دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للصف الأول من مرحلة التعليم الثانوي
الجزء الأول

1441-1440 هـ

2020-2019 م

مُقَدِّمَة

تركز سلسلة رياضيات التعليم الأساسي والثانوي على دمج مهارات التفكير. وتقانة المعلومات.والتربية الوطنية ضمن تعليم وتعلم الرياضيات. وتتكون السلسلة من ثلاثة كتب للشق الثاني من مرحلة التعليم الأساسي. وثلاثة كتب للصفوف الثلاثة من مرحلة التعليم الثانوي. وقد رتبت المادة ترتيباً تربوياً سليماً يدعم فيه التفكير المجرد بأمثلة ملموسة. تساعد الطلبة عى فهم الحلول التي تم التوصل إليها جبرياً بشكل أفضل.

وقد روعى تقديم المفاهيم الواحد تلو الأخر لكي يستوعبها الطلبة بسهولة. وعُزز فهم المفاهيم بالإستخدام الحكيم للأمثلة المحلولة والتدريبات متدرجة الصعوبة. تُرَكِّز كتب مرحلة التعليم الأساسي على إتقان وتطبيق المهارات الأساسية بحيث. يُكوَّن أساس سليم للدراسات التالية. وتتضمن المهارات الأساسية التقدير. والحسابات الذهنية. ومعالجة البيانات.   وتُستخدم في كل جزء من السلسلة أنشطة لإرشاد الطلبة في كيفية استخدام مهارات التفكير مثل الاستقراء. ولاكتشاف القوانين والنظريات الرياضية بأنفسهم. وليتعرفوا كذلك على كيفية استخدام برامج الحاسوب في عدد من الأنشطة.

ويتم حث الطلبة من خلال نشاطات وأمثلة محلولة مناسبة على أستخدام استراتيجيات حل المشكلات. وتشجيع التعلم الذاتي مثل التقدير. وبناء النموذج. وإنشاء الجدول. وإعداد القائمة النظامية. والعمل إلي الخلف. واستخدام المعادلات. وتبسيط المشكلة. وتستخدم حيثما أمكن الأشكال البيانية لتذليل صعوبة المشكلات اللفظية ولجعلها أكثر طواعيه للحل.

ولجعل الطلبة يألفون الكتب قبل استخدامها. نورد فيما يلي الملامح المميزة لهذه السلسلة.
يبدأ كل فصل "بمقدمة" قصيرة عن الموضوع. تليها قائمة بنواتج التعلم يمكن للطلبة استخدامها في تأكيد ما تعلموه بنهاية كل فصل من الكتاب.

وتأمل أن تساعد المادة المقدمة في السلسلة الطلبة على تقدير أهمية وقدرة الرياضيات في نشاطاتهم اليومية ، وربما في مهنتهم المستقبلية ، وأن يستمتعوا بأستخدام سلسلة الرياضيات اتلعليم الأساسي والثانوي.
يقدم للطلبة "أمثلة محلولة" لتعزيز فهم المفاهيم ولتعرفيهم بأنواع عديدة من المسائل.بما فيها التي تساعدهم على مراقبة تفكيرهم الذاتي.

تتضمن "التمرينات متدرجة الصعوبة" أسئلة مناسبة لمدى واسع من القدارات. وصممت الأسئلة بشكل يجعل الطلبة يستخدمون التفكير المنطقس الاستدلالي والاستقرائي لحل المشكلات الرياضية. (ويمكن أن يختار المعلمون مسائل مختلفة للطلبة من ذوي القدارات المختلفة).

"الرياضيات المتعة" أو "استقصاء الرياضيات" والموجودة في نهاية كل فصل من الكتاب (فيما عدا فصول المراجعة) مخصصة لغرس وتنمية مهارات التفكير. وستعرض أيذا هذه الأنشطة بعض القضايا الوطنية ذات الصلة على الطلبة. كما توجد ورقة للمراجعة في نهايتن كل فصل من الكتاب (فيما عدا فصول المراجعة) حتى يتمكن الطلبة من قياس مستوى كفايتهم باستمرار.

الرموز الرياضية

نظام الوحدات العالمية Si Units

يستخدم نظام الوحدات العالمية سبع وحدات أساسية وتشتق جميع الوحدات الأخرى من هذه الوحدات الأساسية بضرب أوقسمة وحدة في وحدة أخرى.

الكمية الفيزيائية	اسم الوحدة الأساسية	رمز الوحدة
الطول	متر	م
الكتلة	كيلو جرام	كجم
الزمن	الثانية	ث
التيار الكهربائي	أمبير	أم
درجات حرارة الترمومتر	كيلفن	ك
شدة الإضاءة	شمعة	شـ
كمية المادة	مول	مل

بعض جداول التحويل Some Conversion Tables

الطول:

10 ملليمتر (مم) = 1 سم

10 سنتيمتر (سم) = 1 ديسيمتر (دس)

10 ديسيمتر (دس) = 1 متر (م)

10 متر (دس) = 1 ديكامتر (دام)

10 ديكامتر (دام) = 1 هيكتومتر (هكم)

10 هيكتومتر (هكم) = 1 كيلومتر (كم)

الكتلة:

10 ملليجرام (مج) =1 سنتيجرام (سجم)

10 سنتيجرام (سجم) = 1 ديسيجرام(دس)

10 ديسيجرام = 1 جرام

10 جرام = 1 ديكاجرام

10 ديكاجرام = 1 هيكتوجرام

10 هيكتوجرام = 1 كيلوجرام

1000 كيلوجرام = 1 طن

المساحة:

1 هكتار =10000 م^2

100 هكتار = 1 كم^2

الحجم والسعة:

1000 مل = 1 لتر

1 مل = 1 س^3

الزمن:

الدقيقة (ق) = 60 ثانية (ث)

الساعة = 60 دقيقة (ث)

1 يوم = 24 ساعة

1 عام = 365 يوم

1 سنة كبيسة = 366 يوم

الرموز الرياضية

∋ تنتمي إلى

∌ لا تنتمي إلى

∅ مجموعة خالية

⊃ مجموعة جزئية فعلية

⊅ ليست مجموعة فعلية من

⊇ مجموعة جزئية من مجموعة أخرى

⊅ ليست مجموعة جزئية من

∪ اتحاد المجموعات

∩ تقاطع المجموعات

= يساوي

≠ لا يساوي

≡ لا يكافيء

≈ تقريبا

∝ يتناسب

$>$ أصغر من

$<$ أكبر من

$\geqslant$ أصغر من أو يساوي

$\leqslant$ أكبر من أو يساوي

ط = مجموعة الأعداد الطبيعية. = { 1 ، 2، 3 ، ... } –

ك =مجموعة الأعداد الكلية. { 0، 1 ، 2 ، 3 ، .. } –

ص = مجموعة الأعداد الصحيحة. { 0 ، ± 1 ، ± 2 ، ± 3 ، ... }

ن مجموعة الأعداد القياسية.

ح مجموعة الأعداد الحقيقية.

أ + ب وتعنى أ زائد ب

أ – ب وتعنى أ ناقص ب

أ × ب = أ . ب وتعني أ مضروبة في ب

$\frac{أ}{ب}$ وتعني أ مقسومة على ب

$\sqrt{أ}$ الجذرالتربيعي للعدد الحقيقي أ حيث: أ > الصفر

| أ | القيمة المطلقة للعدد الحقيقي أ

π ط وقيمتها 3.14 أو 22 ÷ 7

مساحة المربع= طول ضلع المربع × نفسه

محيط المربع = طول ضلع المربع × 4

مساحة المستطيل= الطول × العرض

محيط المستطيل = (الطول + العرض) × 2

مساحة المثلث= $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

محيط الدائرة=2 π نق.

مساحة الدائرة= π نق^2.

حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ π نق^3

مساحة سطح الكرة = 4 π نق^2

المساحة الكلية للأسطوانة = 2× نق × π (ع+نق).

حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

حجم المكعب = ل^3 حيث ل طول حرف المكعب

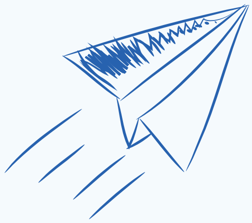
المحتويات

1

الباب الأول

المجموعات

المجموعات Sets



في نهاية هذا الفصل يكون الطالب قادراً على أن:

- يَصل إلى مفهوم المجموعة.
- يَستخدم العمليات على المجموعات لحل التمارين.
- يُعرف العلاقة الثنائية.
- يُميز بين العلاقة والدالة.

مقدمة:

سنقدم في هذا البند العناصر الأساسية المتعلقة بمفهوم المجموعة، وسنتناول بإيجاز دراسة معنى المجموعات وكتابة المجموعات والمجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية والمجموعات المتساوية والمجموعات المتكافئة.

1-1 مفهوم المجموعة Set Concept :

عبارة عن أي تجمع من الأشياء تسمى عناصر يمكن تحديدها هل تنتمي إلى المجموعة أم لا.

الأمثلة الآتية توضح معنى المجموعة:

(أ) مجموعة الأعداد الفردية المحصورة بين 11 ، 20 .

(ب) مجموعة عوامل العدد 8 .

(جـ) مجموعة الأعداد الصحيحة بين 1 ، 10 تقبل القسمة على 12 .

(د) مجموعة الأحرف المكونة لكلمة " إفريقيا".

(د) مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة

ملحوظة:
الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر

نلاحظ من الأمثلة السابقة:

(1) المجموعة أ = { 19, 17, 15, 13 }

(2) المجموعة ب = { 8 , 4 , 2 , 1 }

(3) المجموعة جـ = { } أو ϕ

(4) المجموعة د = { أ ، ف ، ر ، ي ، ق ، ي ، أ }

(5) المجموعة هـ = { 2 , 4 , 6 , 8 , 10 ,.... }

ملحوظة:
يرمز للمجموعة بقوسين من هذا النوع
{ }

من الأمثلة السابقة يمكن ملاحظة الأتي:

1. هناك مجموعات تحتوى على عدد نهائي من العناصر تسمي مجموعة منتهية مثل المجموعات أ ، ب ، د .
2. هناك مجموعات تحتوى على عدد لا نهائي من العناصر وتسمى مجموعة لا نهائية مثل المجموعة هـ .
3. هناك مجموعات لا تحتوى على عناصر وتسمى المجموعة الخالية مثل المجموعة جـ.
4. نلاحظ انه قد يتكرر أكثر من عنصر فى المجموعات، فمثلا في المثال (د) نجد أن الحرفين " أ ، ي" تكررا في المجموعة، وبصفة عامة أتفق على عدم تكرار العناصر في المجموعة وبذلك تكون المجموعة { أ ، ف ، ر، ي ، ق ، ي ، أ } تساوي المجموعة { أ ، ف ، ر، ي ، ق}.
5. هناك طريقتان لكتابة المجموعة، طريقة القائمة أو الحصر وهي عبارة عن كتابة عناصر المجموعة مثل أ = { 5 ، 10 ، 15 ، 20 ، ... } وطريقة الوصف أو القاعدة وهي عبارة عن كتابة جملة تصف عناصر المجموعة مثل :

   ب = { س : س عدد طبيعي أكبر من 10 } .
6. هناك مجموعات أعداد غير منتهية محددة برمز تسمى مجموعات الأعداد مثل:

- مجموعة الأعداد الطبيعية (ط) " مجموعة العد" = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، ... } .
- مجموعة الأعداد الصحيحة (ص) = { 0 ، ± 1 ، ± 2 ، ± 3 ... }
- مجموعة الأعداد القياسية ن = { $\frac{أ}{ب}$ ، أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ 0 } .

ملحوظة:
عناصر المجموعة متمايزة فلا داعي لتكرار أي عنصر من عناصرها.

ملحوظة:
ترتيب عناصر المجموعة ليس له أهمية (تأثير) .

1-1-1 المجموعات المتساوية Equal Sets :

يقال عن المجموعتين أ ، ب بأنها متساويتان إذا كانت أ ⊆ ب ، ب ⊆ أ

ونعبر عن ذلك بالرمز أ = ب أي أن :

أ = ب ⟺ أ ⊆ ب ، ب ⊆ أ

> ملحوظة:
> المجموعات المتساوية هي التى تحتوي على نفس العناصر.

2-1-1 المجموعات المتكافئة Equivalent Sets :

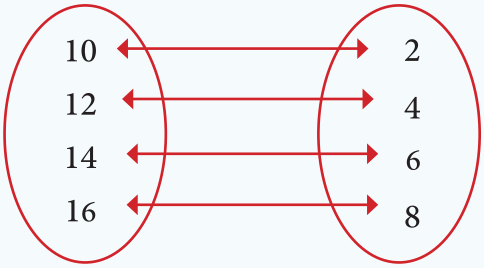
يقال للمجموعتين أ ، ب بأنها متكافئة إذا وجد تناظر بين عناصر المجموعة الأولى وعناصر المجموعة الثانية وبذلك تكون المجموعتين متكافئتين إذا كان عدد عناصرهما متساويًا أي انه إذا كانت:

أ = { 2 ، 4 ، 6 ، 8 } نجد أن: ن(أ) = 4

ب = { 10 ، 12 ، 14 ، 16 } نجد أن : ن(ب) = 4

> ملحوظة:
> المجموعات المتكافئة هي التى تحتوى على نفس العدد من العناصر.

أي أنه يمكن إيجاد تناظر بين عناصر المجموعتين أ ، ب. كما في الشكل 1-1



شكل 1-1

3-1-1 الإنتماء وعدم الإنتماء Affiliation and non-Affiliation :

نقول أن ليبيا عضو (عنصر) في مجموعة الدول المنتجة للنفط بمعنى أن ليبيا تنتمي إلى مجموعة الدول المنتجة للنفط وتكتب بالصورة الرمزية كما يلي:

ليبيا ∈ { الدول المنتجة للنفط}

والرمز ∈ يعني انتماء العنصر إلى المجموعة فمثلا إذا كانت أ = { 1 ، 3 ، 15 } فإن 3 ∈ أ وتقرأ 3 تنتمي إلى أ، ولكن 2 ∉ أ لأن العدد 2 ليس عنصرا في أ وتقرأ 2 لا تنتمي إلى أ .

4-1-1 المجموعات الجزئية Subsets :

إذا كانت جميع عناصر المجموعة أ تنتمي إلى المجموعة ب وكانت أ ≠ ب يقال في هذه الحالة أن المجموعة أ مجموعة جزئية فعلية من المجموعة ب وتكتب أ ⊂ ب . وفي حالة أ = ب يقال بأن أ مجموعة جزئية من المجموعة ب وتكتب أ ⊆ ب ، أما إذا كانت أ ليست مجموعة جزئية أو ليست مجموعة جزئية فعلية من المجموعة ب وتُكتب أ ⊄ ب .

مثال 1:

في كل حالة من الحالات الآتية أيا من المجموعات جزئية أم لا.

1) أ = { 1 ، 2 ، 3 } ، ب = {{ 1 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 }

2) س = { 1 ، 5 } ، ص = { 1 ، 5 }

3) ع = { 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 ، ... } ، ط = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ... }

4) م = { 1 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 ، ... } ، ن = { 2 ، 4 ، 6 ، 8 ، ... }

الحل:

من التعريف السابق للمجموعات الجزئية نجد أن:

1) أ ⊄ ب. 2) س ⊆ ص.

3) ع ⊂ ط. 4) م ⊄ ن

تنبيه

- الرمز ∈ يربط بين عنصر ومجموعة، أما الرمز ⊂ يربط بين مجموعتين.
- المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر بالمجموعة تسمى المجموعة الخالية ويرمز بالرمز ∅ { }.

عدد المجموعات الجزئية لمجموعة معطاة:

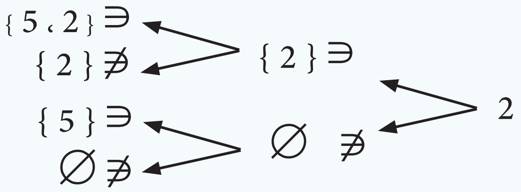
نلاحظ من المجموعة أ = { 2 } فإن عدد المجموعات الجزئية لهذه المجموعة هي { 2 }، ∅ أي أن :

$2 \in \{2\}$

$2 \notin \emptyset$

ملحوظة:
المجموعة الخالية تعتبر مجموعة جزئية من أي مجموعة.

وإذا كانت المجموعة ب = { 2 ، 5 } فإن حسب الرسم التخطيطي السابق يكون عدد المجموعات الجزئية كالآتي:



ملحوظة:
المجموعة الأصلية
تعتبر مجموعة جزئية
للمجموعة نفسها .

قاعدة : إذا كان عدد عناصر المجموعة = ن فإن عدد المجموعات الجزئية = $2^{ن}$

وبذلك يكون عدد المجموعات الجزئية هو: {{2 ، 5} ، {2} {5} ، {∅}} وتسمى مجموعة المجموعات الجزئية لأي مجموعة من غير خالية بقوة المجموعة ونرمز لها بالرمز ق (س) فمثلًا:

إذا كانت أ = {2}

فإن ق (أ) = { {2} ، ∅ }

وإذا كانت ب = { 2 ، 5 } فإن:

ق (ب) = {{ 2 ، 5 } ، {2} ، {5} ، ∅ }

وإذا كانت جـ = { -1 ، 3 ، 6 } فإن:

ق (جـ) = {{ -1 ، 3 ، 6 } ، { -1 ، 3 } ، { -1 ، 6 } ، { 3 ، 6 } {-1} ، {3} ، {6} ، ∅ }

ويمكن تعريف ق (أ) = { س : س عدد طبيعي أكبر من أ } .

لاحظ الفرق بين ∅ ، {∅} ، {0}

فالمجموعة الأولى هي المجموعة الخالية ، الثانية مجموعة تحتوي على عنصر اسمه ∅ الثالثة مجموعة تحتوي على عنصر اسمه الصفر

5-1-1 المجموعات الشاملة The Universal sets :

إذا كانت كل المجموعات في مسألة ما هي مجموعات جزئية من مجموعة ش فإن ش تسمى مجموعة شاملة فمثلا إذا كانت :

أ = مجموعة طلبة تخصص (فيزياء-رياضيات) في كلية العلوم.

ب = مجموعة طلبة تخصص (أحياء-كيمياء) في كلية العلوم.

ش = مجموعةجميع الطلبة بكلية العلوم.

ملحوظة:
المجموعة الشاملة هي
المجموعة التي تضم جميع
العناصر الداخلة في
اعتبارنا في مسألة معينة.

فإن في هذه المسألة تكون ش المجموعة الشاملة وذلك لأن أ ⊂ ش ، ب ⊂ ش

2-1 العمليات على المجموعات الجزئية Operation on sets :

1-2-1 عملية الاتحاد:

إذا كانت أ ، ب مجموعتين فإن:

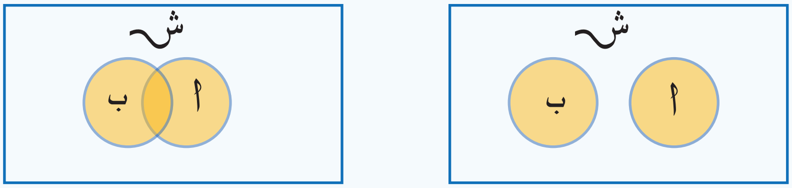
أ $\cup$ ب = { س : س $\in$ أ أو س $\in$ ب } فمثلا ...

إذا كانت أ = { 1 ، 2 ، -5 } ، ب = { 2 ، 7 ، $\sqrt{2}$ } فإن:

أ $\cup$ ب = { 1 ، 2 ، -5 ، 7 ، $\sqrt{2}$ }

كذلك إذا كانت أ = {س، ص، ع} ، ب = { ل ، م } فإن: أ $\cup$ ب = { س ، ص ، ع ، ص ، م }

يمكن توضيح عملية الاتحاد بأشكال فن كالأتي كما في الشكل(1-2) حسب المنطقة المظللة توضح اتحاد المجموعتين أ ، ب.



شكل 1-2

2-2-1 عملية التقاطع:

إذا كانت أ ، ب مجموعتين فإن:

أ $\cap$ ب = { س : س $\in$ أ أو س $\in$ ب } فمثلا ...

إذا كانت أ = { 2 ، 4 ، 5 ، 6 ، 8 } ، ب = { -2 ، -4 ، 5 ، 6 ، -7 } فإن:

أ $\cap$ ب = { 5 ، 6 }

كذلك نلاحظ أن:

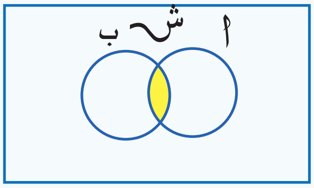
ص $\cap$ ك = { 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، .... }

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة، ك مجموعة الأعداد الكلية، أي أن:

ك = { 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، .... }

ويمكن تمثيل عملية التقاطع بأشكال فن كما فى الشكل (1-3) حيث المنطقة المظللة تمثل تقاطع المجموعتين.

