فإن متوسط الراتب الشهري = $\frac{2300 + 1100 + 1050 + 975 + 900}{5}$

= 1265 دينارًا

لاحظ أن 4 موظفين من الخمسة تقاضوا أقل من 1265 دينارًا في الشهر. القيمة المتطرفة 2300 دينار تسببت في أن المتوسط أصبح لا يمثل العينة.

فإذا ما اخترنا القيمة الوسيطة لمجموعة بعد ترتيبها ترتيبًا تنازليًا أي القيمة (1050 دينارًا) سوف نجد أن هذه القيمة تعد أكثر تمثيلًا من المتوسط. تعرف هذه "القيمة الوسيطة" باسم **الوسيط** ولا تتأثر بالقيم المتطرفة.

الوسيط لمجموعة من القيم ن هو القيمة الوسطى (إذا كانت ن فردية) أو هو متوسط القيمتين الوسطيتين (إذا كانت ن زوجية) بعد ترتيب القيم ترتيبًا تنازليًا أو تصاعديًا.

مثال 9:

أوجد وسيط الأعداد

(أ) 3، 1، 6، 2، 1، 3، 4، 5، 3

(ب) 1، 5، 4، 6، 2، 5، 3، 2، 4، 3

الحل

(أ) بعد ترتيب القيم، نحصل على:

1، 1، 2، 3، 3 ، 3، 4، 5، 6

4 أعداد قبله   4 أعداد بعده

∴ الوسيط = 3

ملحوظة

هناك 9 قيم (فردي).
∴ القيمة الخامسة هي الوسيط.

(ب) بعد ترتيب الأعداد، نجد أن :

1، 2، 2، 3، 3   4، 4، 5، 5، 6

5 أعداد قبله $\frac{4+3}{2}$ 5 أعداد بعده

عندما يكون عدد القيم زوجيًا، فإن الوسيط يساوي متوسط العددين اللذين يتوسطان الأعداد.

∴ الوسيط = $\frac{4+3}{2} = 3.5$

مثال 10:

المجموع الكلي لأفضل ثلاث مواد، والمتضمنة اللغة الإنجليزية لفصل مكون من 40 طالبًا في امتحان الثانوي العام هو كما يلي.

5	8	6	6	3	12	8	10	7	10
4	6	6	9	4	6	8	5	8	7
4	5	3	6	7	18	9	6	6	4
6	14	8	5	10	6	8	12	8	16

أوجد وسيط المجموع الكلي.

الحل

بترتيب المجموع الكلي ترتيبًا تصاعديًا نحصل على

3، 3، 4، 4، 4، 6   7، 7، 7، 8 18

20 طالبًا قبله   20 طالبًا بعده

وسيط المجموع الكلي = $\frac{\text{القيمة 20 + القيمة 21}}{2}$

$= \frac{7+6}{2} = 6.5$

يمكن أيضًا استخدام نفس مجموعة البيانات في جدول التكرار التالي لإيجاد الوسيط عن طريق حساب الترتيب.

المجموع الكلي	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18
التكرار	2	4	4	10	3	7	2	3	2	1	1	1
الترتيب	الأول إلى الثاني	الثالث إلى السادس	7 إلى 10	11 إلى 20	21 إلى 23	24 إلى 30	31 إلى 32	33 إلى 35	36 إلى 37	38	39	40

من الجدول قيمة الترتيب العشرين = 6

قيمة الترتيب الواحد والعشرين = 7

∴ المجموع الكلي الوسيط = $\frac{7+6}{2} = 6.5$

ملحوظة

إذا كانت ن عددًا زوجيًا فإن موقع القيمتين اللتين تتوسطان مجموعة القيم $(\frac{ن}{2})$ والموقع $(\frac{ن}{2} + 1)$

ولهذا فإن الوسيط بين القيمتين العشرين والواحد والعشرين.

مثال 11:

عدد الأهداف المسجلة بواسطة 90 فريقًا يلعبون في دوري لكرة القدم خلال أحد أيام الجمعة هي كما يلي:

عدد الأهداف	0	1	2	3	4	5	6
عدد الفرق	26	27	19	11	3	3	1

أوجد وسيط عدد الأهداف المسجلة.

الحل

حيث يوجد عدد زوجي من الأهداف (90 هدفًا) إذن لدينا قيمتان تتوسطان القيم هما القيمة الخامسة والأربعين والسادسة والأربعين على التوالي.

وبالعد، الأهداف في الموقع الخامس والأربعين = 1

الأهداف في الموقع السادس والأربعين = 1

∴ العدد الوسيط للأهداف = $\frac{1+1}{2} = 1$

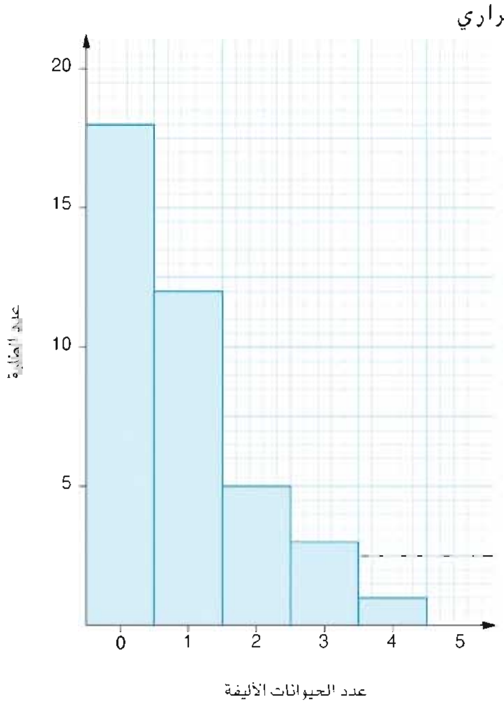
مثال 12:

سئل الطلاب في أحد الفصول عن عدد الحيوانات الأليفة التي لديهم.

يبين الشكل البياني للمدرج التكراري نتيجة الدراسة المسحية. أوجد

(أ) عدد الطلبة في الفصل.

(ب) العدد الوسيط للحيوانات الأليفة.



الحل

(أ) عدد الطلبة = $18 + 12 + 5 + 3 + 1$

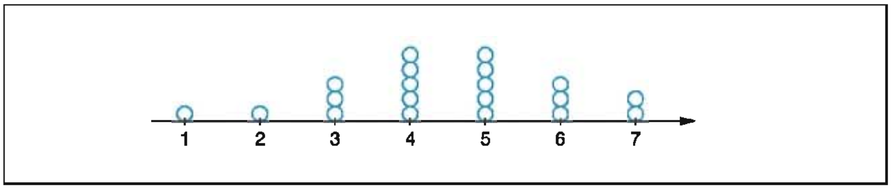
= 39 طالبًا

(ب) الوسيط يقع عند الموقع العشرين.

∴ وسيط عدد الحيوانات الأليفة = 1

مثال 13:

المسافات التي يقطعها 20 طالبًا في طريقهم إلى المدرسة (بالكيلومتر) يوضحها الشكل البياني بالنقط التالي:



أوجد وسيط المسافة المقطوعة بواسطة الطلبة.

الحل

المسافة المقطوعة بواسطة الطالب العاشر = 4كم

المسافة المقطوعة بواسطة الطالب الحادي عشر = 5كم

$\therefore$ وسيط المسافة المقطوعة = $\frac{5+4}{2} = 4.5$كم

ملحوظة

الوسيط بين الطالب العاشر والحادي عشر.

تمرين 9 ب

1- أوجد وسيط كل من المجموعات البيانية الآتية:

(أ) 1، 2، 3، 4، 5، 3، 2، 1، 3

(ب) 7، 6، 4، 6، 7، 4، 6، 5

(جـ) 2، 4، 5، 6، 2، 7، 6، 6.

(د) 89، 95، 76، 71، 88، 78.

(هـ) 2.50، 3.90، 3.20، 9.20، 3.70 .

2- يبين الجدول التالي عدد الأهداف المسجلة في 20 مباراة للهوكي.

2	2	3	1	3
3	1	0	3	2
5	3	3	2	2
2	3	1	2	3

أوجد العدد الوسيط للأهداف المسجلة في كل مباراة.

3- أوجد وسيط التوزيع التالي:

5.1، 7.9، 3.6، 2.1، 7.9، 4.2، 3.6، 7.8، 3.6.

4- بالنسبة للأعداد 14، 5، 11، 3، 3

(أ) أوجد الوسيط.

(ب) احسب المتوسط.

5- إذا كان وسيط مجموعة من 6 أعداد هو $2\frac{1}{2}$. وإذا كانت خمسة من هذه الأعداد هي 8، 1، 2، 11، 1

أوجد العدد السادس.

6- اشترك فصل به 40 طالبًا في مسابقة كانت أعلى درجة يمكن الحصول عليها فيها 9 وكانت درجاتهم كما يوضحها الجدول التالي.

الدرجة	0	1	2	3	4	5	6	6<
عدد الطلبة	1	3	4	8	11	8	3	2

أوجد الدرجة الوسيطة.

7- أجريت دراسة مسحية عن مصروف الجيب الشهري الذي يتقاضاه 30 طالبًا في فصل والنتائج مبينة في الجدول التالي.

مبلغ المصروف (بالدينار)	20	30	50	60	75	100
عدد الطلبة الذين يتقاضون هذا المبلغ	2	6	8	3	10	1

(أ) أوجد الوسيط.

(ب) احسب المتوسط.

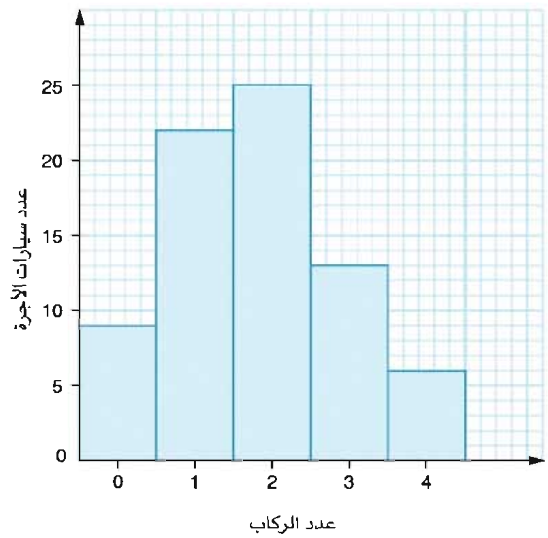
8- توزيع 100 قيمة للمتغير س يوضحها الجدول التالي.

س	صفر	1	2	3	4	5	6
تكرار	20	30	25	16	5	2	2

بالنسبة لهذا التوزيع، أوجد

(أ) الوسيط (ب) المتوسط.

9-



يبين الشكل البياني للمدرج التكراري نتائج الدراسة المسحية لعدد الركاب في كل سيارة أجرة عند مركز للتسوق.

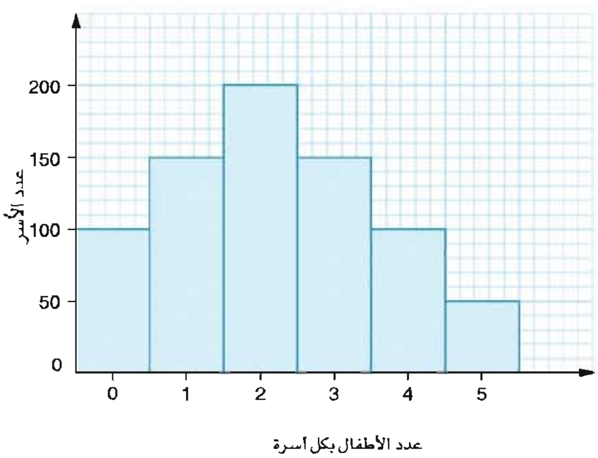
احسب:

(أ) عدد سيارات الأجرة التي شملها المسح.

(ب) وسيط عدد الركاب في كل سيارة أجرة.

10- يبين المدرج التكراري عدد الأطفال لكل عائلة في مجمع سكني.

احسب:



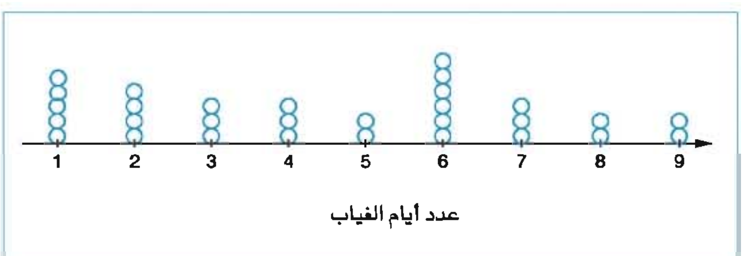
(أ) عدد الأطفال الوسيط لكل أسرة.

(ب) متوسط عدد الأطفال في كل أسرة.

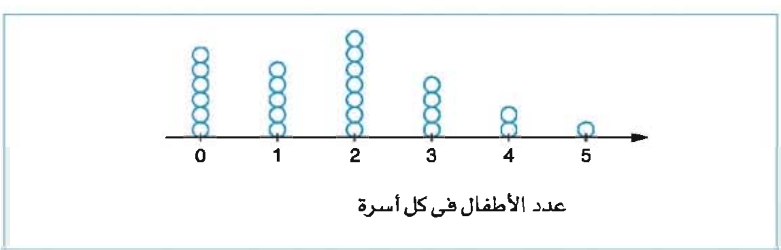
11- يشير الشكل البياني بالنقط إلى غياب عدد من الطلبة أثناء أيام معينة.

(أ) كم عدد الأيام المسجلة؟

(ب) أوجد وسيط عدد الطلبة كل يوم؟



12- يبين الرسم البياني بالنقط نتائج الدراسة المسحية لإيجاد عدد الأطفال لدى كل أسرة. أوجد عدد الأطفال الوسيط لكل أسرة.



3-9 المنوال Mode

إذا قيل لبائع أحذية بالتجزئة إن متوسط قياس أقدام الرجال هو 42.1 أو إن وسيط حجم أقدام الرجال هو 41.8 سوف لا يجد تلك المعلومات مفيدة فهو على الأرجح أكثر اهتمامًا بالحجم الأكثر شيوعًا حتى يتمكن من طلب أحذية أكثر من هذا القياس

منوال التوزيع هو القيمة الأكثر تكرارًا بين القيم.

لاحظ أن التوزيع له على الأرجح أكثر من منوال ولكن لن نتعرض إلى هذه الحالات في هذا الكتاب.

ملحوظة

6 تتكرر 3 مرات (الأكثر تكرارًا)

مثال 14:

أوجد منوال مجموعة البيانات التالية 2، 4، 5، 6، 2، 7، 6، 6

الحل

بإعادة ترتيب العينة ترتيبًا تصاعديًا 2، 2، 4، 5، 6، 6، 6، 7 نحصل على المنوال = 6.

لاحظ أنه كما في حالة الوسيط فإنه يجب أيضًا ترتيب العينة ترتيبًا تصاعديًا (أو تنازليًا) لتسهيل الحصول على القيمة الأكثر تكرارًا وهي المنوال.

مثال 15:

أوجد منوال العينات البيانية التالية

(أ) 8، 1، 0.2، 0.4، 0.1 **(ب)** 5، 6، 9، 8، 2، 4.

الحل

بإعادة ترتيب العينة:

(أ) 0، 0، 0، 1، 1، 2، 4، 8.

∴ المنوال = 0 .

(ب) بإعادة ترتيب العينة:

2، 4، 5، 6، 8، 9

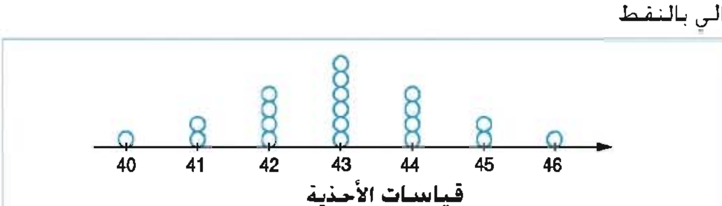
التوزيع **ليس له منوال**.

ملحوظة

تظهر كل قيمة مرة واحدة

مثال 16:

إذا كانت قياسات الأحذية التي بيعت في أحد الأيام يبينها الرسم البياني التالي بالنقط



(أ) كم عدد أزواج الأحذية التي بيعت؟

(ب) اذكر القياس المنوالي للأحذية **المبيعة**.

الحـــل

(أ) بِعَدِّ عدد النقط في النموذج.
نجد أن عدد أزواج الأحذية التي بيعت = 20

(ب) القياس 43 هو الذي له أكبر تكرار (6 أزواج)
∴ القياس المنوالي للأحذية المباعة هو 43.

تمرين 9 جـ

1- أوجد منوال كل من العينات التالية :

(أ) 5، 3، 7، 3، 3، 9، 0.

(ب) 3، 6، 8، 1، 8، 3، 3، 6، 1

(جـ) 3، 5، 5، 3، 2، 8، 5، 6، 0، 2

(د) 110 كجم. 100 كجم. 120 كجم. 110 كجم. 100 كجم. 110 كجم.

2- أوجد وسيط ومنوال كل من العينات التالية.

(أ) 1، 1، 2، 3، 5، 8، 1، 3، 2، 1

(ب) 3، 5، 5، 3، 2، 8، 5، 6، 0، 2

3- يبين الجدول التالي عدد الأهداف المسجلة في 20 مباراة للهوكي.

2	2	3	1	3
3	1	0	3	2
5	3	3	2	2
2	3	1	2	3

أوجد العدد المنوالي للأهداف المسجلة.

4- الدرجات التي حصل عليها 11 طالبًا في اختبار للتهجي هي كما يلي .

9، 1، 4، 8، 7، 8، 2، 10، 9، 4، 4

أوجد لهذه المجموعة من الدرجات،

(أ) المنوال.

(ب) الوسيط.

(جـ) المتوسط.

5- أُجريت دراسة مسحية لعدد السيارات المارة في تقاطع طريق خلال 35 فترة متساوية من الوقت، سجلت النتائج في الجدول التالي، مرت على سبيل المثال 4 سيارات بالتقاطع خلال كل من 6 فترات.

عدد السيارات	التكرار
0	8
1	7
2	4
3	4
4	6
5	3
6	3

أوجد لهذا التوزيع

(أ) المنوال.

(ب) الوسيط.

(جـ) المتوسط.

6- سُئلت مجموعة من 80 طفلًا عن عدد الأقلام الملونة التي بحوزتهم وكانت النتيجة كما يبينها الجدول التالي.

عدد الأقلام الملونة	عدد الأطفال
0	23
1	19
2	29
3	9

بالنسبة لهذا التوزيع، أوجد.

(أ) المنوال

(ب) المتوسط

7- فيما يلي مجموعة من 11 عدد:

1، 4، 5، 12، 4، 20، 14، 4، 18، 10، 7

(أ) حدد المنوال.

(ب) أوجد قيمة الوسيط.

(جـ) احسب متوسط الأعداد.

(د) عند إضافة الرقم س إلى المجموعة السابقة يصبح المتوسط الجديد 10. احسب قيمة س.

8- عدد الأهداف المسجلة من إحدى الفرق في سبع مباريات، كانت كما يلي:

12، 23، 18، 14، 24، 25، 12

(أ) اكتب العدد المنوالي للأهداف.