أ $\cap$ ب



شكل 1-3

3-2-1 عملية الفرق:

إذا كانت أ ، ب مجموعتين فإن:

أ - ب = { س : س ∈ أ أو س ∉ ب } فمثلا ...

إذا كانت أ = { 1 ، 2 ، 5 ، 6 } ، ب = { 5 ، 6 ، -7 ، 9 } فإن:

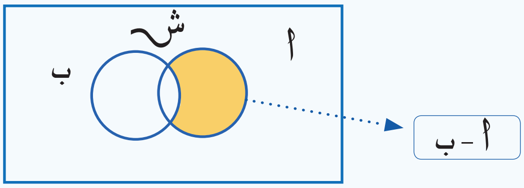
أ - ب = { 1 ، 2 }

كذلك نلاحظ أن:

ك – ط = { 0 }

ويمكن توضيح عملية الفرق بأشكال فن كما في الشكل (1-4) حيث المنطقة المظللة توضح أ - ب.

ملحوظة:
في عملية الفرق نبحث عن العناصر الموجودة في المجموعة الأولى وغير موجودة في المجموعة الثانية.



شكل 1-4

3-2-1 عملية التكميل:

إذا كانت أ مجموعة، ش~ المجموعة الشاملة فإن :

عملية التكميل للمجموعة (أ) أي المجموعة المكملة للمجموعة (أ) تعني جميع العناصر التي إلى المجموعة الشاملة ش~ ولا تنتمي للمجموعة أ وتعرف على أنها:

أ/ = { س : س ∈ ش~ أو س ∉ أ } فمثلا ...

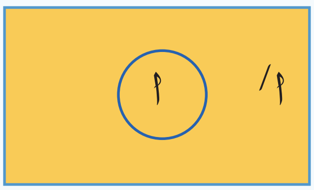
إذا كانت أ = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 } ،

ش~ = {1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10} فإن:

أ/ = { 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10}

ويمكن توضيح عملية الفرق بأشكال فن كما في الشكل (1-5)

ملحوظة:
1. أ/ = ش~ - أ
2. أ ∩ أ/ = ∅
3. أ ∪ أ/ = ش~



شكل 1-5

مثال 2:

إذا كانت أ مجموعة، ش = { 1 ، 2 ، 3 ، ... ، 10 }

أ = { 3 ، 5 ، 8 }

ب = { 3 ، 7 ، 6 }

جـ = { 2 ، 5 ، 7 ، 8 }

فأوجد: أ/ ، ب/ ، جـ/ ، جـ - ب ، أ/ - ب/

الحل:

أ/ = { 1 ، 2 ، 4 ، 6 ، 7 ، 9 ، 10 }

ب/ = { 1 ، 2 ، 4 ، 5 ، 8 ، 9 ، 10 }

جـ/ = { 1 ، 3 ، 4 ، 6 ، 9 ، 10 }

جـ - ب = { 2 ، 5 ، 8 }

أ/ - ب/ = { 6 ، 7 }

تمارين 1 - أ

(1) بين أيا من العبارات الآتية صحيحة أم لا:

أ) 0 ∈ {0 ، 1}

ب) { 0 } ∈ {0 ، 1}

جـ) ∅ ∈ {0 ، 1}

د) {0} ∈ {{0}، {1}}

هـ) {0 ، 1} ⊂ {0 ، 1}

(2) اكتب المجموعات الآتية بطريقة الوصف وطريقة القائمة:

أ) أسماء مدرسيك لهذه السنة.

ب) مجموعة الأعداد الأولية المحصورة بين 30 ، 40.

جـ) مجموعة أسماء فواكه الصيف في ليبيا.

د) مجموعة أسماء مواد حصص الجدول الإسبوعي.

(3) أوجد المجموعات الجزئية لكل من المجموعات الآتية:

أ) {1 ، 2}

ب) {ر، ص، ع}.

جـ) ∅.

د) {ل}.

(4) بين أيا من العبارات متساوية وأيا منها متكافئة:

أ) $\{1 ، 2 ، 3\}$

ب) $\{2\}$

جـ) حروف كلمة قلب.

د) { س : س عدد أولي أقل من 10}

هـ) $\{2 ، 3 ، 5 ، 7\}$

و) { س : س $\in$ ط ، محصورة بين 1 ، 3 }

ز) { س : س حروف كلمة لبق }

ع) { س : س $\in$ ط ، 1 $\leq$ س $\leq$ 3 }

(5) إذا كانت أ = $\{1 ، 2 ، 3 ، 4\}$ ، ب = $\{3 ، 4 ، 5 ، 6\}$

ش = { س : س $\in$ ط ، 1 $\leq$ س $\leq$ 10 } أوجد الآتي:

أ) أ $\cap$ ب ، أ $\cup$ ب ، أ − ب ،

ب) ش − (أ $\cup$ ب).

جـ) ش − (أ $\cap$ ب).

د) (أ $\cap$ ب) $\cup$ (أ $\cap$ ب).

(6) بين الصح والخطأ مع ذكر السبب.

إذا كانت المجموعة أ = {{ب ، جـ} ، 1 ، 2 } فإن:

أ) { ب ، جـ } $\in$ أ

ب) { ب ، جـ } $\subseteq$ أ

جـ) $\emptyset \in$ أ.

د) {{ب ، جـ}} $\subseteq$ أ

هـ) { 2 } $\subseteq$ أ

و) 1 $\in$ أ

(7) لتكن ن (أ) ترمز لعدد العناصر في المجموعة أ فمثلا إذا كانت:

ب = { أ ، ب } ، فإن ن (ب) = 2

(i) أعط مثالا فيه ن (أ $\cup$ ب) = ن (أ) + ن (ب)

(ii) متى تكون ن (أ $\cup$ ب) = ن (أ) + ن (ب)

(8) هل من الصحيح أن لكل ثلاث مجموعات أ ، ب ، جـ يكون :

(أ $\cap$ ب) $\cup$ جـ = أ $\cap$ (ب $\cup$ جـ)

3-1 إثبات قوانين العمليات على المجموعات :

سندرس في هذا البند إثبات بعض القوانين على المجموعات،باستخدام جداول الانتماء وأشكال فن كتمهيد لاستخدامها في دراسة جبر المجموعات.

1-3-1 جدول الإنتماء:

تستعمل جداول الانتماء لإثبات قوانين أو علاقات في المجموعات، ويتكون جدول الإنتماء من أسطر يشتمل كل سطر على احتمالات الانتماء ويعتمد عدد الأسطر فى جدول الانتماء على عدد المجموعات المكونة للقانون أو العلاقة الرياضية، فمثلاً إذا كان القانون يحتوي على مجموعة واحدة يكون عدد الأسطر في الجدول $2^1 = 2$ أسطر، وإذا كان عدد المجموعات 2 يكون عدد الأسطر $2^2 = 4$ ، وإذا كان عدد المجموعات 3 يكون عدد الأسطر $3^2 = 8$ وهكذا، وباستعمال طريقة الشجرة السالفة الذكر وتعريفات العمليات على المجموعات لتحقيق صحة القانون من عدمه كما هو مبين.

2-3-1 قانون التبديل Commutative Law:

إذا كانت أ ، ب مجموعتين أثبت أن:

1- أ ∩ ب = ب ∩ أ 　　　 2- أ ∪ ب = ب ∪ أ

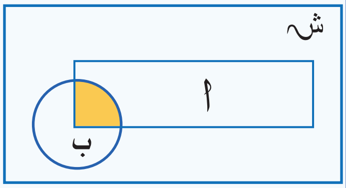
مثال 3: باستعمال جداول الانتماء أثبت أن : أ ∩ ب = ب ∩ أ

الحل: باستعمال جداول الانتماء (جدول 1) نجد أن القانون يتكون من مجموعتين أ ، ب وبذلك يتكون عدد الأسطر في جدول الانتماء $2^2 = 4$.

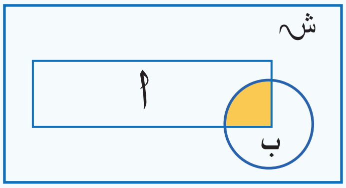
أ	ب	أ ∩ ب	ب ∩ أ
∈	∈	∈	∈
∈	∉	∉	∉
∉	∈	∉	∉
∉	∉	∉	∉

جدول 1 　 =

من الجدول (1) نلاحظ أن أ ∩ ب ، ب ∩ أ يحتويان على نفس رموز الإنتماء، حيث نلاحظ أن العنصر ينتمي إلى أ ∩ ب وينتمي إلى ب ∩ أ إذا كان العنصر أ ينتمي إلى ب أنظر السطر الأول، وعدا ذلك نجد أن العنصر لا ينتمي إلى أ ∩ ب ولا ينتمي إلى ب ∩ أ ، ويمكن استعمال أشكال فن من أن أ ∩ ب = ب ∩ أ.



أ ∩ ب



ب ∩ أ

من الشكل (1-6) نلاحظ أن المنطقة المظللة متساوية في الشكلين مما يؤكد: أ ∩ ب = ب ∩ أ وسوف نترك للطالب إثبات أن: أ ∪ ب = ب ∪ أ.

1-3-3 قانون التنسيق Associative Law :

إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث مجموعات أثبت أن:

أ ∩ (ب ∩ جـ) = (أ ∩ ب) ∩ جـ

مثال 4:

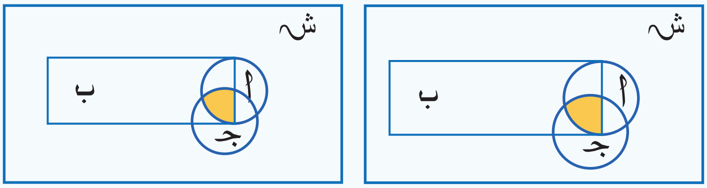
باستعمال جداول الانتماء أثبت أن : أ ∩ (ب ∩ جـ) = (أ ∩ ب) ∩ جـ

الحل: حيث أن القانون يحتوي على 3 مجموعات فإن عدد الأسطر في جدول الانتماء $2^3 = 8$. كما هو مبين في الجدول رقم 2.

أ	ب	جـ	أ ∩ ب	ب ∩ جـ	أ ∩ (ب ∩ جـ)	(أ ∩ ب) ∩ جـ
∈	∈	∈	∈	∈	∈	∈
∈	∈	∉	∈	∉	∉	∉
∈	∉	∈	∉	∉	∉	∉
∉	∈	∈	∉	∈	∉	∉
∉	∈	∉	∉	∉	∉	∉
∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉
∈	∉	∉	∉	∉	∉	∉
∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉

جدول (2)

من الجدول (2) نلاحظ أن أ ∩ (ب ∩ جـ) = (أ ∩ ب) ∩ جـ لأنهما يحتويان على رموز الانتماء عينها. ويمكن استخدام أشكال فن لإثبات قانون التنسيق كالآتي:



أ ∩ (ب ∩ جـ)   (أ ∩ ب) ∩ جـ

شكل 1-7

من الشكل 1-7 نلاحظ أن المنطقة المظللة متساوية في الشكلين مما يؤد أن أ ∩ (ب ∩ جـ) = (أ ∩ ب) ∩ جـ

1-3-4 قانون عدم النمو (الخمود) Idempotent Law:

إذا كانت أ مجموعة فإن أ ∪ أ = أ ، أ ∩ أ = أ حيث أن القانون يحتوي على مجموعة واحدة، سيكون هنا $2^1 = 2$ أسطر في جدول الانتماء.

أ	أ ∩ أ
∋	∋
∌	∌

أ	أ ∩ أ
∋	∋
∌	∌

من جدول (3) نجد أن: أ ∪ أ = أ ، أ ∩ أ = أ

1-3-5 قانون التحييد (قانون الوحدة) Identity Law:

إذا كانت أ مجموعة فإن أ ∪ ∅ = أ ، أ ∩ ش = أ

في الحالة الأولى ... حيث أن القانون يحتوي على مجموعة واحدة سيكون عدد الاحتمالات $2^1 = 2$ ويكون عدد الأسطر في جدول الإنتماء = 2 ، وباستخدام جدول الإنتماء (الجدول 4) نجد أن:

أ	∅	أ ∪ ∅
∋	∌	∋
∌	∌	∌

جدول -4-

من جدول 4 نلاحظ أن: أ = أ ∪ ∅ ، وسوف نترك للطالب إثبات الحالة الثانية أ ∩ ش = أ .

1-3-6 قانون الإحتواء Containment Law:

إذا كانت أ مجموعة فإن أ ∪ ش = أ ، أ ∩ ∅ = أ

حيث أن القانون يحتوي على مجموعة واحدة، سيكون عدد الاحتمالات $2^1 = 2$ ويكون عدد الأسطر في جدول الانتماء= 2، باستخدام جدول الانتماء (الجدول 5) نجد أن:

أ	∅	أ ∪ ∅
∋	∋	∋
∌	∋	∋

أ	∅	أ ∩ ∅
∋	∌	∌
∌	∌	∌

جدول -5-

7-3-1 قانون التوزيع Distributive Law :

إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث مجموعات أثبت أن:

أ ∩ (ب ∪ جـ) = (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ جـ)

أ ∪ (ب ∩ جـ) = (أ ∪ ب) ∩ (أ ∪ جـ)

مثال 5:

باستعمال جداول الانتماء أثبت أن : أ ∩ (ب ∪ جـ) = (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ جـ)

الحل:

∴ القانون يحتوي على ثلاث مجموعات ،

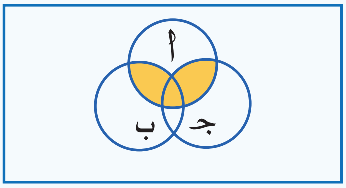
∴ عدد الاحتمالات $2^3 = 8$ ⇦ عدد الأسطر = 8 ،

أ	ب	جـ	ب ∩ جـ	أ ∩ ب	أ ∩ جـ	أ ∩ (ب ∪ جـ)	(أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ جـ)
∈	∈	∈	∈	∈	∈	∈	∈
∈	∈	∉	∈	∈	∉	∈	∈
∈	∉	∈	∈	∉	∈	∈	∈
∈	∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉
∉	∈	∈	∈	∉	∉	∉	∉
∉	∈	∉	∈	∉	∉	∉	∉
∉	∉	∈	∈	∉	∉	∉	∉
∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉

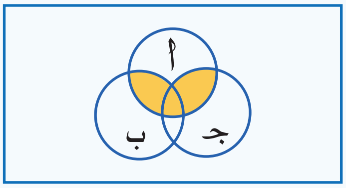
=

من الجدول(6) نلاحظ أن : أ ∩ (ب ∪ جـ) = (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ جـ)

لأنهما يحتويان على نفس رموز الإنتماء، وباستعمال أشكال فن يمكن توضيح صحة القانون كما في الشكل (8-1)



أ ∩ (ب ∪ جـ)



(أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ جـ)

شكل 1-8

1-3-8 قانون التكميل Complement Law:

إذا كانت أ مجموعة فإن: أ ∪ أ/ = ش ، أ ∩ أ/ = ∅

وباستخدام جدول الانتماء يمكن إثبات صحة قانون التكميل.

أ	أ/	أ ∪ أ/	ش
∋	∌	∋	∋
∌	∋	∋	∋

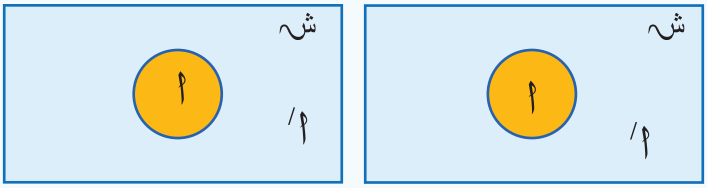
أ	∅	أ ∩ أ/	ش
∋	∌	∌	∌
∌	∋	∌	∌

=

جدول 7

من الجدول(7) نلاحظ أن : أ ∪ أ/ = ش ، أ ∩ أ/ = ∅

وباستعمال أشكال فن يمكن توضيح صحة القانون كما في الشكل (1-9).



أ ∪ أ/ = ش

أ ∩ أ/ = ∅

1-3-9 قانون دي مورجان De Morgan Law:

إذا كانت أ مجموعة فإن:

(أ ∩ ب)/ = (أ/ ∪ ب/)

(أ ∪ ب)/ = (أ/ ∩ ب/)

سنبرهن على صحة القانون في الصورة الأولى وسنترك برهنة الصورة الثانية للطالب كتمرين . باستخدام جدول الانتماء (جدول 8) نجد أن:

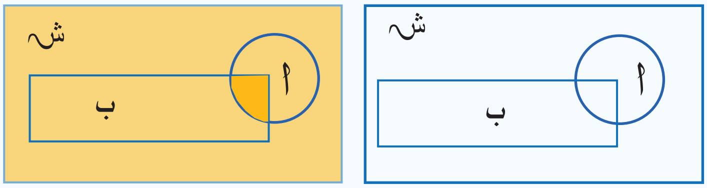
أ	ب	أ ∩ ب	(أ ∩ ب)/	أ/	ب/	أ/ ∩ ب/
∋	∋	∋	∌	∌	∌	∌
∋	∌	∌	∋	∌	∋	∋
∌	∋	∌	∋	∋	∌	∋
∌	∌	∌	∋	∋	∋	∋

=

جدول 8

من الجدول(8) نلاحظ أن : $(أ \cap ب)' = (أ' \cup ب')$ وباستخدام أشكال فن يمكن توضيح صحة القانون دي مورجان كما في الشكل (1-10).

شكل (1-10)



$(أ \cap ب)'$ $\qquad$ $أ' \cup ب'$

المنطقة المظللة في الشكل (1-10) تمثل $(أ \cap ب)'$ (6) وتمثل $أ' \cup ب'$
وبالتالي تكون $(أ \cap ب)' = (أ' \cup ب')$.

ملخص قوانين العمليات على المجموعات:

الرقم	القانون	اسم القانون
1	$أ \cap ب = ب \cap أ$ $أ \cup ب = ب \cup أ$	التبديل
2	$أ \cap (ب \cap جـ) = (أ \cap ب) \cap جـ$ $أ \cup (ب \cup جـ) = (أ \cup ب) \cup جـ$	التنسيق
3	$أ \cup أ = أ$ ، $أ \cap أ = أ$	عدم النمو
4	$أ \cup \varnothing = أ$ ، $أ \cap ش = أ$	التحييد
5	$أ \cup ش = ش$ ، $أ \cap \varnothing = \varnothing$	الإحتواء
6	$أ \cap (ب \cup جـ) = (أ \cap ب) \cup (أ \cap جـ)$ $أ \cup (ب \cap جـ) = (أ \cup ب) \cap (أ \cup جـ)$	التوزيع
7	$أ \cup \bar{أ} = ش$ ، $أ \cap \bar{أ} = \varnothing$	التكميل
8	$(أ \cap ب)' = (\bar{أ} \cup ب')$ $(أ \cup ب)' = (\bar{أ} \cap ب')$	دي مورجان

جدول (3)

تمارين: 1 – ب

أ. أثبت باستخدام الجدوال الانتماء وأشكال فن القوانين الأتية :

1. $\text{أ} \cup \text{ب} = \text{ب} \cup \text{أ}$
2. $\text{أ} \cup (\text{ب} \cap \text{جـ}) = (\text{أ} \cup \text{ب}) \cap (\text{أ} \cup \text{جـ})$
3. $\text{أ} \cap \text{أ} = \text{أ}$
4. $\text{أ} \cap \text{ش} = \text{أ}$
5. $\text{أ} \cap \text{أ}' = \varnothing$
6. $(\text{أ} \cup \text{ب})' = (\text{أ}' \cap \text{ب}')$

ب. أثبت صحة أو عدم صحة العلاقات الأتية مستخدما جدوال الانتماء وأشكال فن:

$(\text{أ}')' = \text{أ}$ (يعرف هذا القانون بنفي النفي)

$\text{أ} - \text{ب} = \text{أ} \cap \text{ب}'$

$(\text{أ} \cap \text{ب}) \cup (\text{أ} \cup \text{ب}') = \text{أ}$

$(\text{أ}' \cup \text{ب}') \cup (\text{أ}' \cup \text{ب}')' = \text{أ}$

$(\text{أ} \cup \text{ب}) - \text{جـ} = \text{أ} - \text{جـ}$

$\text{أ} - (\text{ب} - \text{جـ}) = (\text{أ} - \text{ب}) - \text{جـ}$

$\text{أ} - (\text{ب} \cup \text{جـ}) = (\text{أ} - \text{ب}) \cup (\text{أ} - \text{جـ})$

$\text{أ} \cup (\text{ب} \cap \text{ب}') = \text{أ}$

4-1 جبر المجموعات :

باستخدام قوانين العمليات

يستعمل جبر المجموعات لإثبات بعض العلاقات والقوانين الرياضية دون استخدام جدوال الانتماء أو أشكال فن، وسنستخدم قوانين العمليات على المجموعات لإثبات بعض العلاقات في هذا الأسلوب من البرهنة نبدأ بأحد طرفي العلاقة الرياضية ثم نُغيرها إلى صورة أخرى معتمدين في ذلك على أحد قوانين العمليات على المجموعات وهكذا نستمر في التغيير حتى نصل إلى الصورة المطلوبة أي الطرف الآخر من العلاقة أو القانون مع ذكر اسم القانون الذي اعتمدنا عليه في تغيير كل خطوة، كما هو مبين في الأمثلة الآتية:

مثال (6):

أثبت مستخدما جبر المجموعات أن:

$$(\text{أ} \cup \text{ب}) \cap \text{أ}' = \text{أ}' \cap \text{ب}$$

الحل:

$(\text{أ} \cup \text{ب}) \cap \text{أ}'$	معطاة
$\text{أ}' \cap (\text{أ} \cup \text{ب})$	تبديل
$(\text{أ}' \cap \text{أ}) \cup (\text{أ}' \cap \text{ب})$	توزيع
$\varnothing \cup (\text{أ}' \cap \text{ب})$	تكميل
$\text{أ}' \cap \text{ب}$	تحييد

$$\therefore\ (\text{أ} \cup \text{ب}) \cap \text{أ}' = \text{أ}' \cap \text{ب}$$

مثال (7):

أثبت مستخدما جبر المجموعات أن:

$$(\text{أ} \cup \text{ب})' \cup (\text{أ}' \cap \text{ب}) = \text{أ}'$$

الحل:

$(\text{أ} \cup \text{ب})' \cup (\text{أ}' \cap \text{ب})$	معطاة
$(\text{أ}' \cap \text{ب}') \cup (\text{أ}' \cap \text{ب})$	دي مورجان
$\text{أ}' \cap (\text{ب}' \cup \text{ب})$	توزيع
$\text{أ}' \cap \text{ش}$	تكميل
$\text{أ}'$	تحييد

$$\therefore\ (\text{أ} \cup \text{ب})' \cup (\text{أ}' \cap \text{ب}) = \text{أ}'$$

مثال (8):

أثبت مستخدما جبر المجموعات أن: $\text{أ} \cup (\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{أ}$

الحل:

$\text{أ} \cup (\text{أ} \cap \text{ب})$	معطاة
$(\text{أ} \cap \text{ش}) \cup (\text{أ} \cap \text{ب})$	تحييد
$\text{أ} \cap (\text{ش} \cup \text{ب})$	توزيع
$\text{أ} \cap (\text{ب} \cup \text{ش})$	تبديل
$\text{أ} \cap \text{ش}$	احتواء
أ	تحييد

$$\therefore\ \text{أ} \cup (\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{أ}$$

ب: استخدام الفرض:

مثال (9):

لأي مجموعتين أ ، ب أثبت صحة المتطابقة الأتية:

$(\text{أ} \cup \text{ب})' = \text{أ}' \cap \text{ب}'$

الحل:

بفرض: $\text{س} \in (\text{أ} \cup \text{ب})' \Leftarrow \text{س} \notin (\text{أ} \cup \text{ب})$

$\Leftarrow \text{س} \notin \text{أ}$ أو $\text{س} \notin \text{ب}$

$\Leftarrow \text{س} \in \text{أ}'$ و $\text{س} \in \text{ب}'$

$\Leftarrow \text{س} \in (\text{أ}' \cap \text{ب}')$

$\therefore (\text{أ} \cup \text{ب})' = \text{أ}' \cap \text{ب}' \longleftarrow (1)$

بفرض: $\text{س} \in \text{أ}' \cap \text{ب}' \Leftarrow \text{س} \in \text{أ}'$ و $\text{س} \in \text{ب}'$

$\Leftarrow \text{س} \notin \text{أ}$ أو $\text{س} \notin \text{ب}$

$\Leftarrow \text{س} \notin (\text{أ} \cup \text{ب})$

$\Leftarrow \text{س} \in (\text{أ} \cup \text{ب})'$

$\therefore \text{أ}' \cap \text{ب}' \subseteq (\text{أ} \cup \text{ب})' \longleftarrow (2)$

من (1) ، (2) نجد أن: $(\text{أ} \cup \text{ب})' = \text{أ}' \cap \text{ب}'$

مثال (10):

لأي مجموعتين أ ، ب أثبت صحة المتطابقة الأتية:

(i) $\text{أ} - \text{ب} = \text{أ} \cap \text{ب}'$ (ii) $\text{أ} - \text{ب} = \text{ب}' - \text{أ}'$

الحل:

(i) بفرض $\text{س} \in \text{أ} - \text{ب} \Leftarrow \text{س} \in \text{أ}$ و $\text{س} \notin \text{ب}$

$\Leftarrow \text{س} \in \text{أ}$ و $\text{س} \in \text{ب}'$

$\Leftarrow \text{س} \in \text{أ} \cap \text{ب}'$

$\therefore \text{أ} - \text{ب}' \subseteq \text{أ} \cap \text{ب}' \longleftarrow (1)$

(i) بفرض $\text{س} \in \text{أ} \cap \text{ب}' \Leftarrow \text{س} \in \text{أ}$ و $\text{س} \in \text{ب}'$

$\Leftarrow \text{س} \in \text{أ}$ و $\text{س} \notin \text{ب}$

$\Leftarrow \text{س} \in (\text{أ} - \text{ب})$

$\therefore \text{أ} \cap \text{ب}' \subseteq \text{أ} - \text{ب} \longleftarrow (2)$

من (1) ، (2) نجد أن: $\text{أ} - \text{ب} = \text{أ} \cap \text{ب}'$

(ii) بفرض س $\in$ ب$'$ − أ$'$ ⇐ س $\in$ ب$'$ و س $\notin$ أ$'$

⇐ س $\in$ ب$'$ و س $\in$ أ

⇐ س $\in$ أ و س $\in$ ب$'$

⇐ س $\in$ (أ − ب)

∴ ب$'$ − أ$'$ $\subseteq$ أ − ب ⟵ (3)

س $\in$ أ − ب ⇐ س $\in$ أ و س $\notin$ ب

⇐ س $\notin$ أ$'$ و س $\in$ ب$'$

⇐ س $\in$ ب$'$ − أ$'$

∴ أ − ب $\subseteq$ ب$'$ − أ$'$ ⟵ (4)

من (3)، (4) نجد أن: أ − ب = ب$'$ − أ$'$

مثال (11):

أثبت بطريقة الفرض أن: (أ$'$)$'$ = أ

الحل:

بفرض س $\in$ (أ$'$)$'$ ⇐ س $\notin$ أ$'$

⇐ س $\in$ أ

∴ (أ$'$)$'$ $\subseteq$ أ ⟵ (1)

س $\in$ أ ⇐ س $\notin$ أ$'$

⇐ س $\in$ (أ$'$)$'$

∴ أ $\subseteq$ (أ$'$)$'$ ⟵ (2)

من (1)، (2) نجد أن: (أ$'$)$'$ = أ

تمرين 1 - جـ

أثبت باستخدام جبر المجموعات أن:

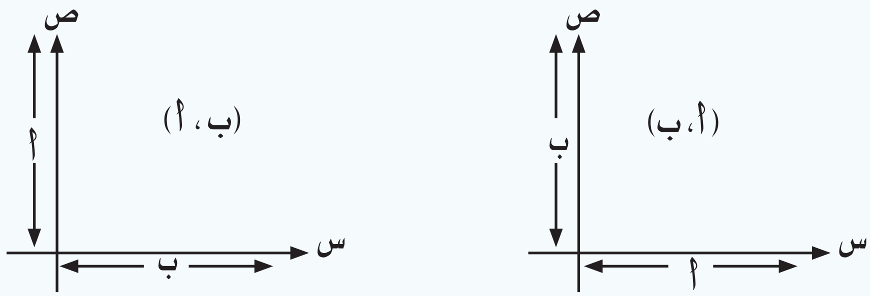
1. $($أ$^{/} \cap $ب$^{/})^{/} = ($أ $\cup$ ب$)$
2. $($أ $\cup$ ب$) = ($ب $\cup$ أ$)$
3. أ $\cap$ $($ب $\cup$ جـ$) = ($أ $\cap$ ب$) \cup ($أ $\cap$ جـ$)$
4. $($أ $\cup$ ب$)^{/} = $ أ$^{/} \cup $ ب$^{/}$
5. $($أ - ب$) \cap $ ب $= \varnothing$

أثبت مستخدم الفرض أن:

1. $($أ $\cup$ أ$) = $ أ
2. $($أ $\cap$ ب$) \cup $ أ$^{/} = $ أ$^{/} \cup $ ب
3. $($ب $\cap$ أ$) \cup ($ب $\cup$ أ$^{/}) = $ ب
4. أ $\cup$ $($ب $\cap$ جـ$) = ($أ $\cup$ ب$) \cap ($أ $\cup$ جـ$)$
5. أ $\subseteq$ ب ، ب $\subseteq$ جـ $\Leftarrow$ أ $\subseteq$ جـ

1-5 الضرب الكارتيزي :

فيما سبق درسنا الثنائيات المرتبة وعرفنا أن الثنائي المرتب (أ، ب)، يعني نقطة في المستوى تبعد قيمة أ على المحور السيني من نقطة الأصل، وقيمة ب على المحور الصادي من نقطة الأصل. وتجدر الإشارة إلى هناك اختلافا بين المجموعة {ب، أ} وبين الثنائي المرتب (أ، ب) فالمجموعة {ب، أ} تساوي المجموعة {أ، ب} ولكن (أ، ب) $\neq$ (ب، أ)، لأن النقطة التي تمثلها (أ، ب) لا تنطبق على النقطة التي تمثلها (ب، أ).



تعريف:

حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعتين أ، ب عبارة عن مجموعة جميع الثنائيات المرتبة، أي أن:

أ × ب = {(س : ص)، س $\in$ أ، ص $\in$ ب}

مثال (12):

إذا كان أ = {1، 2، 3}، ب = {-2، -1}، أوجد: (أ × ب)، (ب × أ)

أ × ب = {(1، -2)، (1، -1)، (2، -2)، (2، -1)، (3، -2)، (3، -1)}

ب × أ = {(-2، 1)، (-2، 2)، (-2، 3)، (-1، 1)، (-1، 2)، (-1، 3)}

لاحظ أن: (أ × ب) $\neq$ (ب × أ)

مثال (13): إذا كان أ = {$\sqrt{2}$، 1، 3} فأوجد أ^2؟

الحل:

أ × أ = أ^2 = {(س : ص)، س $\in$ أ، ص $\in$ أ}

أ^2 = {($\sqrt{2}$، $\sqrt{2}$)، ($\sqrt{2}$، 1)، ($\sqrt{2}$، 3)، (1، $\sqrt{2}$)، (1، 1)، (1، 3)، (3، $\sqrt{2}$)، (3، 1)، (3، 3)}

وأيضا نلاحظ من دراستنا السابقة أنه إذا كان عدد عناصر المجموعة أ هو ن وعدد عناصر المجموعة ب هو م فإن عدد عناصر أ × ب هو ن م:

فمن المثال (12) نجد ان:

عدد عناصر المجموعة أ هو: ن = 3 وعدد عناصر المجموعة ب هو م = 2

كذلك عدد عناصر المجموعة أ × ب = 6

أي أن عدد عناصر المجموعة أ × ب = ن × م = 3 × 2 = 6

ومن المثال (2) نجد ان عدد عناصر أ^2 هو 3×3 =9

مثال (14):

أوجد ط × ك حيث:

ط = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، ... }

ك = { 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، ... }

الحل:

ط × ك = { (1 ، 0) ، (1 ، 1) ، (1 ، 2) ، (1 ، 3) ... (2 ، 0) ، (2 ، 1) ، (2 ، 2) ، (2 ، 3) ، ... }

وبذلك نلاحظ أن عدد عناصر المجموعة ط × ك غير منته.

مثال (15):

أوجد حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعتين:

أ = { 1 ، 2 } ، ب = ∅

الحل:

حيث أن: أ × ب = { (س ، ص): س ∈ أ ، ص ∈ ب }

حيث أن المجموعة ب خالية، في هذه الحالة يكون : أ × ب = ∅

مثال (16):

إذا كانت أ = { 1 ، 2 ، 3 } ، ب = { 1 ، 5 } ، فأوجد:

(أ × ب) ∩ (ب × ب)

(أ × أ) ∪ (ب × ب)

(أ × ب) ∪ (ب × ب)

الحل:

أ × ب = { (1 ، 1) ، (1 ، 5) ، (2 ، 1) ، (3 ، 1) ، (3 ، 5) }

ب × ب = { (1 ، 1) ، (1 ، 5) ، (5 ، 1) ، (5 ، 5) }

(أ × ب) ∩ (ب × ب) = { (1 ، 1) ، (1 ، 5) }

أ × أ = { (1 ، 1) ، (1 ، 2) ، (1 ، 3)، (1 ، 2)، (2 ، 2)، (2 ، 3) ، (3 ، 1) ، (3 ، 2)، (3 ، 3)}

(أ × ب) ∩ (ب × ب) = { (1 ، 1)، (1 ، 2)، (1 ، 3)، (2 ، 1)، (2 ، 2)، (2 ، 3)، (3 ، 1) ، (3 ، 2)، (3 ، 3)،

(1 ، 5)، (5 ، 1)، (5 ، 5)}

مما سبق نلاحظ الآتي:

1. لأي مجموعتين أ × ب يكون أ × ب ≠ ب × أ .
2. في حالة أ ، ب منتهيان فإن المجموعة أ × ب منتهية .
3. في حالة أ ، ب مجموعتان غير منتهتين فإن المجموعة أ × ب غير منتهية .
4. إذا كانت المجموعة أ أو المجموعة ب خالية فإن أ × ب = $\emptyset$.
5. إذا كانت أ = ب فإن فإن أ × ب تكتب أ^2 ، ب^2.
6. حيث أن حاصل الضرب الكارتيزي لمجموعتين أ ، ب عبارة عن مجموعة فإن جميع العمليات السابقة والتي سبق دراستها على المجموعات يمكن تطبيقها على الضرب الكارتيزي.

تمرين 1 -د

(أ) إذا كانت أ = { 5 ، 6 ، 7 } ، ب = { 1 ، $\sqrt{3}$ } ، فأوجد: أ × ب ، ب × أ

(ب) إذا كانت أ = { 1 ، 2 ، 3 } ، ب = { 2 ، 3 ، 4 } ، فأوجد:

(1) أ^2 ، ب^2 ، أ × ب ، ب × أ

(2) أ^2 $\cap$ ب^2

(3) أ^2 $\cup$ ب^2

(4) (أ × ب) $\cap$ (ب × أ)

(جـ) إذا كانت أ = { 3 ، 4 ، 5 } ، ب = { 2 ، 3 } جـ = { 3 ، 7 } ، حقق صحة أو عدم صحة الآتي:

(1) أ × (ب $\cap$ جـ) = (أ × ب) $\cap$ (أ × جـ)

(2) (أ $\cup$ ب) × جـ = (أ × جـ) $\cup$ (ب × جـ)

(3) ب × (أ $\cup$ جـ) = (ب × أ) $\cup$ (ب × جـ)

(4) (أ × ب) - (أ × جـ) = [(أ - جـ) × ب] $\cup$ [أ × (ب - جـ)]

6-1 العلاقات الثنائية Binary Relations:

تعرف العلاقات الثنائية من المجموعات أ إلي المجموعة ب بأنها مجموعة جزئية من أ × ب ونرمز لها بالرمز ع : أ ← ب وبذلك يمكن التعبير عن العلاقات كما ذكرنا في المجموعات بطريقتين هما:

(أ) طريقة القائمة وتشمل على كل أو بعض الثنائيات المرتبة المكونة للعلاقة.

(ب) طريقة الوصف وتشمل علي صيغة أو قاعدة تحدد الثنائيات المرتبة التي تنتمي للعلاقة.

مثال(17):

إذا كانت أ = { 1 ، 2 ، 3 } ، ب = { 5 ، 6 } ، فأوجد:

فأوجد بطريقة القائمة العلاقات الثنائية الأتية:

ع$_1$ = { (س ، ص) : ص = س + 3 }

ع$_2$ = { (س ، ص) : س ⩽ ص }

ع$_3$ = { (س ، ص) : س > ص }

الحل:

أ × ب = { (1 ، 5) ، (1 ، 6) ، (2 ، 5) ، (2 ، 6) ، (3 ، 5)، (3 ، 6) }

∴ ع$_1$ = { (2 ، 5) ، (3 ، 6) }

ع$_2$ = { (1 ، 5) ، (1 ، 6) ، (2 ، 5) ، (2 ، 6) ، (3 ، 5)، (3 ، 6) }

ع$_3$ = ∅

مثال (18):

إذا كانت العلاقة الثنائية ع = { (1 ، 1) ، (2 ، 2) ، (3 ، 3) ، (4 ، 4) } أكتب العلاقة بطريقة الوصف ؟

الحل:

حيث أن س = ص لجميع عناصر (س ، ص) ∈ ع

فإن ع = { (س ، ص) : س = ص }

ملاحظة:

إذا كانت المجموعة أ = المجموعة ب، في هذه الحالة نقول إن ع علاقة من أ إلي أ أي ع: أ ← ب

1-6-1 تساوي علاقتين Equal of two Relations:

بما أن العلاقة الثنائية عبارة عن مجموعة، إذن ينطبق على تساوي العلاقتين تعريف تساوي مجموعتين ، وبالتالي يمكن القول بأن $ع_1$ ، $ع_2$ تحتويان على الثنائيات المرتبة عينها .

مثال(19):

إذا كانت أ = { 6 ، 7 ، 8 } بين ما إذا كانت العلاقة الاتية والتي معرفة على أ متساوية أم لا:

$ع_1$ = { (س ، ص) : س = ص }

$ع_2$ = { (س ، ص) : س < ص }

$ع_3$ = { (س ، ص) : س $\leqslant$ ص - 1 }

الحل:

أ × ب = { (6 ، 6) ، (6 ، 7) ، (6 ، 8) ، (7 ، 6) ، (7 ، 7)، (7 ، 8)، (8 ، 6) ، (8 ، 7)، (8 ، 8) }

$\therefore$ $ع_1$ = { (6 ، 6) ، (7 ، 7)، (8 ، 8) }

$ع_2$ = { (6 ، 7) ، (6 ، 8) ، (7 ، 8) }

$ع_3$ = { (6 ، 7) ، (6 ، 8) ، (7 ، 8) }

نلاحظ أن $ع_1 \neq ع_2$ ولكن $ع_2 = ع_3$

2-6-1 نطاق ومدى العلاقة Domain and Range of Relation:

عند تعريف العلاقة الثنائية ع وجدنا أن العلاقة الثنائية عبارة مجموعة من الثنائيات المرتبة، ومن ثم يمكن تحديد المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر التي تظهر كمركبة أولى من الثنائيات المرتبة التى تنتمي للعلاقة: ع: أ $\leftarrow$ ب تسمى هذه المجموعة بنطاق العلاقة ع .

أي أن نطاق ع = {س $\in$ أ : يوجد ص $\in$ ب ، حيث (س ، ص) $\in$ ع }

ويمكن تعريف مدى العلاقة على أنه المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر التي تظهر كمركبة ثانية من الثنائيات المرتبة التى تنتمي للعلاقة ع: أ $\leftarrow$ ب.

ويستعمل الترميز (نط ع) لتدل نطاق العلاقة ويستعمل الترميز (مد ع) ليدل على مدى العلاقة ع ، فمن البديهي أن يكون نط ع $\subseteq$ أ، مدع $\subseteq$ أ.

حيث المجموعة ب تسمى بالنطاق المصاحب للعلاقة.

مثال(20) :

إذا كانت العلاقة:

ع = { (1 ، 1) ، (2 ، 2) ، (2 ، 4) ، (3 ، 5)، (4 ، 8) }   أوجد نطاق ومدي العلاقة ع.

الحل:

نطاق ع = {س ∈ أ ، يوجد ص ∈ ب حيث (س ، ص) ∈ ع}

مدى ع = {ص ∈ ب ، يوجد س ∈ أ حيث (س ، ص) ∈ ع}

نط ع = { 1 ، 2 ، 3 ، 4}

مد ع = { 1 ، 2 ، 4، 5 ، 8}

مثال (21):

إذا كانت أ = { 1 ، 2 ، 3 } ، ب = { 1 ، 2 ، 6 }

والعلاقة ع= {(س ، ص) : س +ص = 3}

معرفة من أ إلى ب ، أكتب عناصر العلاقة ع ثم أوجد نطاقها ومداها.

الحل:

باعتبار أن:

أ × ب = { (1 ، 1) ، (1 ، 2) ، (1 ، 6) ، (2 ، 1)، (2 ، 2)، (2 ، 6) ، (3- ، 1) ، (3- ، 2)، (3- ، 6)}

لذلك فإن:

ع = { (1 ، 2) ، (2 ، 1)، (3- ، 6)}

نط ع = { 1 ، 2 ، 3- }

مد ع = { 1 ، 2 ، 6 }

مثال (22):

إذا كانت ع = {(س ، ص) : س^2 + ص^2 = 25} ، المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية ح أي:

ع : ح ← ح أوجد نطاق ومدى ع .