(ب) أوجد عدد الأهداف التي يحتاجها الفريق في مباراته القادمة لكي يكون متوسط عدد أهدافه في 8 مباريات يساوي 17

9- (أ) عدد الأهداف التي سجلها هدّاف كرة القدم في 11 مباراة كانت كمايلي:

1، 0، 0، 2، 2، 0، 1، 2، 3، 1، 2

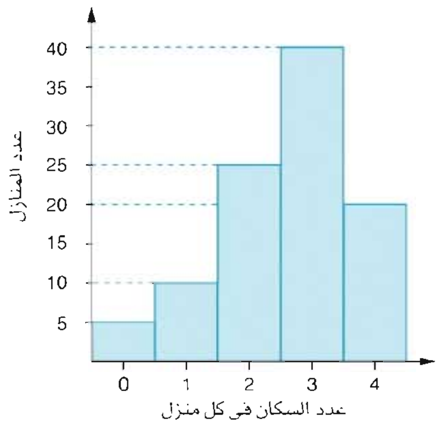
اكتب العدد المنوالي للأهداف

(ب) يبين الجدول التالي عدد الفتيات اللاتي سرن مسافات معينة.

المسافة (كم)	عدد الفتيات
5	2
10	1
15	5
20	1
25	س

فإذا كان الوسيط = 20 كم . أوجد قيمة س.

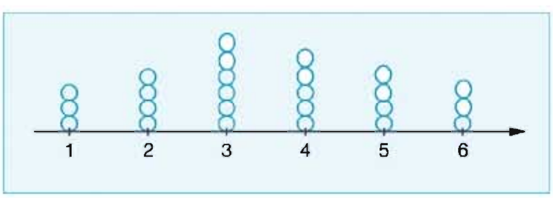
10- يبين الشكل البياني للمدرج التكراري عدد السكان في كل منزل في عينة من 100 منزل في شارع معين.



(أ) حدد العدد المنوالي للسكان في كل منزل.

(ب) احسب متوسط عدد السكان في كل منزل.

11- يبين الشكل البياني بالنقط الدرجات التي حصل عليها طلاب فصل بالصف الثاني الثانوي في امتحان الرياضيات.

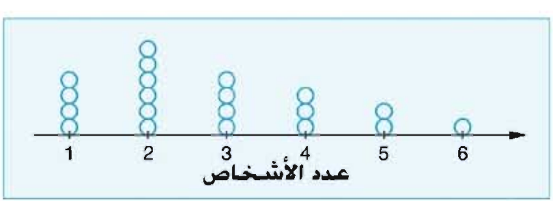


(أ) كم عدد الطلاب في الفصل؟

(ب) أوجد وسيط الدرجات.

(جـ) حدد الدرجة المنوالية.

12- عدد الأشخاص في سيارات تمر على تقاطع تم ملاحظته وتوضحيه في الرسم البياني بالنقط كما يلي:



(أ) كم سيارة تم ملاحظتها؟

(ب) حدد العدد المنوالي للأشخاص.

(جـ) أوجد وسيط عدد الأشخاص.

(د) احسب متوسط عدد الأشخاص في كل سيارة.

ملخص

1- نحصل على المتوسط بجمع كل القيم وقسمتها على عددها.

2- الوسيط لمجموعة من القيم (ن) هو القيمة الوسطى (إذا كانت ن فردية) أو متوسط القيمتين المتوسطتين (إذا كانت ن زوجية) وذلك بعد ترتيب مجموعة القيم ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا.

3- منوال التوزيع هو القيمة الأكثر تكرارًا بين القيم.

رياضيات ممتعة

لعبة إحصائية
(لاعبان أو أكثر)

تستطيع شراء لعبة دوران (كما هو موضح في الشكل) مقابل عدة دنانير من محل لبيع اللعب. اختر لعبة بها درجات تتراوح بين صفر، 36

اللعبة الأولى:

الهدف منها الحصول على متوسط يساوي 18

الطريقة:

يقوم كل لاعب بإدارة [لعبة الدوران]، ويُسمح له بإعادة الدوران مرة واحدة فقط.

مثال:

اللاعب الأول: يدير ويحصل على 3 نقاط ولكنه يرفض النتيجة.
يدير مرة أخرى ويسجل 10 نقاط وتحسب له أول محاولة.

اللاعب الثاني : يدير ويحصل على 16 نقطة، يقبل ذلك ويتم تسجيل ذلك كأول محاولة.

اللاعب الأول: يدير ويحصل على 30 نقطة (متوسط العددين 10، 30، هو 20، وهذا قريب من العدد 18) وبالتالي يقبل 30 على أنها المحاولة الثانية.
وهذا يعني أن البيانات الخاصة به هي 10، 30.

اللاعب الثاني: يدير ويسجل صفرًا، ويرفض النتيجة (متوسط صفر، 16 هو 8) وهذا بعيد جدًا عن العدد 18. يدير مرة ثانية ويسجل 22 .
وهذا يعني أن البيانات الخاصة به هي 16، 22 وهذا يعطي متوسط 19.

اللاعب الأول: يدير ويسجل 11 نقطة (متوسط 10، 30، 11 هو 17) وبالتالي يقبل العدد 11 على أنه تسجيل للمحاولة الثالثة.

وبالتالي تكون البيانات الخاصة به هي (10، 30، 11).

اللاعب الثاني : . . .

اللاعب الذي يحصل على متوسط 18 قبل الآخر يكون هو الفائز.

اللعبة الثانية:

الطريقة هي نفسها كما في اللعبة الأولى. إلا أن الهدف هو الحصول على وسيط قدره 18.

وتوجد قواعد متعددة يمكن استخدامها في اللعبتين. ففي البداية يمكن كتابة الحسابات، وبعد التدريب عدة مرات يسمح فقط بالحسابات الذهنية، ويمكن تحديد الوقت كذلك للقيام بالحسابات. يمكنك البدء باللعبة الثانية لأنها أسهل في إدارتها.

ورقة المراجعة 9

القسم أ

1- أوجد متوسط العينات التالية:

(أ) 1، 1، 2، 3، 5، 8، 1، 3، 2، 1

(ب) 5.1، 7.9، 3.6، 2.1، 7.9، 4.2، 3.6، 7.8، 3.6

2- أوجد وسيط كل من التوزيعات التالية:

(أ) 5، 3، 7، 3، 3، 9، 0.

(ب) 1، 1، 1.2، 2.3، 3.5، 5.8، 8.1، 1.3، 3.2، 2.1

(جـ) 3، 6، 8، 1، 8، 3، 3، 8، 6، 1.

3- أوجد منوال كل من التوزيعات التالية:

(أ) 9، 7، 4، 1، 3، 9، 9، 4، 0.

(ب) 2.8، 2.8، 9.3، 7.8، 6.9، 5.6، 2.0، 2.3، 6.9.

(جـ) 555، 607، **709**، 990، 709، 384

4- بالنسبة للتوزيع التالي:

0، 5، 5، 1، 4، 1، 6، 7، 3، 0، 1.

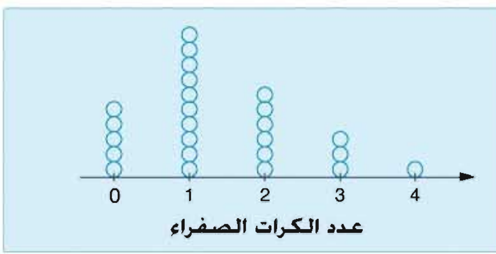
أوجد: (أ) المتوسط.

(ب) الوسيط.

(جـ) المنوال.

القسم ب

5- صندوق يحتوي على 4 كرات صفراء وعلى 6 كرات سوداء. سحبت أربع كرات عشوائيًّا من الصندوق . وتم عد الكرات الصفراء المسحوبة من العينة. ثم أعيدت الكرات الأربع إلى الصندوق قبل السحب التالي. والنتائج يشرحها الرسم البياني بالنقط التالية:



(أ) كم عدد مرات سحب الكرات؟

(ب) حدد العدد المنوالي للكرات الصفراء المسحوبة؟

(جـ) أوجد وسيط عدد الكرات المسحوبة.

(د) احسب متوسط عدد الكرات المسحوبة.

6- اشترك في اختبار الرياضيات 4 طلاب، 6 طالبات وكانت الدرجة المتوسطة للطلاب العشرة هي 49 درجة:

(أ) احسب الدرجة الكلية التي حصل عليها الطلاب العشرة.

(ب) إذا كانت الدرجة المتوسطة للطالبات الست هي 51، احسب الدرجة المتوسطة للطلاب الأربعة.

7- كتل مجموعة من الطلاب في الصف الثاني الثانوي يبينها الشكل البياني التالي للأصل – الفروع.

الكتلة بالكيلو جرام لطلاب الصف الثاني الثانوي	
3	9 6
4	7 7 9 8 1 4 6 3 8 8 9
5	1 4 6 2 3 1
6	1

(أ) كم عدد الطلاب الذين شملهم المسح؟

(ب) احسب متوسط كتل الطلاب؟

8- أجريت دراسة مسحية لمعرفة المدة التي سيستمع فيها مستخدمو الهواتف النقالة لإعلان عبره قبل إقفال المكالمة. النتيجة مبينة في الشكل البياني التالي للأصل والفروع.

0	2 3 2 1 5 8 9 1 4 4
1	1 5 3 3 5
2	1 8 1 4
3	0 0 0 0 0 0

(أ) كم عدد المتحدثين الذين شملهم المسح؟

(ب) إذا كان أقصر وقت للمكالمة 0.1 دقيقة. فما هو الوقت الكلي للإعلان.

(جـ) احسب متوسط طول المكالمة.

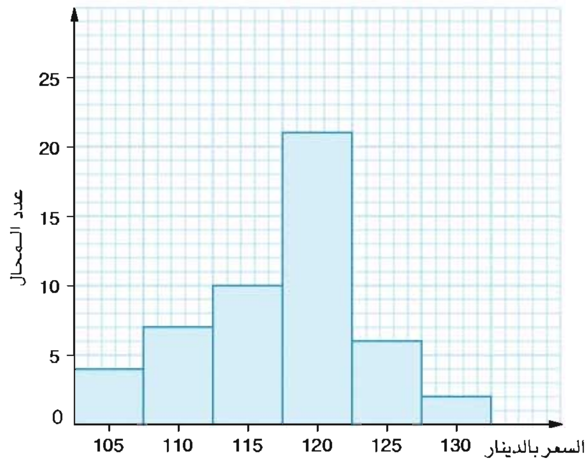
القسم ب

9- قامت جمعية المستهلكين بفحص أسعار المسجلات من ماركة معينة والتي بيعت في 50 **محلاً مختلفاً** والنتيجة يبينها **المدرج** التكراري. أوجد :

(أ) السعر المنوالي للمسجل.

(ب) السعر الوسيط للمسجل.

(جـ) السعر المتوسط للمسجل.



10- يبين الجدول التالي نتيجة معاينة 100 صندوق لأقلام الحبر يحتوي كل منها على 20 قلمًا.

عدد الأقلام غير الصالحة في الصندوق	عدد الصناديق
0	26
1	34
2	26
3	10
4	3
5	1

أوجد :

(أ) وسيط عدد الأقلام غير الصالحة في كل صندوق.

(ب) منوال عدد الأقلام غير الصالحة في كل صندوق.

(جـ) متوسط عدد الأقلام غير الصالحة في كل صندوق.

التقويم

Assessments

التقويم 2

القسم أ

غير مسموح باستخدام الآلة الحاسبة.

1- بالنسبة للتوزيع: 2، 4، 5، 2، 4، 1، 0

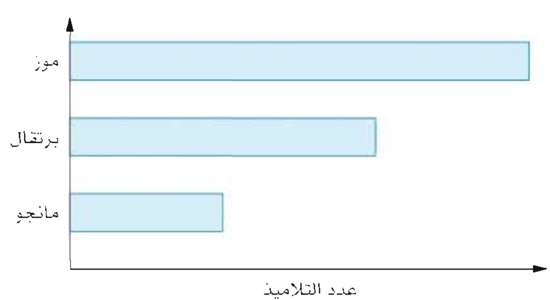
أوجد:

(أ) المتوسط.

(ب) الوسيط

(جـ) المنوال.

2- سئلت مجموعة من الطلبة عن الفاكهة المفضلة لديهم. يبين الرسم البياني بالقضبان المعلومات التي جُمِعت.



(أ) إذا كان 20 طالبًا يحبون البرتقال. أوجد عدد الطلبة الذين شملتهم العينة.

(ب) احسب زاوية القطاع الذي يعبر عن الذين يفضلون المانجو.

3- ارسم النقط أ (1،2) ، ب (2، -5)، حـ (0،7) على ورقة رسم بياني، فإذا كانت هذه النقاط ثلاث رؤوس لمتوازي أضلاع حدد الرأس الرابع ثم اكتب إحداثييه.

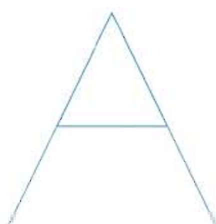
4- حل المعادلتين الآنيتين الآتيتين:

س + ص = 1

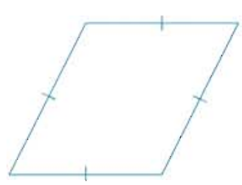
2س + ص = 0

5- ارسم جميع خطوط التماثل الممكنة في كل من الأشكال التالية:

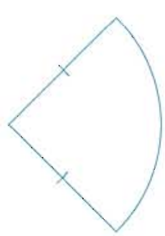
(أ)



(ب)



(جـ)



القسم ب

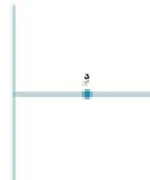
6- **غير مسموح باستخدام الآلة الحاسبة.**

(أ) أوجد مفكوك (أ + 2) (3أ - 4)

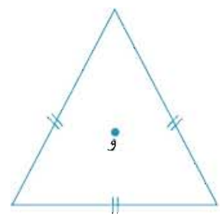
(ب) حل 5ب^2 - 22 ب + 21

7- أوجد رتبة التماثل الدوراني حول النقطة (و) في كل من الأشكال التالية:

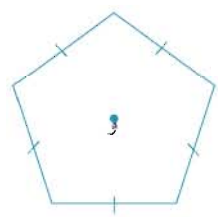
(أ)



(ب)

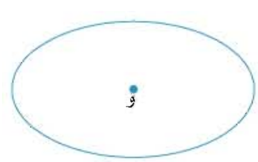


(جـ)



(د)

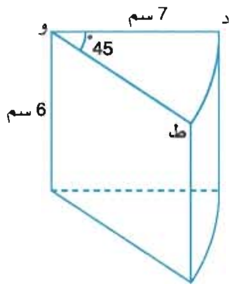
(هـ)



8 - معتبرًا ($\pi = \frac{22}{7}$) احسب :

(أ) مساحة القطاع الدائري د و ط.

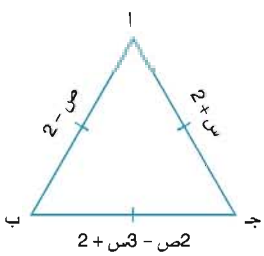
(ب) حجم المنشور.



9- ا ب جـ مثلث متساوي الأضلاع جميع أطواله بالسنتيمتر.

(أ) أوجد قيمة كل من س ، ص.

(ب) ثم احسب محيط المثلث.



10- انقل وأكمل الجدول التالي لقيم العلاقة ص = 3س − 2:

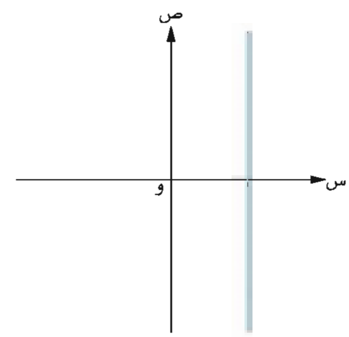
س	-2	0	2
3 س -2			6 -2
ص = 3س − 2			4

حدد إحداثيات النقط التي عندها يقطع الخط المستقيم محور الصادات

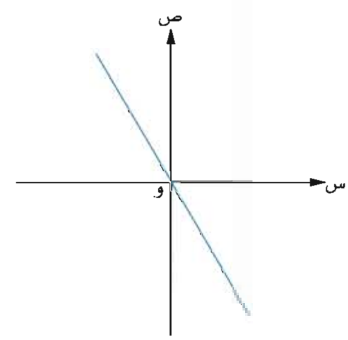
11- زاوج بين الأشكال التالية وقائمة المعادلات المعطاة:

ص = 3س، ص = 3 ، س = 3 ، ص = -3س.

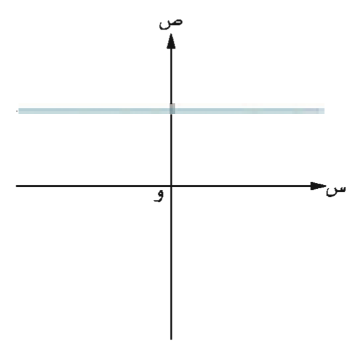
(أ)



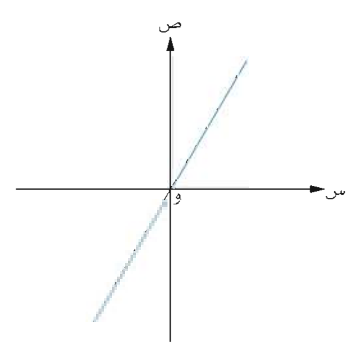
(ب)



(جـ)



(د)

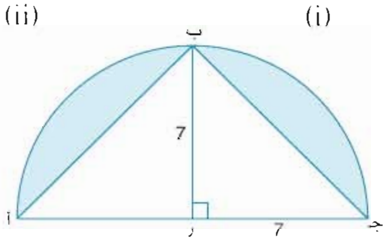


12- قبل عامين كان مجموع عمر ولد وأخته الصغرى 20 عامًا. وبعد ثلاثة سنوات من الآن سوف يختلف عمريهما بمقدار عشر سنوات كون معادلتين آنيتين ثم أوجد عمر كل منهما الآن.

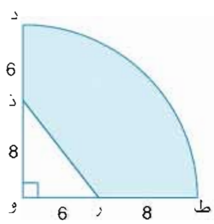
القسم جـ

13- **(أ)** معتبرًا ($\pi = \frac{22}{7}$) احسب مساحة المنطقة المظللة في كل من الأشكال التالية . كل الأطوال مقاسة بالسنتيمتر.

(i)



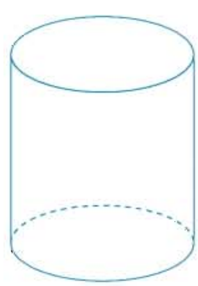
(ii)



(ب) حجم مخروط هو 462سم^3 ونصف قطر قاعدته 7سم احسب ارتفاعه (معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$).

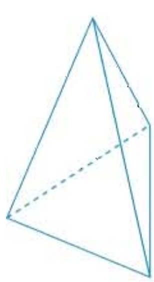
14- لكل من الأشكال التالية ارسم مستوى تماثل واحد. مستخدمًا الخط المنقط حدد محور الدوران الذي يعطي أعلى رتبة من التماثل الدوراني.