الحل:

نط ع = [-5 ، 5]

مد ع = [-5 ، 5]

تمارين 1 – هـ

(أ) إذا كانت أ = { 3 ، 4 ، 5 } ، ب = { 7 ، 8 }

اكتب العلاقات الآتية بطريقة القائمة:

$ع_1$ = { (س ، ص) : ص = 5 – س }

$ع_2$ = { (س ، ص) : س ⩾ ص – 1 }

$ع_3$ = { (س ، ص) : س > ص }

$ع_4$ = { (س ، ص) : س < ص }

ب) في (أ) أوجد نطاق ومدى كل علاقة؟

ملخص :

1. المجموعة: هي أن تجمع من الاشياء المتميزه والمعرفة تعريفا جيداً.
2. أنواع المجموعات:
   i. منتهية: (محدودة): يمكن حصر (عدّ) عناصرها.
   ii. غير منتهية: (غير محدودة): لا يمكن حصر (عدّ) عناصرها.
   iii. خالية: لا تحتوي علي العناصر ويرمز لها بالرمز ∅ أو { } .
3. العمليات على المجموعات :–
   i. التقاطع (أ ∩ ب) = { س : س ∈ أ و س ∈ ب }.
   ii. الاتحاد (أ ∪ ب) = { س : س ∈ أ أو س ∈ ب }.
   iii. الاتحاد (أ – ب) = { س : س ∈ أ ، س ∉ ب }.
   iv. التكميل (أ/) = { س : س ∈ ش ، س ∉ أ }.
4. عدد المجموعات الجزئية لأي مجموعة عدد عناصرها (ن) تساوي $2^{ن}$.
5. الضرب الكارتيزي أ×ب = { (س:ص) : س ∈ أ ، ص ∈ ب }.

1-6-3 العلاقة العكسية Inverse Relation:

إذا كانت ع علاقة من المجموعة أ إلى المجموعة ب ، فإن العلاقة العكسية $ع^{-1}$ تكون علاقة من المجموعة ب إلى المجموعة أ . بحيث يكون لكل س ∈ أ ، ص ∈ ب، إذا كان (ص:س) ∈ $ع^{-1}$ إذا وفقط إذا كان (س:ص) ∈ ع وهذا يعني أنه عند الحصول علي $ع^{-1}$ من ع تبادل وضع المركبة الأولي مع المركبة الثانية لكل ثنائي مرتب في ع وبذلك ينتج أن :

نطاق $ع^{-1}$ = مدى ع ومدى $ع^{-1}$ = نطاق ع.

مثال(23) :

إذا كانت ع = { (1 ، 0) ، (2 ، 5) ، (2 ، 3) ، (2 ، 4) } فأوجد $ع^{-1}$ وكذلك نطاقها ومداها.

الحل:

$ع^{-1}$ = { (0 ، 1) ، (5 ، 2) ، (3 ، 2) ، (4 ، 2) }

نطاق $ع^{-1}$ = { 0 ، 3 ، 4 ، 5 }

مدى $ع^{-1}$ = { 1 ، 2 }

مثال (24):

إذا كانت أ = { 1 ، 2 ، 4 } و كانت ، ع = {(س ، ص) : س < ص } ، أوجد $ع^{-1}$

الحل:

باعتبار أن:

$أ^2$ = { (1 ، 1) ، (1 ، 2) ، (1 ، 4) ، (2 ، 1) ، (2 ، 2) ، (2 ، 4) ، (4، 1) ، (4 ، 2) ، (4 ، 4) }

∵ س < ص

ع = { (2 ، 1) ، (4 ، 1) ، (4 ، 2) }

$ع^{-1}$ = { (1 ، 2) ، (1 ، 4) ، (2 ، 4) }

1-7 الدالة Funcation:

لقد لاحظنا عند تعريف العلاقة عدم وجود أية قيود على عناصر العلاقة من أي مجموعة س إلى مجموعة ص سوى أنها مجموعة جزئية من س × ص .

تعريف:

إذا كانت س ، ص مجموعتين غير خاليتين، د علاقة من س إلى ص أي:

د = {(س ، ص) : (س ، ص) ∈ س × ص }

فيقال عن د أنها من س إلى ص إذا حققت الشرطين الأتيين:

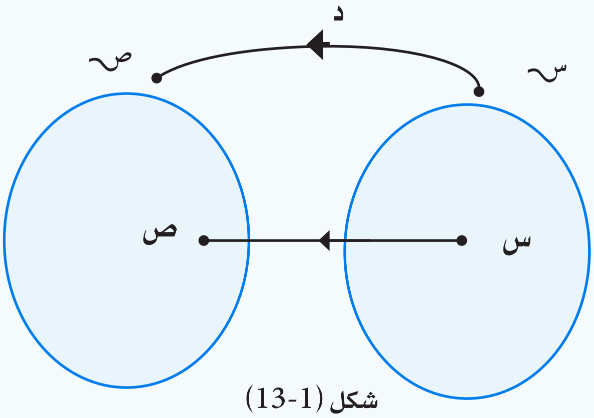
لأي س ∈ س يوجد ص ∈ ص بحيث (س ، ص) ∈ د ، نطاق د= س بمعنى أن تدخل كل عنصر من عناصر س كعنصر أول في أحد الأزواج المرتبة التي تحدد العلاقة.

لا يجب أن يناظر أي عنصر من عناصر س إلا عنصرا واحدا فقط من عناصر ص .

ونعبر عن هذا المعنى بالرمز ص= (س) أي أن:

(س ، ص) ∈ د ⟺ ص= د (س)

د: س ← ص ، (س ، ص) ∈ د ، ص= د (س) فيقال عن العنصر ص أنه صورة للعنصر س بالنسبة للدالة د .



شكل (1-13)

ملحوظة:
يجدر بنا أن نُميز بين الدالة د و العنصر د (س) فالدالة د هي مجموعة الأزواج المرتبة، اما المناظر د(س) فهو العنصر الوحيد كعنصر ثنائي .

مثال(25) :

باعتبار المجموعتين س = { س ، ع } ، ص = { ص ، م ، ن } والعلاقات $د_1$ ، $د_2$ ، $د_3$ ، $د_4$ ، من س إلى ص حيث:

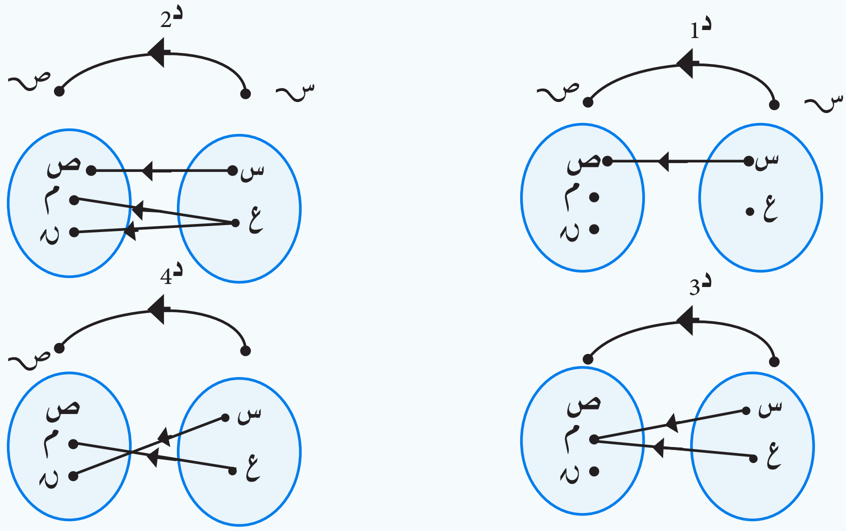
$د_1$ = { (س ، ص) }

$د_2$ = { (س ، ص)، (ع ، م)، (ع ، ن)}

$د_3$ = { (س ، م)، (ع ، م) }

$د_4$ = { (س ، ن)، (ع ، ص) }

والتي يمكن تمثيلها بالاسهم كما بالشكل (1-12)



شكل (1-12)

ملحوظة:
لأي دالة د: س ← ص وحدانية الصورة ص لأي عنصر س في س .

ونلاحظ أن:

$د_1$ ليست دالة لإخلالها بالشرط الأول (1) في تعريف الدالة.

$د_2$ ليست دالة لإخلالها بالشرط الثاني (2) في تعريف الدالة.

$د_3$ دالة ، $د_4$ دالة ، (لتحقُق شروط الدالة).

مثال(26) :

إذا كانت د = {(س ، ص) : ص = 2س^2} ، فأوجد:

د(0) ، د(1) ، د(-2)

الحل:

تتحدد الدالة بالمعادلة ص = 2س^2 أي د (س) = 2س^2

د (0) = 2 $(0)^2$ = 0

د (1) = 2 $(1)^2$ = 2

د (-2) = 2 $(-2)^2$ = 8

8-1 بيان الدالة Graph of Funcation:

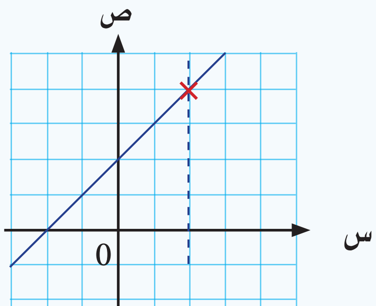
إن أي علاقة د كما نعلم هي العلاقة د: س ← ص .تحقق الشرطين:

1 - نطاق د بأكمله = س .

2 - (أ ، ب$_1$) ∈ د$_1$ ، (أ ، ب$_2$) ∈ د$_2$ ⇐ ب$_1$ = ب$_2$. أي أن الدالة هي حالة خاصة من العلاقة وبالنظر إلى الأشكال (1 ، 2 ، 3، 4) يلاحظ أن مستقيما موازيا للمحور ص ولتكن معادلته س = أ ، أ ∈ نط ع قد يقطع بيان العلاقة ع في نقطة واحدة أوأكثر.

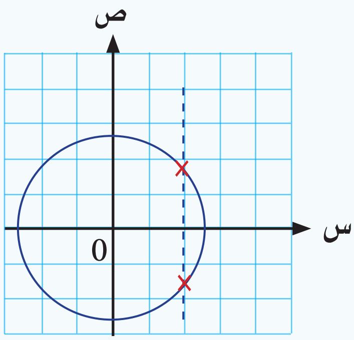
وعندما تكون العلاقة ع دالة فإن الشرط الأول للدالة يلغي احتمال وجود أكثر من نقطة يقطع فيها المستقيم المذكور بيان هذه العلاقة كما هو الحال في الشكلين (1) ، (3) بينما في الشكلين (2) ، (4) المستقيم يقطع بيان العلاقة في النقطتين.

شكل 1

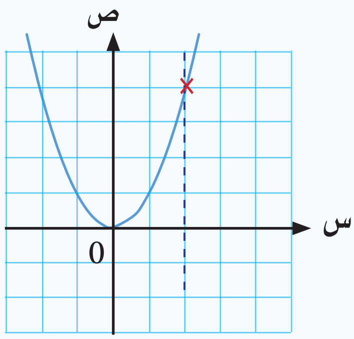


شكل 2-1

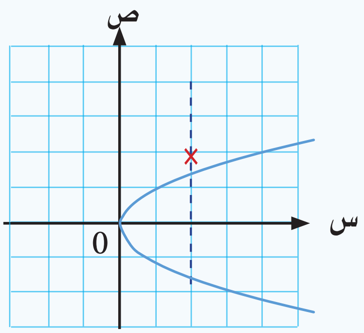
شكل 2



شكل 3



شكل 4



1-8-1 تساوي دالتين Equal of two Funcation:

إن أي دالة كما سبق عرفنا هي مجموعة مكونة من ثنائيات مرتبة وعند ذكر تساوي دالتين فإننا نعني ضمنيا تساوي مجموعتين مكونتين من ثنائيات مرتبة، بمعنى أى مجموعتين تحتويان على الثنائيات المرتبة نفسها .

> **ملحوظة:**
> الرمز ∀ يعني لكل.

إذا كانت د$_1$ ، د$_2$ هما الدالتان:

د$_1$: ص = د$_1$ (س) : س ∈ نط د$_1$.

د$_2$: ص = د$_2$ (س) : س ∈ نط د$_2$.

فإن : د$_1$ = د$_2$ ⟺ نط د$_1$ = نط د = ف.

د$_1$ (س) = د$_2$ (س) ∀س ∈ ف

مثال(27) :

ناقش تساوي الأزواج المرتبة للدوال التالية:

(أ) د$_1$ = { (1 ، 2) ، (2- ، 3) ، (5 ، 6) ، (7 ، 11) }

د$_2$ = { (1 ، 2) ، (2- ، 3) ، (5 ، 6) ، (7 ، $11\frac{1}{2}$) }

(ب) د$_1$ = {(س ، ص) : ص = $\frac{1}{\text{س}+1}$ ، س ∈ [(5- ، 1-) ∪ (1- ، 5)] }

د$_2$ = { (س ، ص) : ص = $\frac{\text{س}+6}{\text{س}^2+7\text{س}+6}$ ، س ∈ [5- ، 5] − {1-} }

الحل:

(أ) ∵ نط د$_1$ = { 1 ، 2- ، 5 ، 7 } ، نط د$_2$ = { 1 ، 2- ، 5 ، 7 }

∴ نط د$_1$ = نط د$_2$

ولكن مد د$_1$ = { 2 ، 3 ، 6 ، 11 } ، مد د$_2$ = { 2 ، 3 ، 6 ، $11\frac{1}{2}$ }

∴ مد د$_1$ ≠ مد د$_2$

وعليه د$_1$ ≠ د$_2$

(ب) نط د$_1$ = نط د$_2$ = [(5- ، 1-) ∪ (1- ، 5)] = ف

د$_2$ (س) = $\frac{\text{س}+6}{(\text{س}+6)(\text{س}+1)}$ = $\frac{1}{\text{س}+1}$ ، س ≠ 6-.

د$_1$ (س) = د$_2$ (س) = $\frac{1}{(\text{س}+1)}$ ، ∀س ∈ ف.

∴ د$_1$ = د$_2$

مثال(28) :

بين ما إذا كانت الدالتان الأتيتين متساويتين أم لا ؟

$د_1(س) = \sqrt{س^2}$ $\qquad$ $د_2(س) = س$

الحل:

$د_2(س) = |س|$ ، $س \in (-\infty ، \infty)$.

∴ نط $د_1$ = ح

نط $د_2$ = س (خطية) = $(-\infty ، \infty)$.

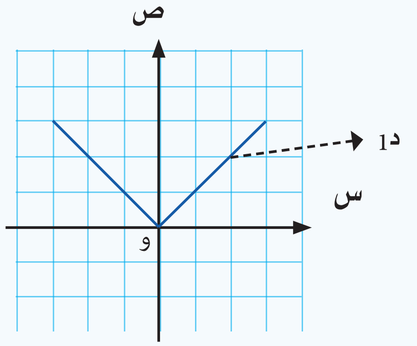
∴ نط $د_1$ = نط $د_2$ = ف.

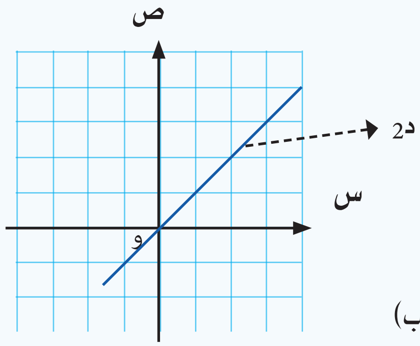
ولكن نجد أن: $د_1(-1) \neq د_2(-1)$

مد $د_1 = [0 ، \infty)$ ، مد $د_2$ = ح

مد $د_1 \neq$ مد $د_2$

∴ $د_1 \neq د_2$ (بسبب اختلاف المدى عند النطاق المصاحب)





مثال(29) :

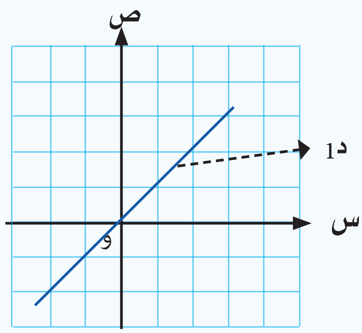
بين ما إذا كانت الدالتين الأتيتين متساويتين أم لا ؟

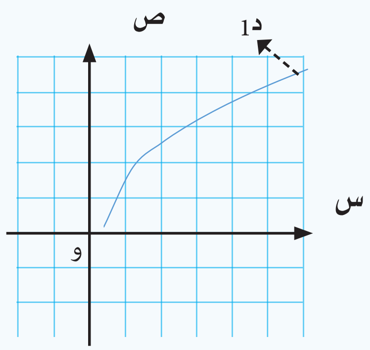
$د_1(س) = \sqrt{س}$ $\qquad$ $د_2(س) = س$

الحل:

نط $د_1 = [0 ، \infty)$ ، نط $د_2 = (-\infty ، \infty)$.

أي ليس لهما النطاق ذاته.



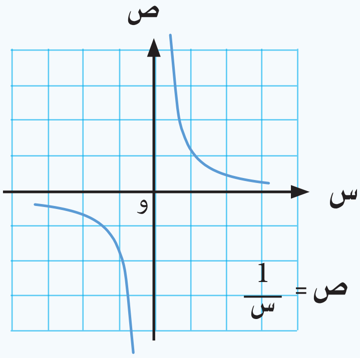


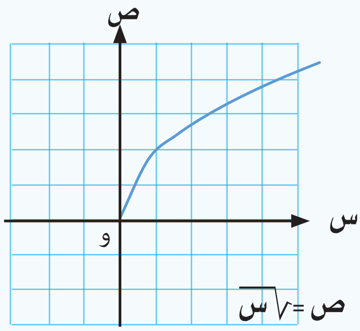
وبيان الدالتين يؤكد عدم تساويهما بسبب اختلاف النطاق وكذلك المدى.

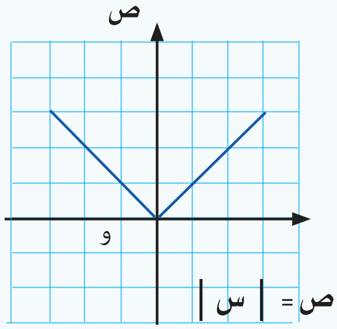
مد $د_1 = [0 ، \infty)$ ، مد $د_2$ = ح

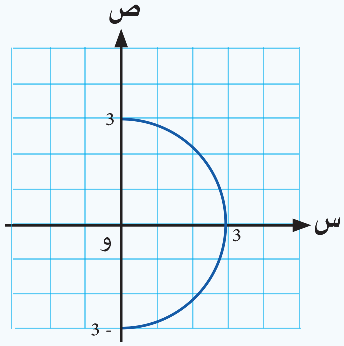
تمرين 1 - و:

(1) ميز بين الأشكال (i) ، (ii) ، (iii) ، (iv) من حيث أنها بيانات لدوال أم لا ؟









$س^2 + ص^2 = 9$ ، $س \in [0،3]$

(2) بين أيا من أزواج الدوال التالية تكون متساوية

(أ) $د_1(س) = 3 - س$ ، $د_2(س) = س - 3$ ، $س \geqslant 3$

(ب) $د_1(س) = \sqrt{س^2}$ ، $د_2(س) = |س|$.

(جـ) $د_1(س) = 3$ ، $د_2(س) = \frac{س^3}{س}$

(د) $د_1(س) = \frac{س^3 + 1}{س^3 + 1}$ ، $د_2(س) = 1$

(3) بين ما إذا كانت الدالتان $د_1(س) = \sqrt{س^2 + 1} - 1$ ، $د_2(س) = \frac{س^2}{\sqrt{س^2 + 1} - 1}$

متساويتان وإذا لم تكونا كذلك فاذكر السبب.

ورقة المراجعة -1

(1) باعتبار أن المجموعة الشاملة هي: { س : س ∈ ط ، 1 ≤ س ≤ 10 } .

س = { 2 ، 4 ، 6 }　　ص = { 1 ، 2 ، 3 ، 5 ، 8 }

ع = { 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 }　　م = { 2 ، 4 ، 6 ، 8 }

(2) أوجد كلًا مما يأتي:

i. س′ ، ص′ ، ع′ ، م′.

ii. س ∪ ص ، س ∪ ع ، س ∪ م ، ص ∪ م.

iii. س ∩ ص ، س ∩ ع ، س ∩ م ، ص ∩ م.

iv. س − ص ، س − ع ، ص − ع.

v. ص ∩ ع′ ، س′ ∩ ص ، ع′ ∩ م′ ، ع′ ∪ م′

vi. (س ∪ ص) ∪ ع ، س ∪ (ع ∪ م).

vii. (س ∩ ص) ∪ ع ، س ∩ (ع ∩ م).

(2) إذا كانت ك = مجموعة الأعداد الكلية هي المجموعة الشاملة وكانت:

س = { أ : 0 < أ < 9 } ، ص = { أ : 9 > أ > 16 }.