(أ)



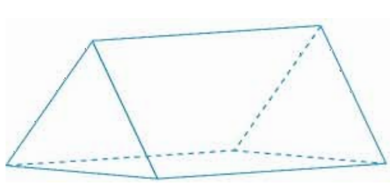
أسطوانة

(ب)



هرم ذو أربعة أوجه مثلثة منتظمة

(جـ)



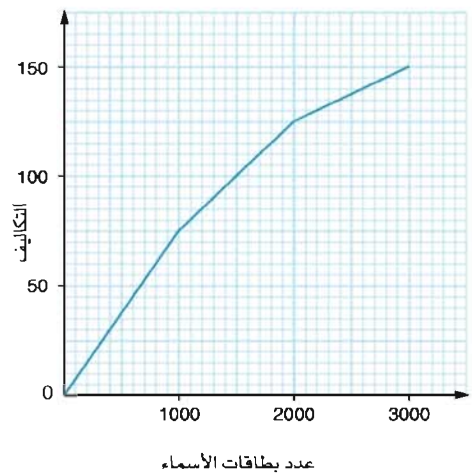
منشور ثلاثي

التقويم 3

القسم أ

غير مسموح باستخدام الآلة الحاسبة

1- يبين الشكل البياني التالي تكاليف طباعة بطاقات الأسماء.

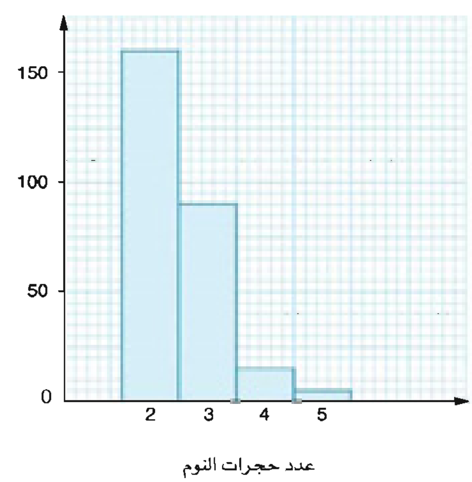


(أ) كم عدد البطاقات التي تتكلف 75 دينارًا؟

(ب) ما هي تكاليف طباعة 2500 بطاقة؟

(جـ) ما تكاليف طباعة كل بطاقة إذا تم طباعة 3000 بطاقة؟

2-



يبين المدرج التكراري عدد حجرات النوم في كل شقة داخل المجمع السكني:

(أ) حدد العدد المنوالي لحجرات النوم.

(ب) ما إجمالي عدد الشقق؟

(جـ) احسب متوسط عدد حجرات النوم في كل شقة؟

3- **(أ)** أوجد مفكوك:

(i) $5(3أ + ب)$.

(ii) $5حـ(3 - حـ)$.

(ب) حلل:

(i) 15 س - 6ص.

(ii) $6س^2ص + 3س ص^2$

4- **(أ)** ارسم النقط د (-2، 1)، ط (-1، -2)، ر (2، -1)، ذ (2، 4).

(ب) صل النقط د إلى ر ، ط إلى ذ

(جـ) حدد إحداثيات نقطة تقاطع د ر ، ط ذ.

5- حل المعادلتين الآتيتين:

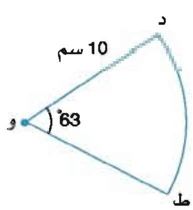
2 س - 3 ص = 4،

ص = س - 3

6- (معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$) احسب:

(أ) طول القوس د ط.

(ب) محيط القطاع الدائري د و ط.

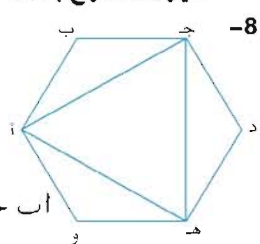


7- اكتب أي أربعة حروف لاتينية كبيرة، يكون لها تماثل دوراني.

القسم ب

غير مسموح باستخدام الآلة الحاسبة

8-



أ ب حـ د هـ و مضلع منتظم.

احسب :

(أ) **(i)** ∠ أ ب حـ

(ii) ∠ حـ أ ب

(iii) ∠ هـ أ حـ

(ب) ما هو الاسم الخاص بالمثلث أ حـ هـ ؟

9- عدد الساعات التي يقضيها مكتب خدمات مع كل من عملاءه يوضحها الشكل البياني للأصل والفروع.

0	9
1	1 4 0 1 6 0 4
2	6 0 7 1 7 0 7 9
3	2 1 4
4	0

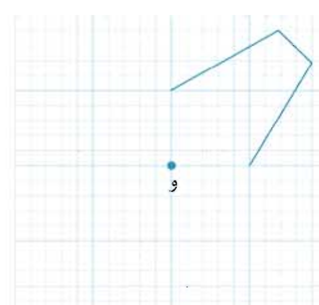
(أ) كم عدد العملاء الذين خدمهم المكتب؟

(ب) إذا كان أقصر وقت يستغرقه العميل هو 9 ساعات فما هو أطول وقت يستغرقه؟

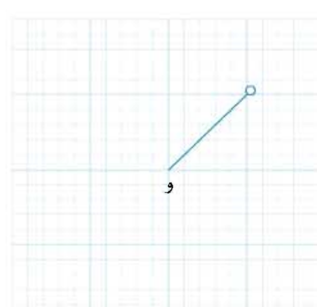
(جـ) احسب متوسط طول الوقت المستغرق.

10- مستخدمًا النقطة (و) كمركز للتماثل الدوراني، أكمل كلًّا من الأشكال التالية، بحيث يكون له تماثل دوراني من:

(أ) الرتبة 4



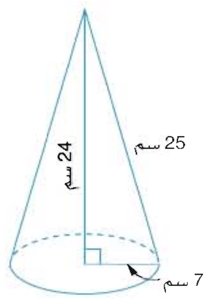
(ب) الرتبة 8



11- معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$ احسب:

(أ) مساحة السطح المنحنى للمخروط.

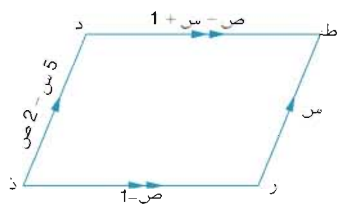
(ب) حجم المخروط.



12- د ط ر ذ متوازي أضلاع

(أ) أوجد قيم س . ص.

(ب) ثم أوجد محيط متوازي الأضلاع.



13- اختصر وأعط إجابتك على صورة كسر وحيد:

(أ) $\frac{\text{ا}}{2} + \frac{3\text{ا}}{5} - \frac{5\text{ا}}{8}$ (ب) $\frac{\text{ب} + 2}{3} - \frac{3\text{ب} - 5}{8}$

(جـ) $\frac{1}{\text{حـ}} - \frac{2}{3\text{حـ}^2}$

14- حل المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{\text{هـ}}{2} = \frac{3}{5}$ (ب) $\frac{\text{ك} + 1}{2} = \frac{3\text{ك}}{5}$

(جـ) $\frac{\text{س} + 1}{4} - \frac{\text{س}}{5} = \frac{1}{2}$

15- (أ) حلل $\text{ا}^2 - \text{ب}^2$.

(ب) حينئذ أحسب قيمة $\frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{(\text{ا} + \text{ب})}$ من دون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ا = 6.54، ب = 3.46.

القسم جـ

يمكن استخدام الآلة الحاسبة

16- (أ) انقل وأكمل الجداول الآتية لقيم العلاقتين

ص = 2 - 2س، ص = 3س - 8

جدول المعادلة ص = 2 - 2 س

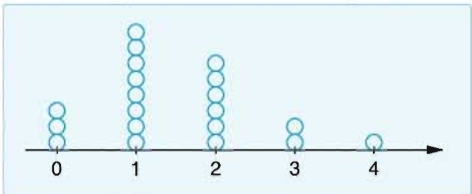
س	0	1	3
ص	2		

جدول المعادلة ص = 3س − 8

س	1	3	5
ص		1	

(ب) مستخدمًا 2 سم لتمثل كل وحدة من محور السينات و1 سم لتمثل كل وحدة من محور الصادات.
ارسم الشكل البياني للمعادلة ص = 2 − $س^2$ ، وللمعادلة ص = 3 س − 8، ثم استخدم الرسم البياني في حل المعادلتين الآتيتين.

17- الشكل البياني بالنقط يوضح عدد الحيوانات الأليفة التي يمتلكها كل طفل في حديقته.



(أ) ما عدد الأطفال الذي شملهم المسح؟

(ب) ما هو العدد المنوالي للحيوانات؟

(جـ) أوجد وسيط عدد الحيوانات.

(د) احسب متوسط عدد الحيوانات.

الإجابات

Answers

الفصل الأول

تمرين 1أ

3- ... 14 و31

النشاط

صفحة 12

تمرين 1ب

= 2 + 11 ب = 12 $ب^2$

مـ ن = 3م + $ن^2$ = 3ن

تمرين 1جـ

تمرين 1د

تمرين 1هـ

1- ... 8   2- 64 $م^3$ 3- 8 $ب^3$ - 1   4- 27 $م^3$ - $ق^3$

تمرين 1و

تمرين 1ز

[illegible]

تمرين 1ح

[illegible]

تمرين 1ط

[illegible]

تمرين 1ي

[illegible]

تمرين 1ك

1- (أ) $(ص + 3)(ص^2 - 3ص + 9)$ (ب) $(4 - ع)(16 + 4ع + ع^2)$

(جـ) $2(ز - 2)(ز^2 + 2ز + 4)$ (د) $(\frac{1}{5} + م)(\frac{1}{25} - \frac{م}{5} + م^2)$

(هـ) $(\frac{3}{2} س - \frac{2}{3})(\frac{9}{4} س^2 + س + \frac{4}{9})$ (و) $(ي - ل)(ي^2 + ي ل + ل^2)$

2- (أ) $س^3 + 3ص^2س + 3س^2ص$ (ب) $(أ - 9)(أ^2 - 3أ + 21)$

(جـ) $(ك + 4)(ك^2 - 10ك + 52)$ (د) $(9م - 1)(81م^2 + 9م + 1)$

3- (أ) $(س - ص)(س + ص)(س^4 + س^2ص^2 + ص^4)$

(ب) $(م ن - ك)(م^2ن^2 + م ن ك + ك^2)$

4- (أ) $\frac{19}{216}$ (ب) 11.30

ورقة المراجعة 1

الفصل الثاني

تمرين 2 أ

تمرين 2 ب

تمرين 2 جـ

تمرين 2 د

تمرين 2 هـ

[illegible]

تمرين 2 و

[illegible]

تمرين 2 ز

[illegible]

تمرين 2 ح

[illegible]

ورقة المراجعة 2

[illegible]

الفصل الثالث

تمرين 3 أ

1 [illegible]

2 [illegible]

6 [illegible] 7 [illegible]

تمرين 3 ب

س	2–	1–	0	1	2
ص	10–	5–	0	5	10
(س ، ص)	(10– ، 2–)	(5– ، 1–)	(0 ، 0)	(5 ، 1)	(10 ، 2)

س	3–	2–	1–	0	1	2	3
ص	3	2	1	0	1–	2–	3–
(س ، ص)	(3 ، 3–)	(2 ، 2–)	(1 ، 1–)	(0 ، 0)	(1– ، 1)	(2– ، 2)	(3– ، 3)

س	2–	1–	0	1	2
ص	6	3	0	3–	6–
(س ، ص)	(6 ، 2–)	(3 ، 1–)	(0 ، 0)	(3– ، 1)	(6– ، 2)

س	3–	2–	1–	0	1
ص	2	3	4	5	6
(س ، ص)	(2 ، 3–)	(3 ، 2–)	(4 ، 1–)	(5 ، 0)	(6 ، 1)

س	1–	0	1	2	3
ص	4–	3–	2–	1–	0
(س ، ص)	(4– ، 1–)	(3– ، 0)	(2– ، 1)	(1– ، 2)	(0 ، 3)

تمرين 3 جـ

2

س	2–	1–	0	1	2
ص	3–	1	5	9	13

3 [illegible]

تمرين 3 د

1 [illegible]

2 [illegible]

5 [illegible]

6 [illegible]

ورقة المراجعة 3

1 [illegible]

2 [illegible]

3 [illegible]

4 [illegible]

5

س	2–	0	2
2س 4–	4– 4–	0 4–	4 4–
ص = 2س – 4	8–	4–	0

6 [illegible] ص = 3 [illegible] ص = س – 1

[illegible] س = 5

7 (أ) 35 أ = 21

(ب) 6 أ ب – 40 أ جـ

(جـ) 2 م (2 – ن)

(د) س (س ص + 1)

التقويم 1

الفصل الرابع

تمرين 4 أ

تمرين 4 ب

تمرين 4 جـ

تمرين 4 د

تمرين 4 هـ

تمرين 4 و

ورقة المراجعة 4

س	3	2	4
ص	3-	6	10

س	0	2	4
ص	3	1-	5-

الفصل الخامس

تمرين 5أ

-1 (أ) 11 كم (ب) 20.9 كم
(جـ) 27.5 كم (د) 33 كم
-2 (أ) 12.6 كم (ب) 0.785 كم
(جـ) 5.42 كم (د) 11.8 كم
(هـ) 31.4 كم (و) 6.28 كم
(ز) 36.6 كم (ح) 14.1 كم
-3 (أ) 70° (ب) 175°
(جـ) 245° (د) 280°
(هـ) 315° (و) 35°
-4 (أ) 7 كم (ب) 10 كم
(جـ) 12 كم (د) 9 كم
-5 (أ) 16.5 كم (ب) 27 كم
-6 (أ) 19.8 كم (ب) 45 كم
-7 (أ) 11 كم (ب) 29 كم
-8 120°
-9 44 كم

تمرين 5ب

-1 (أ) 88 كم^2 (ب) 89.1 كم^2
(جـ) 68.2 كم^2 (د) 44 كم^2
-2 (أ) 6.28 كم^2 (ب) 7.07 كم^2
(جـ) 0.523 م^2 (د) 1030 م^2
(هـ) 106 م^2 (و) 21.4 كم^2
-3 (أ) 35° (ب) 105°
(جـ) 245° (د) 280°
-4 (أ) 12 كم (ب) 10 كم
(جـ) 8 كم (د) 6 كم
-5 (أ) 40 كم (ب) 16 كم
(جـ) 132 كم^2 (د) 180 كم^2
(هـ) 6 كم (و) 4 كم
-6 (أ) 27.72 كم^2 -7 1730 كم^2
-8 83.16 كم^2
-9 (أ) 56 كم^2 (ب) 28 كم^2
-10 (أ) 4.19 كم^2 (ب) 12.6 كم^2
-11 112 كم^2 -12 392 كم^2

تمرين 5جـ

-1 (أ) 138 سم^2 (ب) 360 سم^2
(جـ) 286 سم^2 (د) 681 سم^2
-2 (أ) 72سم^3 (ب) 400 سم^3
(جـ) 280سم^3 (د) 957 سم^3
-3 (أ) 6سم (ب) 8 سم
(جـ) 12سم
-4 (أ) 49 سم^2، 7سم (ب) 81 سم^2، 9 سم
(جـ) 169سم^2، 13سم
-5 (أ) 30سم^2، 70سم^3 (ب) 3.6 م^2، 4.8 م^3
(جـ) 72 سم^2، 6سم (د) 17 م^2، 6م
(هـ) 7سم، 42 سم^2 (و) 6.7 م، 33.5 م^2
(ز) 7سم ، 56 سم^2 (ح) 7.8 م، 31.2م^2

تمرين 5د

-1 (أ) 162.8سم^2 (ب) 76.56 سم^2 (جـ) 550 م^2
-2 (أ) 113 سم^2 (ب) 283 سم^2 (جـ) 102 م^2
-3 55سم^2
-4 (أ) 55.44 سم^2، 92.4سم^2 (ب) 346.5 م^2، 369.6 م^2
(جـ) 25م، 154م^2 (د) 37سم، 3850سم^2
(هـ) 21سم، 1386سم^2 (و) 2.8م، 24.64م^2
(ز) 14م، 651.2م^2 (ح) 3.5 سم، 137.5 سم^2
-5 6 سم.

تمرين 5هـ

-1 (أ) 5280 سم^3 (ب) 70.4 سم^3 (جـ) 15.4 م^3
-2 (أ) 24م (ب) 4 سم (جـ) 2.1 م
-3 (أ) 3سم (ب) 12م (جـ) 12 سم
-4 (أ) 30 سم^2 (ب) 12.3 سم^2 (جـ) 114م^2
-5 (أ) 0.7 سم (ب) 6 م (جـ) 3سم
-6 (أ) 154 سم^2 (ب) 1232 سم^3

تمرين 5و

-1 (أ) 12.6سم^2، 4.19 سم^3 (ب) 2460 سم^2، 11500 سم^3
(جـ) 615سم^2، 1440سم^3 (د) 19.6 سم^2، 8.18 سم^3
-2 (أ) 6سم، 144π سم^2 (ب) 3سم، 36π سم^2
-3 (أ) 7سم، 1437سم^3 (ب) 3.5 سم، 180 سم^3
-4 (أ) 288π سم^3 (ب) 1 سم.
-5 693م^2
-6 785 سم^3
-7 (أ) 170سم^2، 198سم^3 (ب) 104 سم^2، 94.2 سم^3
(جـ) 716سم^2، 1580سم^3
-8 (أ) 3768 سم^3 (ب) $523\frac{1}{3}$ سم^3 (جـ) 1.67 سم
-9 $\frac{2}{3}$
-10 (أ) $\frac{4}{9}$ (ب) $\frac{4}{9}$

ورقة المراجعة 5

-1 (أ) $5\frac{1}{2}$ سم -2 (أ) 100سم^3 (ب) 15 سم
(ب) $19\frac{1}{4}$ سم^2 (جـ) 1.8م^2.
-3 (أ) 20 سم^3 (ب) 6م -4 (أ) 616سم^2
(جـ) 13 سم (ب) 4851 سم^3
-5 210° -6 24 سم -7 (أ) 32.5 سم^2
-8 (أ) 10سم (ب) (i) 49 سم^2 (2) 14 سم^2 (iii) 7سم
-9 (أ) 70° -10 (أ) 15.7سم^3
(ب) 63π سم^2 (ب) 90سم^2

الفصل السادس

تمرين 6أ

1- مثلث. شكل رباعي. شكل خماسي. شكل سداسي. شكل سباعي. شكل ثماني. شكل تساعي. شكل عشاري.