أوجد:

أ- س ∪ ص.

ب- س ∩ ص.

جـ- س − ص.

د- ص − س.

هـ- س − ص′.

و- ص′ − س.

(3) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة

ش = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 } بحيث تحقق الشروط الآتية:

(i) أ ∩ ب = { 2 ، 4 }　(ii) أ ∩ ب = { 2 ، 3 }

(iii) أ ∪ ب = { 2 ، 3 ، 4 }　(vi) أ ∪ ب = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 }

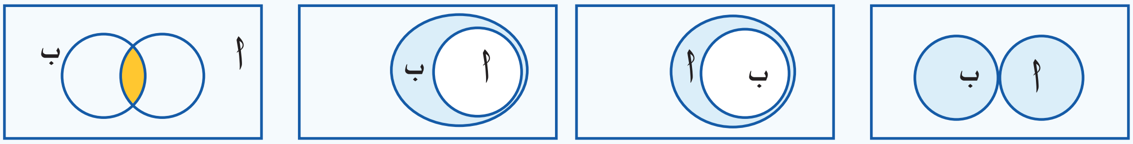
عين المجموعات أ ، ب ، جـ ، ثم أوجد:

أ ∩ ب ∩ جـ ، أ′ ∪ ب′ ، (أ ∩ ب)′ ، أ ∪ ب ∪ جـ ، أ′ ∩ ب′ ، (أ ∪ ب)′

(4) إذا كانت أ = { 1 ، 3 ، 4 ، 5 ، 8 ، 9 } ، ب = { 3 ، 5 ، 8 } جـ = { 1 ، 2 ، 4 ، 9 } ، عبر عن الآتي

وذلك باستخدام أشكال فن : أ ∪ ب ، ب ∪ جـ ، ب ∩ جـ

(5) ذا كانت أ ، ب مجموعتين مختلفتين ممثلتين بأشكال فن الآتية:



أي من الأشكال السابقة تمثل: $\text{أ} \cup \text{ب} = \text{أ}$ ، $\text{أ} \cup \text{ب} = \text{ب}$ ، $\text{أ} \cap \text{ب} = \emptyset$

(6) إذا كانت س مجموعة بها 9 عناصر أي أن $\text{ن}(\text{س}) = 9$ ، ص مجموعة بها 5 عناصر أي أن : $\text{ن}(\text{ص}) = 5$ ، فما هو أكبر عدد وما أصغر عدد لعناصر كل من:
$\text{س} \cap \text{ص}$ ، $\text{س} \cup \text{ص}$.

(7) حقق ما يأتي باستخدام أشكال فن :

$(\text{أ} \cap \text{ب})' = \text{أ}' \cup \text{ب}'$

$(\text{أ} \cup \text{ب})' = \text{أ}' \cap \text{ب}'$

(8) عبر بأشكال فن عن :

$(\text{س} \cup \text{ص}) \cup \text{ع}$ ،

$(\text{س} \cap \text{ص}) \cup \text{ع}$ ،

$\text{س} \cap (\text{ص} \cup \text{ع})$

(9) عين نطاق ومدى كل الدوال الأتية:

(أ) $\text{ص} = \sqrt{\text{س} - 5}$ (ب) $\text{ص} = \sqrt{-\text{س}}$

(جـ) $\text{ص} = -\sqrt{-\text{س}}$ (د) $\text{ص} = \dfrac{1}{\text{س}(\text{س} - 5)}$

(هـ) $\text{ص} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \text{س}}}$ (و) $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س} + 5}$

(10) بين أيا من أزواج الدوال الأتية متساوية

(أ) $\text{د}_1(\text{س}) = 1$ ، $\text{د}_2(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س}}$

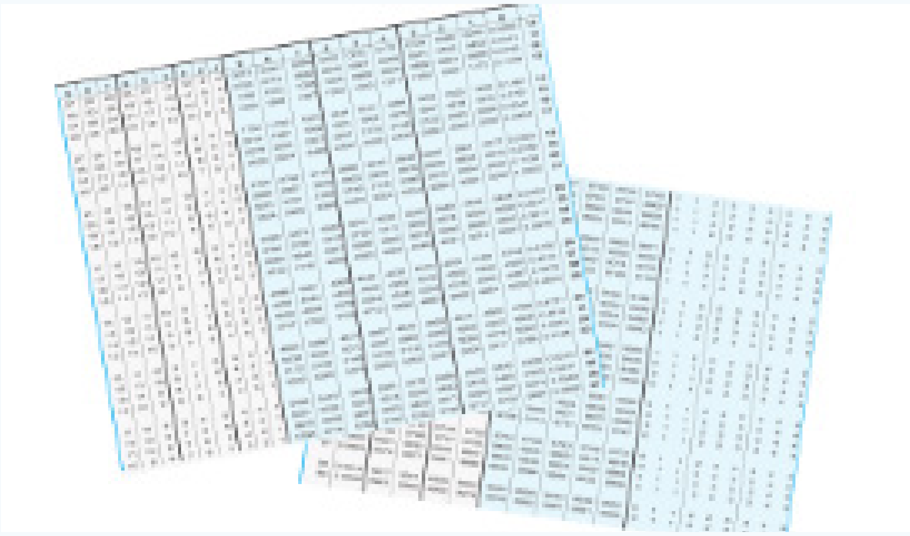
(ب) $\text{د}_1(\text{س}) = \text{س} + 1$ ، $\text{د}_2(\text{س}) = \dfrac{(\text{س} + 1)^2}{\text{س} + 1}$

2

الباب الثاني

الأسس والأعداد غير القياسية واللوغاريتمات

الأسس والأعداد غير القياسية واللوغاريتمات
Indices and Irrational Numbers Logarithms



جدوال لوغاريتمية

جون نابير

إن الهدف من الأسس (الجمع أسس) هو تبسيط كتابة وحساب الأعداد الكبيرة جدا أو الصغيرة جدا، وهذا تماما ما كان يصبو إليه العالم الاسكتلندي "جون نابير". حين اخترع اللوغاريتمات (أو الأس).

ولأنه كان أول من استخدم العلامة العشرية في شكلها الحديث فكان أساس اللوغاريتمات التي اخترعها 10 على سبيل المثال: $2713 = (10)^{3.43345}$ كتبت على الصورة اللوغاريتمية الأتية: لو 2713= 3.43345
وكذلك $3.6 = (10)^{0.55630}$ كتبت على الصورة اللوغاريتمية الأتية: لو 3.6= 0.55630

وقد نظم نابير لوغاريتمه في جدوال يسهل تتبعها ولضرب 2713 و 3.6، يجب البحث في جدول اللوغاريتمات لايجاد لوغاريتم ، وعندئذ يتم جمع العددين $0.55630 + 3.43345$ وعند قراءة المجموع 3.98975 من جدول اللوغاريتمات نحصل على العدد المطلوب وهو 9769 ، كانت طريقة العمل هذه لاستخراج نواتج الأعداد مفيدة للغاية في الماضي لأن الآلات الحاسبة لم تكن متاحة.

في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادرا على أن:

- تكتب العدد على صورة أسية باستخدام أساس معطى.
- تعادل أي كمية مرفوعة للأس صفر بالعدد 1 .
- تطبق قوانين الأسس الخمسة.
- تطبق قاعدة الأس الصغرى.
- تعبر عن الأعداد ذات الأسس السالبة كأعداد ذات أسس موجبة.
- تطبق قوانين الأسس الكسرية.
- تحل معادلات تتضمن أسسا.
- تعريف العدد عير القياسي.
- تطبيق قوانين العمليات.
- حل المعادلة التي تشمل جذور.
- تعريف اللوغاريتم وعلاقة الأسس باللوغاريتم.
- تطبق قوانين اللوغاريتمات.
- حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات.

1-1 الأسس Indices

العدد المضروب في نفسه أي عدد من المرات يمكن ببساطة كتابته باستخدام الأسس على سبيل المثال...

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2$$

$$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$د^4 = د \times د \times د \times د$$

بصفة عامة: $أ^{س} = \underbrace{أ \times أ \times أ .... \times أ}$

إلى س من العوامل لكل س = 1 ، 2 ، 3 ، ....

أس

$$2^3 = 8$$

أساس

تسمى 2^3 الصورة الأسية (والعدد 2 هو الأساس) للعدد 8 .

بصفة عامة:

إذا كان $أ^{س} = ن$، فإن $أ^{س}$ هي الصورة الأسية لـ ن حيث أ هي الأساس، س هي الأس أو القوة الجبرية

مثال 1 :

(أ) عبر عن كل مما يأتي كناتج ضرب عوامل أولية:

(i) 2^4 (ii) $س^5$ حيث س عدد أولي.

(ب) أكتب كلا مما يأتي في الصورة الأسية:

(i) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ (ii) $د \times د \times د \times د$

(جـ) أكتب 9×9 في الصورة الأسية باعتبار:

(i) الأساس 9 (ii) الأساس 3.

(د) أكتب 625 في الصورة الأسية مستخدما الأساس 5.

الحل:

(أ) (i) $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

(ii) $س^5 = س \times س \times س \times س \times س$

(ب)

(i) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$

(ii) $د \times د \times د \times د = د^4$

(جـ) (i) $9 \times 9 = 9^2$

(ii) $9 \times 9 = (3 \times 3) \times (3 \times 3)$

$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

$\therefore 9 \times 9 = 3^4$ للأساس (3)

(د) $625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

تمرين (2 - أ)

(1) أكتب كلا مما يأتي في صورة ناتج حاصل ضرب عوامل أولية.

(أ) 3^5 (ب) 5^3 (جـ) 2^6 (د) $س^3$ (هـ) $ص^5$

(2) أكتب كلا مما يأتي في الصورة الأسية.

(أ) $2 \times 2 \times 2 \times 2$ (ب) $10 \times 10 \times 10 \times 10$

(هـ) $ط \times ط \times ط \times ط \times ط \times ط$ (د) $أ \times أ \times أ \times أ$

(3) أكتب $9 \times 9 \times 9$ في الصورة الأسية مستخدما .

(أ) الأساس 9. (ب) الأساس 3 .

(4) أكتب الأتي في الصورة الأسية مستخدما الأساس الموجود بين القوسين.

(أ) 125 (الأساس 5) (ب) 64 (الأساس 4) (جـ) 49 (الأساس 4)

(جـ) 1000 (الأساس 10) (هـ) 216 (الأساس 6) (و) 256 (الأساس 2)

2-2 قوانين الأسس Laws of Indices

عندما تكون الأعداد في صورة أسية فإنها لا تكون أبسط في كتابتها فحسب ولكنها تكون أيضا أبسط في استخدامها في الحسابات. إن قوانين الأسس التالية تستخدم في العمليات الحسابية التي تتضمن الضرب والقسمة.

1-2-2 القانون الأول للأسس First Laws of Indices

لقد رأينا أن: $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

ولهذا $2^2 = 2 \times 2$

$$2^2 \times 2^4 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2^6$$
$$\therefore\ 2^2 \times 2^4 = 2^{(2+4)}$$
$$= 2^6$$

مثال 2:

بسط كلا مما يأتي معطيا إجابتك في صورة أسية:

(أ) $5^2 \times 5^3$ (ب) $3^3 \times 3^5$

الحل:

(أ)

$$5^2 \times 5^3 = (5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5)$$
$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$
$$= 5^5$$
$$5^2 \times 5^3 = 5^{(3+2)}$$
$$= 5^5$$

(ب)

$$3^3 \times 3^5 = (3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$$
$$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$
$$= 3^8$$
$$3^3 \times 3^5 = 3^{(5+3)}$$
$$= 3^8$$

لاحظ أنه في كل مثال: كلا العددين الناتجين لهما نفس الأساس يمكن استخدام نفس الطريقة عندما يكون الأساس غير معلوم

مثال 3:

اختصر كلا من الأتي معطيا إجابتك في الصورة الأسية:

(أ) $\text{أ}^2 \times \text{أ}^5$ (ب) $\text{د} \times \text{د}^4$

الحل:

(أ) $\text{أ}^2 \times \text{أ}^5 = \underbrace{(\text{أ} \times \text{أ})}_{\text{عاملان}} \times \underbrace{(\text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ})}_{\text{5 عوامل}}$

$= \underbrace{\text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ}}_{\text{(2+5) عوامل}}$

$\text{أ}^2 \times \text{أ}^5 = \text{أ}^{(2+5)} = \text{أ}^7$

(ب) $\text{د} \times \text{د}^4 = \text{د}^1 \times \text{د}^4$

$= \text{د} \times \text{د} \times \text{د} \times \text{د} = \text{د}$

$\text{د}^1 \times \text{د}^4 = \text{د} \times \text{د}^4 = \text{د}^{(1+4)} = \text{د}^5$

القانون الأول للأسس:

عندما نضرب الأعداد أو المجاهيل المكتوبة في صورة أسية والتي لها نفس الأساس في بعضها البعض تجمع الأسس ولهذا:

$$\text{أ}^{\text{س}} \times \text{أ}^{\text{ص}} = \text{أ}^{(\text{س}+\text{ص})}$$

ملحوظة:
لا تحفظ هذاالقانون
تذكر هذه الصورة للقانون

مثال 4:

ملحوظة:
استخدم القانون الأول للأسس.

اختصر كلا من الأتي معطيا إجابتك في الصورة الأسية:

(أ) $5^3 \times 5^4$ (ب) $\text{أ}^7 \times \text{أ}^5$

الحل:

(أ) $5^3 \times 5^4 = 5^{(3+4)} = 5^7$

(ب) $\text{أ}^7 \times \text{أ}^5 = \text{أ}^{(7+5)} = \text{أ}^{12}$

تمرين (2 - ب)

استخدم القانون الأول للأسس في اختصار الأتي:

(أ) $2^3 \times 2^2$ (ب) $3^2 \times 3^2$ (جـ) $2^4 \times 2^5$ (د) $\text{م}^2 \times \text{م}^4$

(هـ) $\text{أ}^6 \times \text{أ}^{10}$ (و) $\text{س}^5 \times \text{س}^7$ (ز) $\text{ع}^7 \times \text{ع}^7$

يستخدم القانون الأول للأسس في تبسيط الحدود الأكثر تعقيدا، ويجب أن نتذكر دائما أن هذا القانون ينطبق فقط على الأعداد التي يعبر عنها بنفس الأساس فقط.

مثال 3:

اختصر كلا من الأتي معطيا إجابتك في الصورة الأسية:

(أ) س^{2} ص^{3} × س^{3} ص^{4} (ب) 2 س^{3} ص^{2} × 3 س ص^{4}

الحل:

(أ) س^{2} ص^{3} × س^{3} ص^{4} = س^{2} × ص^{3} × س^{3} × ص^{4}

= (س^{2} × س^{3}) × (ص^{3} × ص^{4})

= س$^{(2+3)}$ × ص$^{(3+4)}$

= س^{5} × ص^{7}

= س^{5} ص^{7}

ملحوظة:

تجمع الأساسات المتشابهة معا.

تجمع الأرقام والأساسات المتشابهة معا.

(ب) 2 س^{3} ص^{2} × 3 س ص^{4} = 2 × س^{3} × ص^{2} × 3 × س × ص^{4}

= (2 × 3) × (س^{3} × س) × (ص^{2} × ص^{4})

= 6 × س$^{(3+1)}$ × ص$^{(2+4)}$

= 6 × س^{4} × ص^{6}

= 6 س^{4} ص^{6}

تمرين (2 - جـ)

(1) استخدم القانون الأول للأسس لاختصار كل من الأتي:

(أ) 3 س^{4} × س^{5} (ب) 8أ^{3} × أ^{9}

(جـ) ص^{2} × 2 ص^{4} (د) جـ^{5} × 7جـ^{8}

(هـ) م × 9 م^{4} (و) 4 ق^{5} × 3 ق^{7}

(2) مستخدما القانون الأول للأسس اختصر كلا من الأتي:

(أ) س^{2} ص^{2} × س^{5} (ب) أ^{7} ب^{3} × ب^{4}

(جـ) ص ع^{7} × ع^{8} (د) جـ^{3} ء^{5} × ء^{8}

(هـ) س^{2} ص × س^{6} (و) أ^{4} ب^{2} × أ^{6}

(ز) 2 س^{2} ص^{3} × س^{6} (ح) 8أ^{2} ب^{2} × 2أ^{5} ب^{2}

(ط) 7 ن^{3} هـ^{3} × 3 ن هـ^{4} (ي) 5 ء^{2} ط × 3 ء ط^{2}

(ك) 3 م^{3} ن^{4} × 4 م^{4} ن^{3} (ل) 9 س^{2} ص^{3} × 5 س^{4} ص^{2}

2-2-2 القانون الثاني للأسس Second Laws of Indices

في صورة عوامل: $3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ، $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$$\therefore \quad \frac{3^6}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = 3 \times 3 = 3^2$$ عكس الصيغة

لاحظ أن الأس 2 فى الإجابة هو الفرق بين الأس 6 والأس 4 في المقام والبسط على التوالي:

$$\therefore \quad \frac{3^6}{3^4} = 3^{(6-4)} = 3^2$$

وبالمثل: $3^4 = \text{م} \times \text{م} \times \text{م} \times \text{م}$ و $\text{م}^1 = \text{م}$

$$\therefore \quad \frac{\text{م}^4}{\text{م}} = \frac{\text{م} \times \text{م} \times \text{م} \times \text{م}}{\text{م}} = \text{م} \times \text{م} \times \text{م}$$

الأس الذي رفعت إليه في الإجابة هو الفرق بين أس البسط وأس المقام.

$$\therefore \quad \frac{\text{م}^4}{\text{م}} = \text{م}^{(4-1)} = \text{م}^3$$

القانون الثاني للأسس:

عندما نقسم الأعداد أو المجاهيل المكتوبة في الصورة الأسية ويكون لها نفس الأساسات اللاصفرية ، فإن أس الكمية يحسب بطرح أس المقام من أس البسط:

$$\text{أ}^{\text{س}} \div \text{أ}^{\text{ص}} = \text{أ}^{(\text{س}-\text{ص})} \quad ، \quad \text{أ} \neq 0$$

ملحوظة:
لا تحفظ هذاالقانون
تذكر هذه الصورة للقانون

مثال 6:

(أ) $\frac{2^7}{2^2}$ (ب) $\text{م}^8 \div \text{م}^5$

ملحوظة:
استخدم القانون الثاني للأسس.

الحل:

(أ) $\frac{2^7}{2^2} = 2^{(7-2)} = 2^5$

(ب) $\text{م}^8 \div \text{م}^5 = \text{م}^{8-5} = \text{م}^3$

تمرين (2 - ي)

(1) اكمل الجدول الأتي:

$2^1 =$	$2^6 =$
$2^2 =$	$2^7 =$
$2^3 =$	$2^8 =$
$2^4 =$	$2^9 =$
$2^5 =$	$2^{10} =$

(2) استخدم القانون الثاني للأسس لاختصار كلا من الأتي ، ثم استخدم الجدول الموجود في السؤال (1) لحساب القيمة:

(أ) $\frac{2^6}{2^2}$ (ب) $\frac{10^9}{10^6}$ (جـ) $\frac{2^9}{2^4}$

(د) $\frac{ي^6}{ي}$ (هـ) $2^{12} \div 2^5$ (و) $\frac{س^{12}}{س^9}$

ويمكن استخدام القانون الثاني للأسس في تبسيط التعبيرات الأكثر تعقيدا، ويجب أن نتذكر دائما أن هذا القانون ينطبق فقط على الأرقام المعبر عنها بنفس الأساس اللاصفري.

مثال 7: اختصر الأتي:

(أ) $\frac{8أ^4}{2}$ (ب) $\frac{16د^6}{8د^3}$ (جـ) $\frac{أ^5ب^6}{أ^4ب^3}$

الحل:

(أ) $\frac{8أ^4}{2} = \frac{8 \times أ^4}{2} = 4أ^4$

(ب) $\frac{16د^6}{8د^3} = \frac{16^2 \times د^6}{8_1 \times د^3} = \frac{2د^6}{د^3} = 2د^3$

(جـ) $\frac{أ^5ب^6}{أ^4ب^3} = أ^{(5-4)} \times ب^{(6-3)} = أ^1 \times ب^3 = أب^3$

تمرين (2 - هـ)

(1) اختصر الأتي:

(أ) $\frac{س^2 ص^3}{س^2 ص^2}$ (ب) $\frac{أ^6 ص^7}{أ^4 ص^3}$ (جـ) $\frac{ن^5 هـ^{10}}{ن^2 هـ^4}$

(د) $\frac{هـ^4 د^7}{هـ^3 د^6}$ (هـ) $\frac{ذ^{14} ت^8}{ذ^9 ت^5}$ (و) $\frac{ص^4 ع^{15}}{ص ع^3}$

(2) استخدم القانون الأول والثاني في اختصار الأتي:

(أ) $\frac{2^6 \times 2^3}{2^2}$ (ب) $\frac{3^7 \times 3^3}{3^5}$ (جـ) $\frac{2^{15} \times 2^6}{2^{12}}$

(د) $\frac{2^8 \times 2^2 \times 2}{2^5}$ (هـ) $\frac{3^{10} \times 3^3 \times 3}{3^7}$ (و) $\frac{2^8 \times 2^2 \times 2^4}{2^{12} \times 2}$

(ز) $\frac{3^7 \times 3^9 \times 3}{3^{11} \times 3^5}$

(3) اختصر الأتي:

(أ) $\frac{س^2 \times س^2}{س^4}$ (ب) $\frac{أ^7 \times أ^5}{أ^9}$ (جـ) $\frac{ت^5 \times ت^3}{ت^4}$

(د) $\frac{أ^5 \times أ^6}{أ^8}$ (هـ) $\frac{3ن^3 \times 5ن^2}{ن^4}$ (و) $\frac{6س^3 \times 2س^5}{3س^3}$

(ز) $\frac{ت^3 \times ت^9}{ت^4 \times ت^6}$ (ح) $\frac{ن^5 \times ن^8}{ن^2 \times ن^4}$

3-2-2 قاعدة الأس الصفري Zero Index Rule

أوجد المقدار $\frac{2^3}{2^3}$ مستخدما القانون الثاني للأسس.