2- (أ) 720° (ب) 1260

3- (أ) 108° (ب) 135

4- (أ) 7 (ب) 4

5- 100° 6- 40°

7- (أ) 30° (ب) 120°

8- (أ) 12 (ب) 10

9- (أ) 20 (ب) 18

10- 24° 12- 15 13- 111 14- 8

15- (أ) (i) 108° (ii) 144° (ب) 10

ورقة المراجعة 6

1- (أ) 1440° (ب) 144°

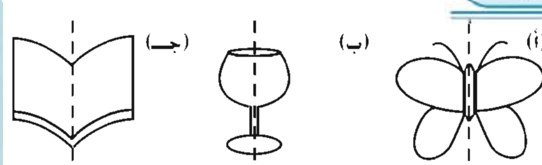
2- (أ) 8 (ب) 12

3- (أ) 130° (ب) 250°

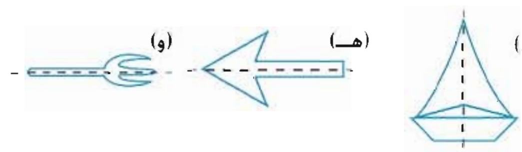
الفصل السابع

تمرين 7أ

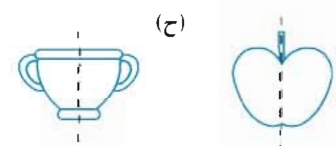
1- (أ) (ب) (جـ)



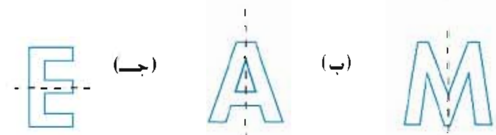
(د) (هـ) (و)



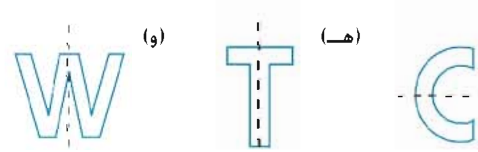
(ز) (ح)



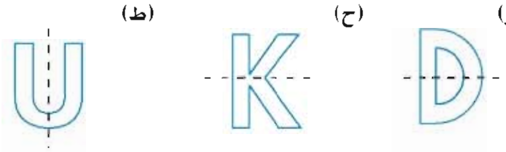
2- (أ) (ب) (جـ)



(د) (هـ) (و)

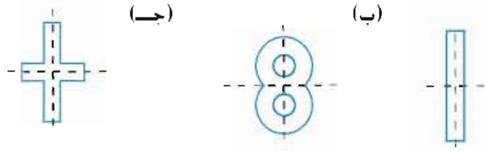


(ز) (ح) (ط)

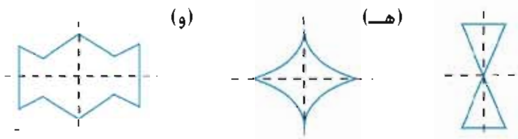


(ي)

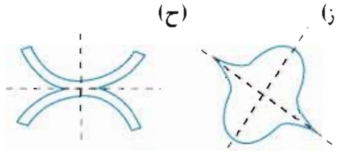
3- (أ) (ب) (جـ)



(د) (هـ) (و)



(ز) (ح)

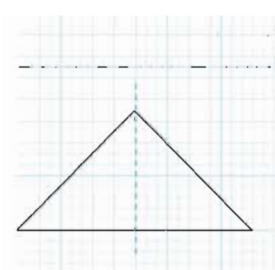


4- (أ) 1 (ب) 1 (جـ) 1 (د) 2

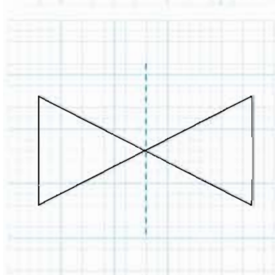
(هـ) 2 (و) 2 (ز) 4 (ح) 3

(ط) 8

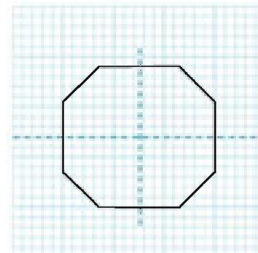
5- (أ)



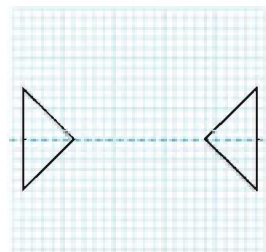
(ب)



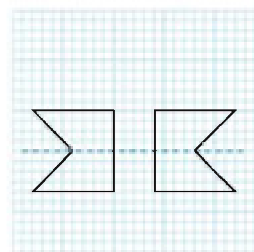
(جـ)



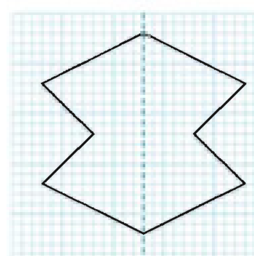
(د)



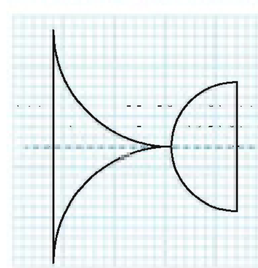
(هـ)



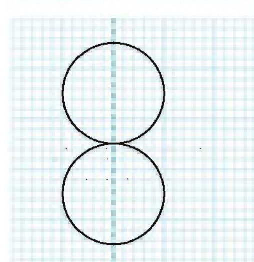
(و)



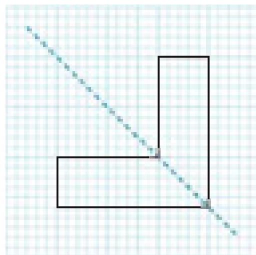
(ز)



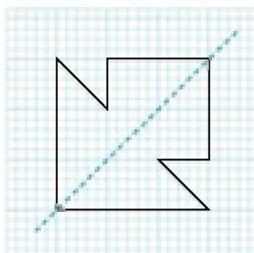
(ح)



(ط)



(ي)



6-(أ) ص = 0 (محور س) (ب) س = 0 (محور ص)

(جـ) ص = −س (د) س = 0 (هـ) ص = س (و) س = 1

تمرين 7 ب

1-(أ) 2,2 (ب) 1,1 (جـ) 2,2 (د) 1,1

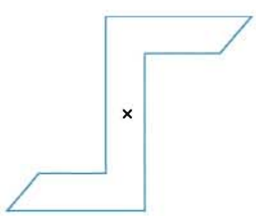
(هـ) 4,4 (و) 1,1 (ز) 4,0 (ح) 2,2

(ط) 1,1 (ي) 2,0

2-(أ)

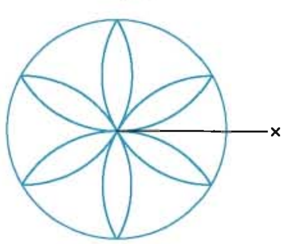
رتبة 2

(ب)

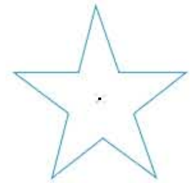


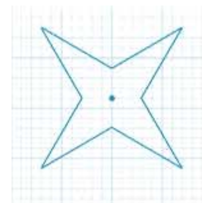
رتبة 2

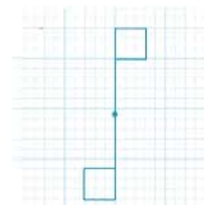
(جـ)

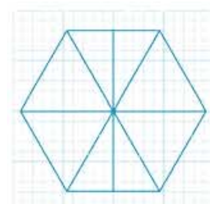


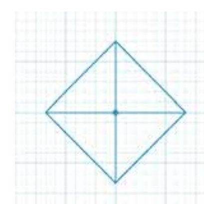
رتبة 6





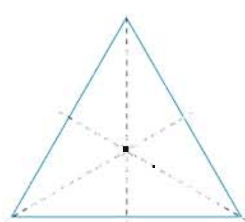


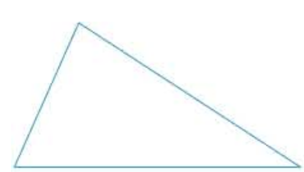


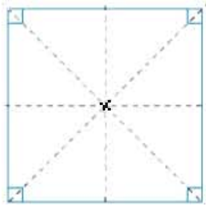


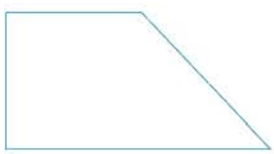
X,Z,S,N,H,I

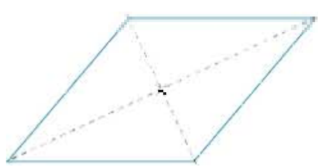
النشاط (ص 150- 152)

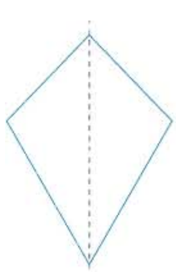


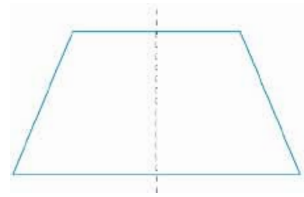


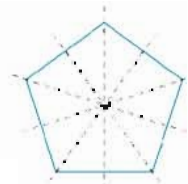


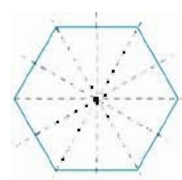


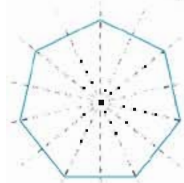


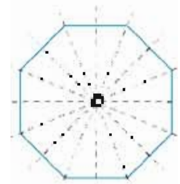


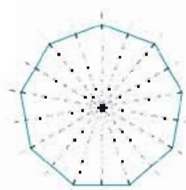


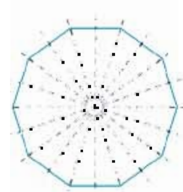




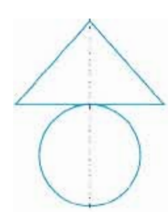


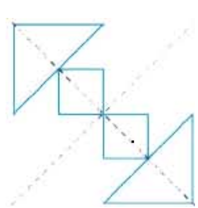


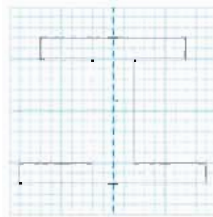


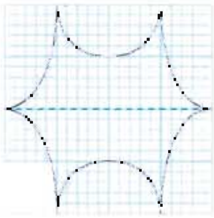


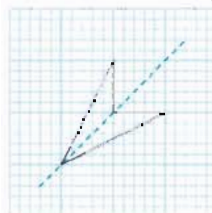
ورقة المراجعة 7

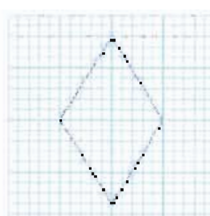


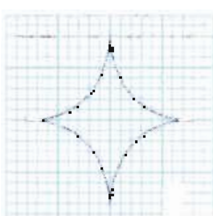












الفصل الثامن

أنشطة

الصفحة 158

تمرين 8أ

1- (أ) Δ أ ب حـ $\equiv$ Δ س ص ع (ض ض ض)
(ب) Δ أ ب حـ $\equiv$ Δ د ط ر (ض ض ض)
(جـ) Δ د ط ر $\equiv$ Δ ع س ص (ض ز ض)
(د) Δ أ ب حـ $\equiv$ Δ ط ر د (ض ز ض)
(هـ) Δ أ ب حـ $\equiv$ Δ د ط ر (ز ض ز)
(و) Δ أ ب حـ $\equiv$ Δ ص س ع (زض ز)
(ز) Δ أ ب حـ $\equiv$ Δ ع ص س (ض ز ض)
(ح) Δ أ ب حـ $\equiv$ Δ س ص ع (زض ز)

2- (أ) $\angle$ س، س ص، $\angle$ ص، Δ ع س ص (ض ز ض)
(ب) ء و، و ف، Δ ء و ف (ض ض ض)
(جـ) ى س، $\angle$ س ى، ى س، تقابل بالرأس، ز ي، Δ س ى س (ض ز ض)
(د) ر م ط، ر ط، مشترك، Δ م ر ط (ض ز ض)

3- (أ) س = 3.2 سم
(ب) $\angle$ أ = 30°
(جـ) س = 6 سم
(د) $\angle$ ب = 30°
(هـ) $\angle$ س = 85°، $\angle$ د = 65°
(و) $\angle$ س = 30°، $\angle$ ص = 90°، $\angle$ ع = 90°
(ز) $\angle$ أ = 60°، $\angle$ ب = 30°، $\angle$ حـ = 30°
(ح) $\angle$ د = 50°، $\angle$ ط = 20°
(ط) $\angle$ س = 50°، $\angle$ ص = 30°
(ى) $\angle$ س = 15°، $\angle$ ص = 15°
(ك) $\angle$ د = 30°، $\angle$ ط = 30°

تمرين 8ب

1- (أ) $\angle$ س، $\angle$ ص، أ ب حـ، س ص ع (ب) $\frac{2}{3}$، د ط ر

2- (أ) $\Delta\Delta$ أ ب حـ، د ط ر (متشابهان)
(ب) $\Delta\Delta$ أ ب حـ، س ص ع (متشابهان)
(جـ) $\Delta\Delta$ د ط ر، س ص ع (متشابهان)
(د) $\Delta\Delta$ د ط ر، س ص ع
(هـ) $\Delta\Delta$ أ ب حـ، س ص ع

3- (أ) س = 4 سم (ب) $\angle$ س = 30°، $\angle$ ص = 45°
(جـ) ع = 5 سم (د) د = 2 سم
(هـ) س = 3 سم (و) س = 15 سم
(ز) أ = $7\frac{1}{2}$ سم، ب = $19\frac{1}{2}$ سم (ح) ع = $3\frac{3}{4}$ سم

4- (أ) س = $1\frac{1}{2}$ سم، ص = 2 سم (ب) أ = 0.9 سم، ب = 0.6 سم
(جـ) ذ = 3 سم، ت = 4 سم (د) س = 4 سم
(هـ) ص = 8 سم (و) س = 3، ص = 6

تمرين 8جـ

1- 7.2 $م^2$ 2- 12 $م^2$ 3- $1\frac{1}{3}$ $م^2$
4- س = 0.15 $م^2$، ص = 2 م 5- 3 $م^2$ 6- 1.5 $م^2$
7- 9 $م^2$ 8- 9 $م^2$

أنشطة (صفحة 182)

1- (أ) 4 $سم^2$ (ب) 36 $سم^2$ (جـ) 3 : 1 (د) 9 : 1
2- (أ) 9 $م^2$ (ب) 225 $م^2$ (جـ) 5 : 1 (د) 25 : 1
3- (أ) 49 π (ب) 144 π (جـ) 3 : 1 (د) 9 : 1
4- (أ) 196 π (ب) 4900 π (جـ) 5 : 1 (د) 25 : 1
5- (أ) نعم (ب) 3 : 2 (جـ) 9 : 4
6- (أ) نعم (ب) 3 : 4 (جـ) 9 : 16

تمرين 8د

1- (أ) 40 $سم^2$ (ب) 90 $سم^2$ (جـ) 250 $سم^2$
(د) 640 $سم^2$ (هـ) 2.5 $سم^2$ (و) 22.5 $سم^2$

2- (أ) 32 $سم^2$ (ب) 72 $سم^2$ (جـ) 288 $سم^2$
(د) 800 $سم^2$ (هـ) 2 $سم^2$ (و) 0.5 $سم^2$
(ز) 18 $سم^2$ (ح) 50 $سم^2$

3- (أ) 2 : 1 (ب) 4 : 1 (جـ) 1 : 3
(د) 1 : 2 (هـ) 1 : 6 (و) 10 : 1
(ز) 3 : 2 (ح) 5 : 6 (ط) 7 : 8
(ى) 5 : 3 (ك) 1 : 10 (ل) 100 : 1

4- 45 $سم^2$ 5- 81 : 49
6- 1 : 2 7- 72 دينارًا
8- 103.50 دينار 9- 2500 : 1
10- 225 دينارًا
11- (أ) نعم (ب) (i) 3 : 2
(ii) 16.05 سم (iii) 11.2 سم
12- (أ) 16 $سم^2$ (ب) 33 $سم^2$

أنشطة (صفحة 185)

1- (أ) 27 $سم^2$ (ب) 216 $سم^3$
(جـ) 2 : 1 (د) 8 : 1

2- (أ) 64 $سم^3$ (ب) 1 $سم^3$
(جـ) 1 : 4 (د) 1 : 64

3- (أ) 30 $سم^3$ (ب) 3750 $سم^3$
(جـ) نعم (د) 5 : 1
(هـ) 125 : 1

4- (أ) 8 $سم^3$ (ب) $\frac{1}{8}$ $سم^3$
(جـ) 1 : 4 (د) 1 : 64

5- (أ) 1540 $سم^3$ (ب) 41580 $سم^3$
(جـ) نعم (د) 1 : 3
(هـ) 1 : 27

تمرين 8هـ

[illegible]

تمرين 8و

[illegible]

ورقة المراجعة 8

[illegible]

الفصل التاسع

تمرين 9أ

[illegible]

تمرين 9ب

[illegible]

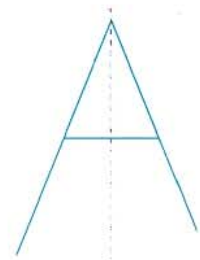
تمرين 9ج

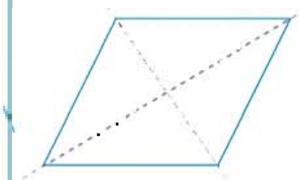
[illegible]

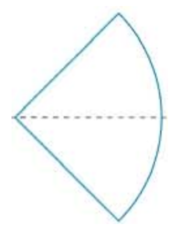
ورقة المراجعة 9

[illegible]

التقويم 2



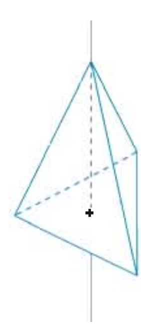


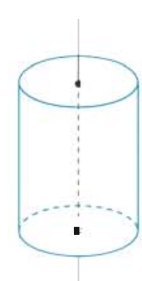


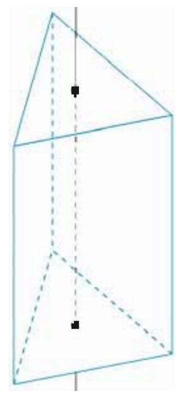
10.

س	-2	0	2
3 س	-6	0	6
-2	-2	-2	-2
ص = 3س - 2	-8	-2	4

14.

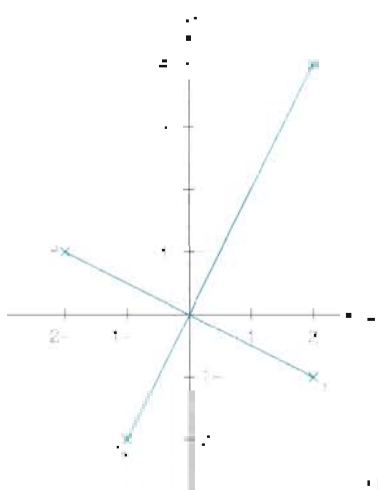




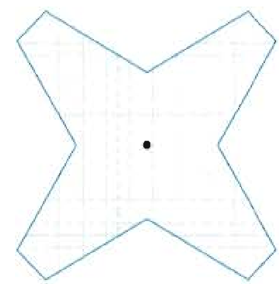


التقويم 3

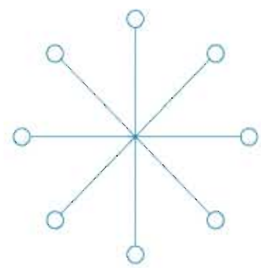
4.



10- (أ)



(ب)



11- (أ) 550 سم^2 (ب) 1232 سم^3

12- (أ) س = 2، ص = 4 (ب) 10 وحدات

13- (أ) $\frac{19أ}{40}$ (ب) $\frac{31 - ب}{24}$

(جـ) $\frac{3حـ - 2}{3حـ^2}$

14- (أ) هـ = $1\frac{1}{5}$ (ب) ك = 5

(جـ) س = 5

15- (أ) (أ − ب)(أ + ب). (ب) 0.308

16- (أ)

س	0	1	3
ص	2	0	4-

س	1	3	5
ص	5-	1	7

(ب) س = 2، ص = -2

17- (أ) 20 (ب) 1 (جـ) 1 (د) 1.5

ملاحظات