$\frac{2^3}{2^3} = 2^{(3-3)} = 3^0$ في صورة العوامل: $\frac{2^3}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 1$

$\therefore 2^0 = 1$

وبالمثل:

$$أ^5 \div أ^5 = \frac{أ^5}{أ^5} = أ^{(5-5)} = أ^0$$

ولكن:

$$أ^5 \div أ^5 = \frac{أ \times أ \times أ \times أ \times أ}{أ \times أ \times أ \times أ \times أ} = 1$$

$\therefore أ^0 = 1$

قاعدة الأس الصفري إذا رفع عدد غير صفري أو مجهول للقوة الجبرية صفر فتكون . الإجابة 1 ولهذا:

$$أ^0 = 1 \text{ ،} \quad أ \neq 0$$

مثال 8: احسب قيمة:

(أ) $م^0$ (ب) $4\,أ^0$

> **ملحوظة:** استخدم قاعدة الأس الصفري

الحل:

(أ) $م^0 = 1$ (ب) $4\,أ^0 = 4 \times 1 = 4$

تمرين (2 – و)

(1) 3^0 (2) 5^0 (3) 7^0 (4) $ط^0$

(5) $س^0$ (6) $3ص^0$ (7) $5د^0$

4-2-2 القانون الثالث للأسس Third Law of Indices

تأمل التعبير $(3^2)^3$ بمعنى " تكعيب 3 تربيع"

في صورة العوامل: $(3^2)^3 = \underbrace{3^2 \times 3^2 \times 3^2}_{3 \text{ عوامل}}$

$= 3^{(2+2+2)} = 3^6$

> **ملحوظة:** استخدم القانون الأول للأسس.

ولذلك في تقدير قيمة $(3^2)^3$ ضربنا في الحقيقة الأسس

وبالمثل:

$(أ^3)^4$ تعنى (تكعيب مرفوعة لأس 4)

في صورة العوامل: $(أ^3)^4 = \underbrace{أ^3 \times أ^3 \times أ^3 \times أ^3}_{4 \text{ عوامل}}$

$= أ^{(3+3+3+3)} = أ^{(4\times3)} = أ^{12}$

> استخدم القانون الثالث للأسس.

القانون الثالث للأسس:

عندما نرفع الأعداد أو المجاهيل المكتوبة في صورة أسية ويكون لها نفس الأساس إلى قوة جبرية أخرى، تضرب الأسس ولهذا:

$$(أ^س)^ص = أ^{(س\times ص)} = أ^{س\,ص}$$

> لا تحفظ هذاالقانون تذكر هذه الصورة للقانون

مثال 9: عبر عن كل ما يأتي فى أبسط صورة:

(أ) $(3^4)^3$ (ب) $(و^6)^5$

الحل:

(أ) $(3^4)^3 = 3^{(4\times3)} = 3^{12}$ (ب) $(و^6)^5 = و^{(4\times3)} = و^{30}$

تمرين (2 – ز) عبر عن كلا ممايلي في أبسط صورة:

(1) $(3^2)^4$ (2) $(5^3)^6$ (3) $(8^4)^5$

(4) $(\text{ع}^5)^3$ (6) $(\text{أ}^6)^4$ (7) $(\text{م}^3)^2$

يمكن استخدام القوانين السابقة للأسس في مجموعات مؤتلفة لتبسيط التعبيرات الأكثر تعقيدا وتذكر الأتي:

1– يمكن استخدام قوانين الأسس فقط عندما تكون الأعداد أو المجاهيل معبرا عنها بنفس الأساس.

2– يجب تبسيط التعبيرات الموجودة داخل الأقواس قبل استخدام قوانين أخرى للأسس.

مثال 10: عبر عن كل من الأتي في أبسط صورة:

(أ) $(\text{أ}^3)^2 \times \text{أ}^5$ (ب) $\text{ب}^{10} \div (\text{ب}^2)^5$

(جـ) $(\text{س}^4)^2 \times (\text{س}^2)^3$ (د) $\dfrac{(\text{ص}^3)^4}{(\text{ص}^2)^5}$

الحل:

(أ) $(\text{أ}^3)^2 \times \text{أ}^5 = \text{أ}^{(3\times2)} \times \text{أ}^5$

$= \text{أ}^6 \times \text{أ}^5$

$= \text{أ}^{(6+5)} = \text{أ}^{11}$

(ب) $\text{ب}^{10} \div (\text{ب}^2)^5 = \text{ب}^{10} \div \text{ب}^{(2\times5)}$

$= \text{ب}^{10} \div \text{ب}^{10}$

$= \text{ب}^{(10-10)}$

$= \text{ب}^0 = 1$

(جـ) $(\text{س}^4)^2 \times (\text{س}^2)^3 = \text{س}^{(4\times2)} \times \text{س}^{(2\times3)}$

$= \text{س}^8 \times \text{س}^6$

$= \text{س}^{(8+6)} = \text{س}^{14}$

(د) $\dfrac{(\text{ص}^3)^4}{(\text{ص}^2)^5} = \dfrac{\text{ص}^{(3\times4)}}{\text{ص}^{(2\times5)}}$

$= \dfrac{\text{ص}^{12}}{\text{ص}^{10}} = \text{ص}^{12} \div \text{ص}^{10}$

$= \text{ص}^{(12-10)} = \text{ص}^2$

تمرين (2 – ح)

(1) عبر عن كل مما يأتي في أبسط صورة أسية:

(أ) $(\text{أ}^2)^2 \times \text{أ}^4$ (ب) $(\text{م}^4)^3 \times \text{م}^2$

(جـ) $\text{م}^5 \times (\text{م}^2)^4$ (د) $(\text{ص}^3)^2 \times \text{ص}^8$

(2) عبر عن كل مما يأتي في أبسط صورة أسية:

(أ) $(\text{أ}^2)^2 \div \text{أ}^3$ (ب) $(\text{ذ}^4)^3 \div \text{ذ}^7$ (جـ) $(\text{هـ}^8)^6 \div \text{هـ}^{10}$

(د) $(\text{ذ}^7)^2 \div \text{ذ}^8$ (هـ) $(\text{ص}^6)^3 \div \text{ص}$ (و) $(\text{ع}^7)^2 \div \text{ع}^{14}$

(3) اختصر:

(أ) $(\text{أ}^2)^2 \times (\text{أ}^4)^3$ (ب) $(\text{ب}^5)^2 \times (\text{ب}^3)^3$ (جـ) $(\text{م}^4)^4 \times (\text{م}^2)^3$

(د) $(\text{ل}^5)^4 \times (\text{ل}^3)^3$ (هـ) $(\text{ص}^5)^5 \times (\text{ص}^5)^5$ (و) $(\text{هـ}^5)^2 \div (\text{هـ}^3)^3$

(ز) $(\text{ص}^4)^3 \times (\text{ص}^6)^2$

5-2-2 القانون الرابع للأسس Fourth Law of Indices

تأمل التعبير $(2\times3)^3$ والذي يعني " 2×3 تكعيب "

في صورة العوامل: $(2\times3)^3 = \underbrace{(2\times3)\,(2\times3)\,(2\times3)}_{\text{3 عوامل}}$

$= \underbrace{2\times2\times2}_{\text{3 عوامل}} \times \underbrace{3\times3\times3}_{\text{3 عوامل}}$

$= 2^3 \times 3^3 \Leftarrow \therefore (2\times3)^3 = 2^3 \times 3^3$

وبالمثل: $(\text{أ ب})^4 = (\text{أ}\times\text{ب})^4$

$= (\text{أ}\times\text{ب})\times(\text{أ}\times\text{ب})\times(\text{أ}\times\text{ب})\times(\text{أ}\times\text{ب})$

$= \text{أ}\times\text{أ}\times\text{أ}\times\text{أ}\times\text{ب}\times\text{ب}\times\text{ب}\times\text{ب}$

$= \text{أ}^4\times\text{ب}^4 \Leftarrow \therefore (\text{أ}\times\text{ب})^4 = \text{أ}^4\times\text{ب}^4$

القانون الرابع للأسس: $(\text{أ}\times\text{ب})^{\text{س}} = \text{أ}^{\text{س}}\times\text{ب}^{\text{س}}$

مثال 11: اختصر:

(أ) $(\text{د}^3\times\text{و})^2$ (ب) $(2\,\text{أ}^2\,\text{ب})^3$

الحل:

(أ) $(\text{د}^3\times\text{و})^2 = (\text{د}^3)^2\times\text{و}^2$

$= \text{د}^{3\times2}\times\text{و}^2$

$= \text{د}^6\times\text{و}^2$

$= \text{د}^6\,\text{و}^2$

(ب) $(2\,\text{أ}^2\,\text{ب})^3 = (2\times\text{أ}^2\times\text{ب})^3$

$= 2^3\times(\text{أ}^2)^3\times\text{ب}^3$

$= 2^3\times\text{أ}^{2\times3}\times\text{ب}^3$

$= 8\,\text{أ}^6\,\text{ب}^3$

مثال 12: اختصر:

(أ) $(2\ \text{س ص})^0$ (ب) $(5\,\text{أ}^3\text{ب}^2)^0$

الحل:

(أ) $(2\ \text{س ص})^0 = (2\times\text{س}\times\text{ص})^0$

$= 2^0\times\text{س}^0\times\text{ص}^0$

$= 1\times1\times1$

$= 1$

(ب) $(5\,\text{أ}^3\text{ب}^2)^0 = 1$

تمرين (2 – ط) : اختصر:

(أ) $(2\times5)^2$ (ب) $(6\times7)^4$ (جـ) $(\text{أ ب})^5$ (د) $(\text{أ}^2\text{ب}^2)^3$

(هـ) $(3\,\text{أ})^2$ (و) $(3\ \text{ص}^2\ \text{س}^3)^0$ (ز) $(6\,\text{جـ})^3$ (ح) $(4\,\text{أ})^0$

(ط) $(3\,\text{أ ب})^2$ (ي) $(\text{أ}^2\text{ب}^2)^{-3}$ (ك) $(3\,\text{أ}^2\text{ب}^3)^3$ (ل) $(3\text{ص}^2\text{س}^3)^0$

6-2-2 القانون الخامس للأسس Fifth Law of Indices

تأمل التعبير $(\frac{2}{3})^3$ والذي يعني " تكعيب $\frac{2}{3}$ "

في صورة العوامل: $(\frac{2}{3})^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2\times2\times2}{3\times3\times3} = \frac{2^3}{3^3}$

$\therefore (\frac{2}{3})^3 = \frac{2^3}{3^3}$

بالمثل

$(\frac{أ}{ب})^4 = \frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} = \frac{أ\times أ\times أ\times أ}{ب\times ب\times ب\times ب} = \frac{أ^4}{ب^4}$

$\therefore (\frac{أ}{ب})^4 = \frac{أ^4}{ب^4}$

ملحوظة:
إعادة جميع المراحل

القانون الخامس للأسس: $(\frac{أ}{ب})^{س} = \frac{أ^{س}}{ب^{س}}$

مثال 13: اختصر:

(أ) $(\frac{م}{ن})^5$ (ب) $(\frac{أ^2}{ب})^3$

الحل:

(أ) $(\frac{م}{ن})^5 = \frac{م^5}{ن^5}$

(ب) $(\frac{أ^2}{ب})^3 = \frac{(أ^2)^3}{ب^3} = \frac{أ^{2\times3}}{ب^3} = \frac{أ^6}{ب^3}$

تمرين (2-ي)

(1) أزل الأقواس وأعط إجابتك في الصورة الأسية:

(أ) $(\frac{4}{5})^2$ (ب) $(\frac{2}{7})^3$ (جـ) $(\frac{أ}{ب})^5$

(د) $(\frac{م}{ن})^4$ (هـ) $(\frac{8}{ت})^3$ (و) $(\frac{-2}{س})^6$

(2) اختصر:

(أ) $(\frac{س^2}{ص})^2$ (ب) $(\frac{م^2}{ن})^2$ (جـ) $(\frac{أ^2}{ب})^2$ (د) $(\frac{ث^3}{ت})^3$

3-2 الأسس السالبة Negative Indices

تأمل $6^3 \times 6^3$

$$\frac{6^3}{6^5} = \frac{6\times6\times6}{6\times6\times6\times6\times6} = \frac{1}{6\times6} = \frac{1}{6^2}$$

ولكن نستخدم القانون الثاني للأسس:

$$6^3 \times 6^{-5} = 6^{(3-5)} = 6^{-2} \quad \therefore 6^{-2} = \frac{1}{6^2}$$

وبالمثل:

$$\frac{س^2}{س^3} = \frac{س\times س}{س\times س\times س} = \frac{1}{س}$$

و $س^{2} \div س^{3} = س^{(2-3)} = س^{-1}$

$\therefore س^{-1} = \frac{1}{س}$

وعموما :

(1) $أ^{-ن} = \frac{1}{أ^{ن}}$ $(أ \neq 0)$ ، $أ^{-ن}$ هو المعكوس الضربي $أ^{ن}$

يمكن أيضا استخدام جميع قوانين الأسس التي استخدمناه للأسس الموجبة مع الأسس السالبة

(2) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{ن}$ $(أ ، ب \neq 0)$

مثال 14: عبر عن كل ما يأتي مستخدما أسا موجبا:

(أ) $أ^{-5}$ (ب) $2ب^{-5}$ (جـ) $ت^{-4} \times ت^{3}$

(أ) $ذ^{4} \div ذ^{9}$ (ب) $3(س^{2})^{-3}$ (جـ) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$

الحل:

(أ) $أ^{-5} = \frac{1}{أ^{5}}$ (ب) $2ب^{-5} = \frac{1}{ب^{5}}$ (جـ) $ت^{-4} \times ت^{3} = ت^{-4+3} = \frac{1}{ت}$

(د) $ذ^{4} \div ذ^{9} = ذ^{4-9} = ذ^{-5} = \frac{1}{ذ^{5}}$ (ب) $3(س^{2})^{-3} = 3س^{-6} = \frac{1}{س^{6}}$ (جـ) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3} = \frac{4^{3}}{3^{3}} = \frac{64}{27}$

تمرين (2-ك)

(1) عبر عن الآتي في صورة أسية موجبة:

(أ) $أ^{-3}$ (ب) $م^{-5}$ (جـ) $3أ^{-4}$

(د) $4^{-2}س^{-4}$ (هـ) $5^{-5}س^{-7}$

(2) اختصر وعبر عن الآتي في صورة أسية موجبة:

(أ) $2^{3} \times 2^{-7}$ (ب) $2^{-2} \times 2^{5}$ (جـ) $10^{-3} \times 10^{-1}$ (د) $8^{-5} \times 8^{-2}$

(هـ) $3أ^{-1} \times 2أ^{-4}$ (و) $ط^{-1} \times ط$ (ز) $أ^{2}ب^{3} \times أ^{-3}ب^{-2}$ (ح) $س^{-2}ص \times س\,ص^{-4}$

(3) اختصر وعبر عن الآتي في صورة أسية موجبة:

(أ) $2^{3} \div 2^{5}$ (ب) $3^{2} \div 3^{-3}$ (جـ) $7^{-1} \div 7^{-3}$ (د) $ذ \div ذ^{7}$

(هـ) $ن^{5} \div ن^{-1}$ (و) $\frac{3}{د} \div د^{-2}$ (ز) $8د^{-2} \div 2د^{-3}$ (ح) $\frac{8أ^{-4}}{2أ^{6}}$

(4) اختصر وعبر عن الآتي في صورة أسية موجبة:

(أ) $(2^{-3})^{4}$ (ب) $(10^{2})^{-1}$ (جـ) $(5^{-3})^{0}$ (د) $(8^{0})^{-4}$

(هـ) $(6^{-2})^{-4}$ (و) $(د^{-3})^{2}$ (ز) $(س\,ص^{-2})^{4}$ (ح) $(ذ^{-2}ب^{3})^{-1}$

4-2 الأس الكسرية Fractional Indices

تأمل $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}$ باستخدام القانون الأول للأسس $= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 3^{1} = 3$

ولكن $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

$\therefore\ 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

وبالمثل: $2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 2^{1} = 2$

و $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = 2$

$\therefore\ 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

بصفة عامة

$أ^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$ حيث $ن = 1 ، 2 ، 3 ، \ldots$

تأمل $(س^{3})^{\frac{1}{2}}$ إذا كان الأس $\frac{1}{2}$ يمكن استبداله بإشارة الجذر التربيعي $(س^{3})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{س^{3}}$ باستخدام القانون الثالث للأسس: $(س^{3})^{\frac{1}{2}} = س^{\frac{3}{2}}$

عموما:

$أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}}$ ، $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-\frac{م}{ن}} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{\frac{م}{ن}}$ ، $ب \neq 0$ ، حيث $ن = 1 ، 2 ، 3 ، \ldots$

مثال 15: اختصر:

(أ) $27^{\frac{1}{3}}$ (ب) $(س^{6})^{\frac{1}{2}}$

الحل:

(أ) $27^{\frac{1}{3}} = (3^{3})^{\frac{1}{3}}$
$= 3^{3\times\frac{1}{3}}$
$= 3^{1} = 3$

(ب) $(س^{6})^{\frac{1}{2}} = س^{6\times\frac{1}{2}}$
$= س^{3}$

مثال 16: أعد $\sqrt[3]{د^{2}}$ كتابة مستخدما أسا وحيدا:

الحل $\sqrt[3]{د^{2}} = د^{\frac{2}{3}}$

مثال 17:

(أ) $\sqrt[3]{16}$ (ب) $125^{\frac{2}{3}}$ (جـ) $\left(\frac{64}{215}\right)^{-\frac{4}{3}}$

الحل:

(أ) $\sqrt[3]{16} = 16^{\frac{3}{2}} = (4^{2})^{\frac{3}{2}}$

(ب) $125^{\frac{2}{3}} = (5^{3})^{\frac{2}{3}} = 5^{2} = 25$

(جـ) $\left(\frac{64}{215}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(\frac{215}{64}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{125}{64}}\right)^{4} = \frac{5}{4} = \frac{625}{256}$

تمرين (2 - ل)

(1) دون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

(أ) $4^{\frac{1}{2}}$ (ب) $8^{\frac{1}{3}}$ (جـ) $125^{\frac{2}{3}}$ (د) $64^{\frac{1}{6}}$ (هـ) $1000^{\frac{1}{3}}$

(و) $225^{\frac{1}{2}}$ (ز) $\sqrt{4^{5}}$ (ح) $100^{\frac{3}{2}}$ (ط) $32^{\frac{3}{5}}$ (ي) $\sqrt[3]{27^{2}}$

(2) أعد كتابة كل من الأتي مستخدما أسا وحيداً:

(أ) $\sqrt[3]{جـ}$ (ب) $\sqrt{د}$ (جـ) $\sqrt[5]{د}$ (د) $\sqrt[7]{ف}$

(هـ) $\sqrt[3]{أ^{2}}$ (و) $\sqrt[4]{جـ^{3}}$ (ز) $\sqrt{د^{2}}$

(3) اختصر:

(أ) $(س^{6})^{\frac{1}{3}}$ (ب) $(س^{12})^{\frac{1}{4}}$ (جـ) $(ذ^{\frac{1}{5}})^{10}$ (د) $(ت^{\frac{1}{5}})^{3}$

(هـ) $(2ي)^{\frac{1}{2}}$ (و) $(8س^{3}س^{6})^{\frac{1}{3}}$ (ز) $(16ن^{4}هـ^{5})^{\frac{1}{2}}$ (ح) $(4^{2}\times 5^{3})^{\frac{1}{2}}$

(هـ) $(\frac{16}{25})^{-\frac{5}{2}}$

5-2 حل المعادلات التى تتضمن أسسا Solving Equations involving Indices

المعادلة على الصورة $2^{س}=64$ تسمى معادلة أسية، المجهول هو الأس أو القوة، إحدى طرق الحل هو التعبير عن طرفي المعادلة بأساس مشترك.

إذن: $2^{س} = 2^{6}$ ⇦ س = 6 (بمساواة الأسين)

مثال 18: إذا كان $د^{4}=81$ أوجد قيمة د :

الحل:

$د^{4}=81$ ⇦ $د^{4} = 3^{4}$ ⇦ د = 3

مثال 19: (أ) إذا كان $2^{م} = 32$ أوجد قيمة م (ب) إذا كان $3^{ن}=\frac{1}{81}$ أوجد قيمة ن.

الحل:

(أ) $2^{م} = 32$ ⇦ $2^{م} = 2^{5}$ ∴ م = 5

(أ) $3^{ن}=\frac{1}{81}$ ⇦ $3^{ن}=\frac{1}{3^{4}} = 3^{-4}$ ∴ ن = -4

مثال 20:

(أ) إذا كان $\text{أ}^{\frac{1}{2}} = 3$ أوجد قيمة أ (ب) إذا كان $7^{\text{م}} = \sqrt{343}$ أوجد قيمة م.

(جـ) إذا كان $4^{\text{ن}} = \frac{1}{8}$ أوجد قيمة ن.

الحل:

(أ) $\text{أ}^{\frac{1}{2}} = 3 \Leftarrow (\text{أ}^{\frac{1}{2}})^2 = 3^2 \Leftarrow \text{أ}^{2\times\frac{1}{2}} = 9 \qquad \therefore \text{أ} = 9$.

(ب) $7^{\text{م}} = \sqrt{343} \Leftarrow 7^{\text{م}} = \sqrt{7^3} \Leftarrow (7^3)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{3}{2}} \qquad \therefore \text{م} = \frac{3}{2} \Leftarrow \text{م} = 1\frac{1}{2}$

(جـ) $4^{\text{ن}} = \frac{1}{8} \Leftarrow (2^2)^{\text{ن}} = \frac{1}{2^3} \Leftarrow 2^{2\text{ن}} = 2^{-3} \qquad \therefore 2\text{ن} = -3 \Leftarrow \text{ن} = -\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

ملحوظة:
أ- نربع الطرفين.
ب - عبر عن أحد الأيمن بنفس الأساس مثل الحد الأيسر (الأساس 7).
جـ- عبر عن بالطرفين والأساس 2.

مثال 21:

حل المعادلة $2^{\text{س}} = 0.125$

الحل:

لدينا $2^{\text{س}} = 0.125$

$\Leftarrow 2^{\text{س}} = \frac{1}{8}(0.125) = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$

$\Leftarrow 2^{\text{س}} = 2^{-3}$

بمساواة الأسين إذن $\text{س} = 3$

الحالة السابقة مثال للدوال الأسية على الصورة $\text{ن}^{\text{س}} = $ب حيث يمكن التعبير عن ب بدلالة قوة ن.

تمرين (2 - 2)

يمكن استخدام الآلة الحاسبة في هذا التمرين:

(1) أوجد قيمة أ إذا كان:

(أ) $\text{أ}^{2} = 256$ (ب) $\text{أ}^{3} = 343$ (جـ) $\text{أ}^{5} = 1024$

(2) أوجد قيمة المجهول:

(أ) $2^{\text{م}} = 64$ (ب) $3^{\text{م}} = 243$ (جـ) $5^{\text{م}} = 625$

(د) $2^{\text{ن}} = \frac{1}{32}$ (هـ) $5^{\text{ن}} = \frac{1}{125}$ (و) $7^{2\text{ر}} = 343$

(3) (أ) إذا كان $2^{3} \times 8 = 2^{\text{م}}$ أوجد قيمة م.

(ب) أوجد قيمة ن إذا كان $2^{4} \times 4^{2} = 2^{\text{ن}}$

(4) (أ) أوجد قيمة ر إذا كان $2^{15} \div 2 = 2^{\text{ر}}$

(ب) أوجد قيمة ذ إذا كان $3^{15} \div 9^{2} = 3^{\text{ذ}}$

(5) (أ) إذا كان $\text{س}^{-2} = 4$ أوجد قيمة س^{2}.

(ب) إذا كان $\text{ص}^{-3} = 27$ أوجد قيمة ص.

(6) (أ) أوجد قيمة ر إذا كان $3^{9} \div 3^{\text{ر}} = 3^{2}$

(ب) أوجد قيمة ذ التي تحقق $3^{\text{ذ}} = 81$

(7) (أ) أوجد قيمة أ إذا كان:

(أ) $\text{أ}^{\frac{1}{2}} = 4$ (ب) $\text{أ}^{\frac{1}{3}} = 3$ (جـ) $\text{أ}^{\frac{1}{5}} = 2$

(8) حل في ر إذا كان:

(أ) $3^{\text{ر}} = \sqrt{27}$ (ب) $7^{2\text{ر}} = \sqrt{343}$ (جـ) $7^{2\text{ر}} = \frac{1}{9}$

(9) إذا كان $\text{ص}^{-\frac{1}{2}} = 3$ أوجد قيمة ص.

(10) إذا كان: $3^{\text{س}} \times 8^{\text{س}} = 81$ أوجد قيمة س التي تحقق المعادلة.

(11) إذا كان: $\sqrt{27^{\text{ص}}} \times \sqrt{9^{\text{ص}}} = \sqrt{243}$ أوجد قيمة ص التي تحقق المعادلة.

(12) (أ) (i) إذا كان: $2^{\text{م}} \div 2^{4} = 2^{6}$ أوجد قيمة م.

(ii) إذا كان: $2^{\text{ن}} \times 3^{4} = 3^{\text{صفر}}$ أوجد قيمة ن

(ب) أوجد قيمة $9^{\frac{1}{2}}$

رياضيات ممتعة:

العدد النرجسي: هو عدد (ن) من الأرقام يساوي مجموع الأس (ن) لكل من الأرقام المكونة له .

مثال ذلك:

$$153 = 27 + 125 + 1 = 3^3+5^3+1^3 = 153$$

$$1634 = 256 + 81 + 1296 + 1 = 4^4+3^4+6^4+1^4 = 1634$$

العدد شبه النرجسي: هو عدد يمكن التعبير عنه بأداء بعض العمليات الرياضية على الأرقام المكونة له مرفوعة لأي أس بالترتيب المعطى ليعطي العدد الأصلي على سبيل المثال.

$$24 = 16 + 8 = 4^2+2^3 = 24$$

$$81 = 9\times 9 = 9^2 = (1^1+8^1)^4 = 81$$

$$135 = 125 + 9 + 1 = 5^3+3^2+1^2 = 135$$

الأعداد التالية إما نرجسية أوشبه نرجسية هل يمكن توضيح أي من الأرقام نرجسية ؟

(أ) 25	(ب) 47
(جـ) 225	(د) 371
(هـ) 407	(و) 598
(ز) 729	(ح) 2427
(ط) 8208	(ي) 9474

ملحوظة:
العمليات المناسبة يمكن اختبارها بالتجريب والخطأ

⌛ ورقة المراجعة 2 :

لا تستخدام الآلة الحاسبة في حل التمرين:

القسم أ :

(1) اختصر: (أ) $أ^{4} \times أ^{6} \div أ^{8}$ (ب) $ب\,جـ \times 2\,ب^{2}\,جـ \times 4\,ب^{3}\,جـ$

(2) احسب قيمة : (أ) 5^{0} (ب) $5ص^{0}$ (جـ) $(2س)^{0}$ (د) $(\frac{1}{2})^{0}$

(3) اختصر الأتي وأعط إجابتك مستخدما أسا موجبا:

(أ) $أ \times أ^{-6}$ (ب) $ب^{3} \div ب^{-5}$ (جـ) $(جـ^{2})^{3}$ (د) $(ي^{-2})^{3}$

(4) أوجد قيمة : (أ) $2^{-3} \div 2$ (ب) $\frac{3^{-3}}{3^{-8} \times 3^{5}}$ (جـ) $\frac{1}{2^{-4}}$ (د) $(\frac{1}{25})^{-\frac{3}{2}}$

القسم ب :

(5) (أ) أوجد قيمة 8^{3}.

(ب) عبر عن 32 في صورة أسية برفع الأساس 2 إليه ثم حل المعادلة $2^{ن} = 32$.

(جـ) اختصر:

(د) اختصر: $\frac{9^{ن} \times 6^{2ن+1}}{4^{ن} \times 81^{ن}}$

(6) اختصر: (أ) $و\,ع^{2} \times و^{3} \div ع^{2}$ (ب) $(م^{2})^{-6}$ (جـ) $(أ^{-2})^{-4}$

(7) حل المعادلات الأتية: (أ) $5^{2س} = 625$ (ب) $81^{2س+2} = 9$

(8) حل في ن إذا كانت: (أ) $ن^{\frac{1}{2}} = 8$ (ب) $4^{ن} = \sqrt{32}$ (جـ) $\sqrt{3^{ن}} = \frac{1}{27}$ (د) $ن^{-\frac{1}{3}} = 3$

القسم جـ :

(9) (أ) اختصر: (i) $64^{\frac{5}{6}}$ (ii) $\sqrt{36^{3}}$

(ب) اختصر: (i) $3^{0} \times 32^{\frac{1}{2}}$ (ii) اكتب ناتج 7^{-1} مقربا إجابتك لأقرب رقم عشري واحد.

(10) (أ) أوجد قيمة أ إذا كان : (i) $أ^{-3} = 8$ (ii) $أ^{4} = 625$

(ب) أوجد قيمة م إذا كان : (i) $4^{م} = \frac{1}{2^{4}}$ (ii) $4^{م} = 2^{10}$

(ب) أوجد قيمة ك إذا كان : (i) $2^{3} \times 4^{5} = 4^{ك}$ (ii) $3^{4} \div 81 = 3^{ك}$

6-2 الأعداد الغير قياسية Irrational Numbers

العدد القياسي: هو العدد الذي يمكن تقديره بالضبط. $\sqrt{4}=2$ لأن $2 \times 2 = 4$ ، $\sqrt{144} = 12$ لأن $12 \times 12 = 144$

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن. هل الأعداد $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{19}$ ... أعداد ناطقة (قياسية) بمعنى عددا مضروبا في نفسه نحصل على أحد الأعداد المذكورة، الجواب على هذا السؤال يصعب تقدير كل عدد بالضبط لأنها أعداد لا تحتوي على مربعات كاملة وفيما سبق توصلنا إلى معرفة:

$5^2 = 5 \times 5$ ، $5^3 = 5 \times 5 \times 5$ ، $5^{س} = 5 \times 5 \times 5 \times 5$ ... إلى س من العوامل.

لكل عدد صحيح موجب ن يوجد عدد س يسمى الجذر التربيعي للعدد ن.

إذا كان: $س^{ن} = أ$ $2^6 = 64$ فالعدد 2 يسمى الجذر السادس للعدد 64

$4^2 = 16$ فالعدد 4 يسمى الجذر السادس للعدد 16.

للعدد أ يرمز له بالرمز $\sqrt[ن]{أ}$ تعني أمرا بأخذ الجذر النوني والعدد يسمى دليل الجذر، تعني الجذر التربيعي

$\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt{27} = 3$ ، $\sqrt{625} = 5$ ، $3^2 = 9$ وكذلك $(-3)^2 = 9$

مثلا بالنظر إلى $\sqrt{4356}$ نجد أن :

$4356 = 6 \times 6 \times 11 \times 11 = 6^2 \times 11^2$

$\sqrt{4356} = 6 \times 11 = 66$ لما الطرفان متساويان نستخلص إلى القاعدة الأولى.

7-2 قوانين الجذور Roots Laws

1-7-2 إذا كانت أ $\geqslant 0$ ، ب $\geqslant 0$ فإن:

$$\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أب}$$

الإثبات:

$\because$ أ $\geqslant 0$ ، ب $\geqslant 0$ فإن:

$\sqrt{أ} \geqslant 0$ ، $\sqrt{ب} \geqslant 0$

$\therefore$ $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} \geqslant 0$ أولا:

$\because$ $(\sqrt{أ} \times \sqrt{ب})^2 = (\sqrt{أ} \times \sqrt{ب})(\sqrt{أ} \times \sqrt{ب})$

$= (\sqrt{أ} \times \sqrt{أ})(\sqrt{ب} \times \sqrt{ب})$

$=$ أ $\times$ ب

بأخذ $\sqrt{}$ للطرفين نحصل على : $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أب}$

مثال 1:

أوجد قيمة كل من

(أ) $\sqrt{100\,ل^2}$ (ب) $-\sqrt{49\,م^2\,ن^2}$

(جـ) $\sqrt{(-2)^2}$ (د) $\sqrt{25\,س}$

الحل :

(أ) $\sqrt{100\,ل^2} = \sqrt{100} \times \sqrt{ل^2} = 10\,ل$

(ب) $-\sqrt{49\,م^2\,ن^2} = -\sqrt{49} \times \sqrt{م^2} \times \sqrt{ن^2} = -(7\,م\,ن)$

(جـ) $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

(د) $\sqrt{25\,س} = \sqrt{25} \times \sqrt{س} = 5\sqrt{س}$

2-7-2 إذا كانت $أ \geqslant 0$ ، $ب \geqslant 0$ فإن:

$$\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$$

الإثبات يترك للطالب؟

مثال2: أوجد قيمة كل من:

(أ) $\sqrt{\frac{س^2}{9}}$ (ب) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (جـ) $\pm\frac{\sqrt{ك^4}}{10}$

الحل :

(أ) $\sqrt{\frac{س^2}{9}} = \frac{\sqrt{س^2}}{\sqrt{9}} = \frac{س}{3}$

(ب) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

(جـ) $\pm\frac{\sqrt{ك^4}}{10} = \pm\frac{ك^2}{10}$

مثال3: أوجد قيمة كل من:

(أ) $\sqrt{3^2+4^2}$ (ب) $-\sqrt{(5)^2}-(\sqrt{5})^2$

(جـ) $\sqrt{9+16}$ (د) $\pm\sqrt{5^2-3^2}$

الحل :

(أ) $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

(ب) $-\sqrt{(5)^2-(\sqrt{5})^2} = -\sqrt{25-5} = -\sqrt{5}\times\sqrt{4} = -2\sqrt{5}$

(جـ) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

(د) $\pm\sqrt{5^2-3^2} = \pm\sqrt{25-9} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

ملحوظة (3)

$\sqrt{\text{أ}+\text{ب}} \neq \sqrt{\text{أ}}+\sqrt{\text{ب}}$

لكل أ ، ب .

لاحظ المقدار المشتمل على علامة جذر يكون في أبسط صورة عندما

1- لا يوجد عدد صحيح تحت علامة الجذر له معامل مربع كامل عدا 1 .

2- لا يوجد كسر تحت علامة الجذر .

3- يكون المقام خاليا من علامة الجذر .

مثال4: ضع في أبسط صورة:

(أ) $\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}$ (ب) $3\sqrt{15}\times\sqrt{15}$

(جـ) $(3\sqrt{\text{ب}})(-4\sqrt{\text{ب}})$ (د) $\frac{2\sqrt{26}}{3\sqrt{13}}$

الحل :

(أ) $\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{6} = (\sqrt{3}\times\sqrt{2})\times\sqrt{6} = \sqrt{6}\times\sqrt{6} = 6$

(ب) $3\sqrt{15}\times\sqrt{15} = (1\times 3)(\sqrt{15}\times\sqrt{15}) = 3\times 15 = 45$

(جـ) $(3\sqrt{\text{ب}})(-4\sqrt{\text{ب}}) = (3\times -4)(\sqrt{\text{ب}}\times\sqrt{\text{ب}}) = -12\,\text{ب}$

(د) $\frac{2\sqrt{26}}{3\sqrt{13}} = \left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{26}{13}} = \left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{2}$

تمرين (2–أ)

اختصر كلا مما يأتي:

(أ) $5\sqrt{3} \times 3\sqrt{5}$ (ب) $\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{2}$

(جـ) $(2\sqrt{س})\,(-5\sqrt{ص})$ (د) $\sqrt{ع}\left(\sqrt{ع} + \frac{1}{\sqrt{ع}}\right)$

(هـ) $\frac{5\sqrt{125}}{6\sqrt{5}}$ (و) $(2-\sqrt{6})\,(2+\sqrt{6})$

(ز) $(3\sqrt{2} - 4\sqrt{3})^2$ (ح) $(\sqrt{75} - \sqrt{20})\,(5\sqrt{3} + 2\sqrt{5})$

(ط) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{6}$ (ي) $\frac{\sqrt[5]{81}}{\sqrt{9}}$

إذا أردنا أن نضع $\frac{4}{3+\sqrt{5}}$ مثلا في أبسط صورة له لا بد من التفكير في الطريقة المستخدمة لنصل إلى كسر مقامه أعدادا قياسية.

عليه ... فبضرب حدي الكسر في $3-\sqrt{5}$ نحصل على :

$$\frac{4}{3+\sqrt{5}} = \frac{4}{3+\sqrt{5}} \times \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{4(3-\sqrt{5})}{3^2 - (\sqrt{5})^2} \times \frac{4(3-\sqrt{5})}{9-5}$$

$$= \frac{4(3-\sqrt{5})}{4}$$

$= 3 - \sqrt{5}$ **حصلنا على مقام قياسي**

مثال5: ضع في أبسط صورة:

(أ) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (ب) $\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ (جـ) $\frac{1}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

الحل :

(أ) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ **نضرب في مرافق المقام**

$$= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}$$

$$= \frac{3}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})$$

(ب) $\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \times \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$

$= \frac{(5-\sqrt{5})^2}{2^2-(\sqrt{5})^2}$

$= \frac{4-4\sqrt{5}+5}{-1}$

$= 4\sqrt{5} - 9$

(جـ) $\frac{1}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$

$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{18-3}$

$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{15}$

تمرين (2-ب)

(1) ضع في أبسط صورة:

(أ) $\frac{5}{3+\sqrt{2}}$ (ب) $\frac{س - ص}{\sqrt{س}-\sqrt{ص}}$

(جـ) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$ (د) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{ب}}$

(2) إذا كانت $س = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ، $ص = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ فأوجد قيمة $س^2 + 2\,س\,ص + ص^2$

(3) إذا كانت $س = \sqrt{6} - 2$ فأثبت أن : قيمة $\frac{36}{س} - س^3 = 80$

(4) إذا كانت $أ = \frac{5}{2-\sqrt{5}}$ ، $ب = \frac{4\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ فأوجد أ ، ب في أبسط صورة

2-7-3 جمع وطرح الجذور Collect and Subtract

يشترط في عمليتي الجمع والطرح بالنسبة للجذور إذا تساويا في الدليل (دليل الجذور) والأساس بمعنى ان تكون الجذور متشابهة.

بالنظر إلى الأمثلة التالية:

1. $2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

2. $\sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{5} + 9\sqrt{2}$

3. $4\sqrt{28} + 5\sqrt{63}$

نجد أن:

(1) الأعداد بينهما عامل مشترك هو $\sqrt{3}$ فيمكن تبسيط مجموعهما

$$2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = (2 + 4 - 5)\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}$$

(2) العددان $\sqrt{5}$ ، $-4\sqrt{5}$ بينهما عامل مشترك هو $\sqrt{5}$ يمكن تبسيط مجموعهما

$$\sqrt{5}\,(1 - 4) = -3\sqrt{5}$$

وبالمثل: $2\sqrt{2} + 9\sqrt{2} = (2 + 9)\sqrt{2}$

$$= 11\sqrt{2}$$

فيصبح $\sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{5} + 9\sqrt{2} = -3\sqrt{5} + 11\sqrt{2}$

(3) $4\sqrt{28} + 5\sqrt{63} = 4\sqrt{4\times7} + 4\sqrt{6\times9}$

$$= 2\times4\sqrt{7} + 3\times5\sqrt{6}$$

$$= 8\sqrt{7} + 15\sqrt{6}$$

مثال 6:

ضع كلا مما ياتي في أبسط صورة:

(أ) $5\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 9\sqrt{7} + 11\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$

(ب) $3\sqrt{48} - 2\sqrt{27} + 2\sqrt{75} + \frac{7}{2}\sqrt{3}$

(جـ) $3\sqrt{147} - \frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{1}{72}}$

(د) $\sqrt{32} - \sqrt{8}$

الحل:

(أ) $5\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 9\sqrt{7} + 11\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$

$$= (5 + 3 - 9 + 11 - 8)\sqrt{7}$$

$$= 2\sqrt{7}$$

(ب) $3\sqrt{48} - 2\sqrt{27} + 2\sqrt{75} + \frac{7}{2}\sqrt{3}$

$$= 3\sqrt{3\times16} - 2\sqrt{3\times9} + 2\sqrt{3\times25} + \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

$$= 12\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3} + \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

$$= (12 - 6 + 10 + \frac{7}{2})\sqrt{3}$$

$$= \frac{39}{2}\sqrt{3}$$

(جـ) $3\sqrt{147} - \frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{1}{72}} = 3\sqrt{3\times49} - \frac{7}{3}\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{2\times4\times9}}$

$= 21\sqrt{3} - \frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= 21\sqrt{3} - \frac{\sqrt{7}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12}$

(د) $\sqrt{32} - \sqrt{8} = \sqrt{8\times4} - \sqrt{8}$

$= \sqrt{8} \times (\sqrt{4} - 1)$

$= \sqrt{4} \times \sqrt{2}\,(2 - 1)$

$= 2\sqrt{2}$

تمرين (2-جـ)

(1) ضع كلا مما يأتي في أبسط صورة:

(أ) $7\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{12} - 2\sqrt{45}$

(ب) $2\sqrt[3]{189} + 3\sqrt[3]{875} - 7\sqrt[3]{56}$

(جـ) $\frac{24}{\sqrt{2}} + 18\sqrt{\frac{1}{8}} - 5\sqrt{32}$

(2) احسب محيط ومساحة المستطيل الذي بعداه $(2+\sqrt{7})$ سم ، $(9-\sqrt{5})$ سم .

(3) إذا كانت س $= \sqrt{3} + 10$ ، ص $= \sqrt{3} - 10$ فأوجد قيمة $(\text{س}+\text{ص})^2$.

8-2 المعادلة المشتملة على الجذور Equations Containing roots

المعادلة المشتملة على لجدر مجهول تحت علامة الجذر تسمى معادلة جذرية وأبسط صورة لها هي :
$\sqrt{\text{س}} = 5$.

لإيجاد حلها بتربيع الطرفين:

$(\sqrt{\text{س}})^2 = (5)^2$

س $= 25$

مجموعة الحل هي: $\{25\}$ التحقق من معقولية الحل عندما س $= 25$

الطرف الأيمن $= \sqrt{25} = 5$

الطرف الأيسر =

∴ الطرفان متساويان

هناك معادلات جذرية تحتوي على أكثر من حد واحد في كل طرفيها وتشمل على جذر واحد.

مثال 6:

حل المعادلات الآتية:

(أ) $\sqrt{\text{س} - 3} = 4$

(ب) $\sqrt{\text{ن}^2 - 16} = \text{ن} - 4$

(جـ) $\sqrt{\text{ص}} - \frac{1}{2} = 2$

الحل:

(أ) $\sqrt{\text{س} - 3} = 4$ نربع الطرفين

$\left(\sqrt{\text{س} - 3}\right)^2 = (4)^2$

$(\text{س} - 3) = 16$

$\text{س} - 3 = 16$ ومنها $\text{س} = 19$ وذلك بإضافة المعكوس الجمعي للعدد 3 لطرفي المعادلة

$\therefore$ مجموعة الحل $\{19\}$ هي وعلى الطالب التحقق من الحل.

(ب) $\sqrt{\text{ن}^2 - 16} = \text{ن} - 4$ نربع الطرفين

$\text{ن}^2 - 16 = (\text{ن} - 4)^2$

$\text{ن}^2 - 16 = \text{ن}^2 - 8\,\text{ن} + 16$

$8\,\text{ن} - 16 = 16$ بإضافة المعكوس الجمعي للعدد 16 لطرفي المعادلة

$8\,\text{ن} = 32$ بالقسمة على 8

$\text{ن} = 4$ $\quad\therefore$ مجموعة الحل $\{4\}$

(جـ) $\sqrt{\text{ص}} - \frac{1}{2} = 2$ بإضافة المعكوس الجمعي للعدد $\frac{1}{2}$ لطرفي المعادلة

$\sqrt{\text{ص}} = 2 - \frac{1}{2} \quad \therefore \sqrt{\text{ص}} = \frac{5}{2}$

بتربيع الطرفين $\text{ص} = \frac{25}{4}$ $\quad\therefore$ مجموعة الحل $\left\{\frac{25}{4}\right\}$

تمرين (2-و) حل المعادلات الآتية:

(أ) $\sqrt{\text{س}} - 4 = 5$

(ب) $\sqrt{4\text{ص}} - 3 + 7 = 10$

(جـ) $\sqrt{\frac{5\text{م} + 1}{6}} = 1$

(د) $\sqrt{\text{ن}} = 2\sqrt{5}$

(هـ) $\sqrt{\text{ل}} = -\text{ل}$

9-2 اللوغاريتمات Logarithms

نعلم أن $2^3 = 8$ إذن 3 الأس الذي يرفع للعدد 2 لنحصل على العدد 8.
طريقة أخرى لصياغة هذا هي : 3 هو العدد اللوغاريتمي لـ 8 للإساس 2. ونكتب $3 = \text{لو}_2\, 8$
(بعبارة أخرى الـلوغاريتم هو الأس!)

لوغاريتم عدد ن للإساس أ يساوي القوة س التي يجب أن ترجع للإساس أ لتحصل على ن
(هنا نفرض: أ > 0 ، أ ≠ 1 ، ن > 0)

س = $\text{لو}_{\text{أ}}$ ن تسمى الصورة اللوغاريتمية ، $\text{أ}^{\text{س}}$ = ن هي الصورة الأسية

الصورة اللوغاريتمية | الأس = اللوغاريتم | الصورة الأسية

$\text{لو}_{\text{أ}}$ ن = س ⟷ ن = $\text{أ}^{\text{س}}$

مثال 1:

أوجد : (أ) $\text{لو}_3\, 81$ (ب) $\text{لو}_2 \left(\frac{1}{4}\right)$ (جـ) $\text{لو}_{10}\, 5$

الحل:

(أ) ∵ $81 = 3^4$ ∴ $\text{لو}_3\, 81 = 4$ بالتعريف

(ب) ∵ $\frac{1}{4} = 2^{-2}$ ∴ $\text{لو}_2 \left(\frac{1}{4}\right) = -2$

(جـ) استخدم الحاسبة في هذه الحالة

باستخدام 5 لو بالترتيب (أو لو 5 لبعض الحاسبات الحديثة)، فإننا
نحصل على $\text{لو}_{10}\, 5 = 0.699$

ملحوظة:
لوغاريتم عدد سالب غير معرف.

مثال 2:

إذا كان لو_3 ن = 4 ، فأوجد ن

الحل:

الصورة الأسية : ن = $3^4 = 81$

ملحوظة:
1. لو في الحاسبة تعني لو_{10} أو اللوغاريتم المعتاد .
2. لو_{10} يمكن ان تكتب لو .
3. إذا كان الأساس يختلف عن 10 يجب أنيذكر الأساس مثلا $\text{لو}_3\, 81$.

مثال 3:

إذا علم أن $\text{لو}_{\text{س}}\, 81 = 4$ ، فأوجد قيمة س

الحل:

$\text{لو}_{\text{س}}\, 81 = 4$ بالتحويل للصورة الأسية $\text{س}^4 = 81$
⇦ $\text{س}^4 = 3^4$
⇦ س = 3

تمرين 2 أ :

1) حول الآتي إلى الصورة اللوغاريتمية

أ) $3^4 = 81$ ب) $5^0 = 1$ جـ) $8 = 2$

د) ص$^{\text{س}}$ = ق

2) اكتب الآتي في الصورة الأسية

أ) لو$_{10}$ $1000 = 3$ ب) لو$_{2}$ $8 = 3$ جـ) لو$_{9}$ $27 = \frac{3}{2}$

د) لو$_{\text{أ}}$ ن = ب هـ) لو$_{3}$ أ = ن و) لو$_{\text{ص}}$ أ = س

3) أوجد قيمة س في الآتي :

أ) لو$_{10}$ س = 2 ب) لو$_{\text{س}}$ $7 = 1$ جـ) لو$_{2}$ 16 = س

د) لو$_{6}$ س = 3 هـ) لو$_{25}$ 5 = س و) لو$_{0.2}$ 0.008 = س

القانون 1 :

نفرض $\text{س} = \text{أ}^{\text{م}}$ ، إذن $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} = \text{م}$

نفرض $\text{ص} = \text{أ}^{\text{ن}}$ ، إذن $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص} = \text{ن}$

بالضرب $\text{س ص} = \text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}}$

⇦ $\text{س ص} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}$

⇦ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س ص} = \text{م} + \text{ن}$ (تعريف اللوغاريتم)

⇦ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س ص} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$

القانون 2 :

من تعريف س ، ص سابقًا ، نقسم س على ص

نجد أن $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{أ}^{\text{ن}}}$

⇦ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{أ}^{\text{م}-\text{ن}}$

⇦ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{م} - \text{ن}$ (من تعريف اللوغاريتمات)

⇦ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$

القانون 3 :

لدينا $\text{س} = \text{أ}^{\text{م}}$ برفع الطرفين بالقوة ك

⇦ $\text{س}^{\text{ك}} = (\text{أ}^{\text{م}})^{\text{ك}}$

⇦ $\text{س}^{\text{ك}} = \text{أ}^{\text{م ك}}$

⇦ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}^{\text{ك}} = \text{م ك}$ (من تعريف اللوغاريتمات)

⇦ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}^{\text{ك}} = (\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}) \times \text{ك}$

⇦ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}^{\text{ك}} = \text{ك لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$

بالمثل ، $\text{لو}_{\text{أ}}\,\sqrt[\text{ك}]{\text{س}} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}^{\frac{1}{\text{ك}}}$

باستخدام النتيجة السابقة ، نجد أن :

$\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}^{\frac{1}{\text{ك}}} = \frac{1}{\text{ك}}\,\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$

$\text{لو}_{\text{أ}}\,\sqrt[\text{ك}]{\text{س}} = \frac{1}{\text{ك}}\,\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$

بالإضافة للقوانين السابقة توجد نتائج مهمة ومفيدة للوغاريتمات

1) قيمة $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{أ}$

نفرض $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{أ} = \text{س}$

⇦ $\text{أ}^{\text{س}} = \text{أ}^{1}$ ⇦ $\text{س} = 1$

إذن $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{أ} = 1$

القانون 4 :

إذا كانت أ ، ب ، جـ أعدادا حقيقية، وكان، أ $\neq 1$ ، ب $\neq 1$

فإن: لو$_{ب}$ أ × لو$_{أ}$ جـ = لو$_{ب}$ جـ

نفرض أن: لو$_{ب}$ أ = س ، لو$_{أ}$ جـ = ص بالتحول إلى الصورة الأسية

يكون أ = ب^{س} ، جـ = أ^{ص} وبتعويض قيمة أ ينتج أن: جـ = (ب^{س})^{ص} = ب$^{س ص}$

وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية:

لو$_{ب}$ جـ = س ص = لو$_{ب}$ أ × لو$_{أ}$ جـ

مثال 4 :

اختصر لو$_3$ 2 + لو$_3$ 5 + لو$_3$ 20 - لو$_3$ 25

الحل:

لو$_3$ 2 + لو$_3$ 5 + لو$_3$ 20 - لو$_3$ 25

= لو$_3$ $\left(\frac{2\times5\times20}{25}\right)$

= لو$_3$ $\left(\frac{200}{25}\right)$

= لو$_3$ 8

= لو$_3$ 2^3

= 3 لو$_3$ 2

مثال 5 :

اختصر لو 3^3 + لو 30 - لو 3^2 (حيث لم يذكر الأساس ، من المفروض أن الأساس هو نفسه لجميع الحدود)

الحل:

لو 3^3 + لو 30 - لو 3^2

= 3 لو 3 + لو 30 - 2 لو 3

= لو 3 + لو 30

= لو (3 × 30) = لو 90

مثال 6 :

اختصر لو$_2$ 16 - لو$_2$ 8 + لو$_2$ 4

الحل:

= لو$_2$ $\left(\frac{16\times 4}{8}\right)$

= لو$_2$ 8

= لو$_2$ 2^3

= 3 لو$_2$ 2 = 3

مثال 7 : حل المعادلات الآتية:

(أ) 2 لو 3 + لو 2 س = لو (3 س + 1)

(ب) 2 لو 5 + لو (س + 1) = 1 + لو (2 س + 7)

(ج) لو$_3$ (س + 6) - لو$_3$ (س − 2) = 2

(أ) $\text{لو } 3^2 + \text{لو } 2\text{س} = \text{لو } (3\text{س} + 1)$

$\Leftarrow \text{لو } 9(2\text{س}) = \text{لو } (3\text{س} + 1)$

$\Leftarrow 18\text{س} = 3\text{س} + 1$

$\Leftarrow 15\text{س} = 1$

$\Leftarrow \text{س} = \frac{1}{15}$

(ب) $\text{لو } 5^2 + \text{لو } (\text{س} + 1) - \text{لو } (2\text{س} + 7) = 1$

$\Leftarrow \text{لو } \frac{25(\text{س} + 1)}{2\text{س} + 7} = \text{لو } 10$

$\Leftarrow \frac{25(\text{س} + 1)}{2\text{س} + 7} = 10 \Leftarrow 25\text{س} + 25 = 20\text{س} + 70$

$\Leftarrow 5\text{س} = 45 \Leftarrow \text{س} = 9$

(جـ) $\text{لو}_3 \frac{\text{س} + 6}{\text{س} - 2} = 2$

$\Leftarrow \frac{\text{س} + 6}{\text{س} - 2} = 3^2 = 9$

$\Leftarrow \text{س} + 6 = 9(\text{س} - 2)$

$\Leftarrow 8\text{س} = 24$

$\Leftarrow \text{س} = \frac{24}{8} = 3$

مثال 8 :

احسب قيمة $\text{لو}_2 9 \times \text{لو}_3 2$

الحل:

$\text{لو}_2 9 \times \text{لو}_3 2 = \text{لو}_3 9$ (احسب قانون 4)

$= \text{لو}_3 3^2$

$= 2 \text{ لو}_3 3$

$= 2 \times 1$

$= 2$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية : The Exponential Logarithmic Equation

- تسمى كل معادلة تتضمن مقدارا أسيا أو أكثر معادلة أسية.
- وتسمى كل معادلة تتضمن مقدارا لوغاريتميا أو أكثر معادلة لوغاريتمية.

مثال 9:

حل المعادلة الأتية : $5^{-2س} = 625$

الحل:

$5^{-2س} = 5^{4}$ (الأساس واحد)

$\therefore$ $-2س = 4$ وبالتالي $س = -2$

مثال 10:

حل المعادلة الأسية : $4^{س} - 17 \times 2^{س} + 16 = 0$

الحل:

لاحظ أن: $4^{س} = (2^2)^{س} = (2^{س})^2$

افرض أن $ص = 2^{س}$ فيكون:

$ص^2 - 17ص + 16 = 0$

ومنه $(ص - 16)(ص - 1) = 0$

إما $ص - 16 = 0 \Leftarrow ص = 16$

$\therefore$ $2^{س} = 16 = 2^4$ $\therefore$ $س = 4$

أو $ص - 1 = 0 \Leftarrow ص = 1$

$\therefore$ $2^{س} = 1 \Leftarrow 2^{س} = 2^0$ $\therefore$ $س = 0$

$\therefore$ قيم س التي تحقق المعادلة هي : $4 ، 0$

مثال 11:

حل المعادلة الأتية : $2^{س} = 7^{س}$

الحل:

$2^{س} = 7^{س}$ بالقسمة على $7^{س}$ في كل الطرفين نحصل على

$(\frac{2}{7})^{س} = 1 \Leftarrow (\frac{2}{7})^{س} = (\frac{2}{7})^0$

$\therefore$ $س = 0$

مثال 12:

حل المعادلة : لو س − لو(س - 2) = 2

الحل:

لو س − لو(س - 2) = 2

$لو(\frac{س}{س-2}) = 2$

$\frac{س}{س-2} = 10^2$

$\frac{س}{س-2} = 100$

س = 100 س- 200

99 س = 200

$س = \frac{200}{99}$

مثال 13: حل المعادلة الآتية : $4^{5-3ن} = (2)^{7+ن}$

الحل:

لاحظ أنه يصعب حل هذه المعادلة باستعمال قوانين الأسس لتعذر توحيد الأساسات في الطرفين وعليه

بأخذ لو للطرفين:

(5-3ن) لو 4 = (7+ن) لو 2 ⇐ 2(5-3ن) لو 2 = (7+ن)لو 2

بالتبسيط نحصل على: $ن = \frac{3}{7}$

مثال 14: حل المعادلة الآتية : $2^{س} = 0.25$

الحل:

$2^{س} = \frac{1}{4}$ $\left(0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}\right)$

$2^{س} = 2^{-2}$ ∴ س = -2 (بمساواة الأسين)

لاحظ الدوال الأسية التي على صورة $ن^{س}$=ب يمكن التعبير عن ب بدلالة قوة ن وإذا لم يكن في الإمكان التعبير عن ب كقوة لـ ن فإنه يمكن حل المعادلة الأسية بأخذ اللوغاريتم المعتاد للطرفين كما هو بالمثال التالي:

مثال 15: حل المعادلة الآتية : $3^{س} = 4$

الحل:

بأخذ اللوغاريتم المعتاد للطرفين

∴ س لو 3 = لو 4 ∴ $س = \frac{لو 4}{لو 3}$

$س = \frac{0206.0}{1774.0} = 1.26$ (مقربًا لثلاثة أرقام معنوية)

تمرين 2 ب:

1) أوجد قيمة:

أ) $لو_{3}\ 81$ ب) $لو_{9}\ 3$ جـ) $لو_{10}\ 1000$

د) $لو_{2}\ 1024$ هـ) $لو_{0.7}\ 1$ و) $لو_{4}\ \frac{1}{46}$

ز) $لو_{7}\ \sqrt{7}$ ح) $لو_{10}\ 0.01$ ط) $لو_{2}\ 8^{\frac{5}{3}}$

ي) $لو_{6}\ (\frac{1}{612})^{\frac{2}{3}}$ ك) $لو_{\frac{1}{3}}\ 27$ ل) $لو_{2}\ 8 + لو_{2}\ 32$

م) $لو_{7}\ 343 - لو_{7}\ 49$ ن) $لو_{5}\ 20 + لو_{5}\ 15 - لو_{5}\ 12$

س) $لو_{3}\ \frac{15}{2} + لو_{3}\ \frac{5}{6} + لو_{3}\ \frac{36}{25}$

2) عبر عن الآتي في صورة لوغاريتمات فريدة

أ) $لو_{10}\ \sqrt{أ} - لو_{10}\ \sqrt{ب}$ ب) $2\ لو_{10}\ أ + 2\ لو_{10}\ ب - لو_{10}\ جـ$

جـ) $2\ لو_{10}\ \frac{4}{5} - 3\ لو_{10}\ \frac{2}{3}$ د) $لو_{10}\ \frac{20}{13} - لو_{10}\ \frac{3}{65} - 2$

هـ) $2\ لو_{10}\ أ - لو_{10}\ أ\ ب^{2} + 2\ لو_{10}\ ب$ و) $لو_{10}\ 10س + \frac{1}{2} لو_{10}\ س - 1$

3) حل المعادلات الآتية . أفرض أن جميع اللوغاريتمات لها نفس الأساس حيثما لم يحدد

أ) $لو\ (3س - 1) - لو\ (2 + س) = لو\ 2$ ب) $لو\ (س - 4) + 2\ لو\ 3 = لو\ \frac{س}{2}$

جـ) $3\ لو\ (1 - س) = لو\ 8$ د) $3^{2س - 5} = 7^{س - 1}$

تمرين 2 جـ:

1) إذا كان $لو_{2}\ 3 = 1.585$ ، $لو_{2}\ 5 = 2.322$ ، فاحسب الآتي :

أ) $لو_{2}\ 15$ ب) $لو_{2}\ 6$ جـ) $لو_{2}\ 20$

د) $لو_{2}\ 45$ هـ) $لو_{2}\ 1\frac{2}{3}$ و) $لو_{2}\ \sqrt{5}$

ز) $لو_{2}\ \frac{1}{3}$ ح) $لو_{2}\ 0.3$

2) أوجد قيمة $10^{س}$ عندما

أ) $س = لو_{10}\ 5$ ب) $س = لو_{10}\ (لو\ 5)$.

الملخص:

1) قوانين الأسس

أ) $أ^م \times أ^ن = أ^{م+ن}$

ب) $\frac{أ^م}{أ^ن} = أ^{م-ن}$ ، $أ \neq 0$

جـ) $(أ^م)^ن = أ^{من}$

د) $(أب)^ن = أ^ن ب^ن$

هـ) $(\frac{أ}{ب})^ن = \frac{أ^ن}{ب^ن}$ ، $ب \neq 0$

و) $أ^0 = 1$ ($أ \neq 0$)

ز) $أ^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{أ})^م$ أو $\sqrt[ن]{أ^م}$

ح) $أ^{-م} = \frac{1}{أ^م}$

2) الأعداد غير القياسية

أ) $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أب}$ ، $أ \geqslant 0$ ، $ب \geqslant 0$

ب) $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$ ، $أ \geqslant 0$ ، $ب > 0$

جـ) $\sqrt{أ+ب} \neq \sqrt{أ} + \sqrt{ب}$

3) اللوغاريتمات

إذا كان $ن = أ^س$ ، ($أ > 0$) صورة أسية

إذن ، $لو_أ ن = س$ صورة لوغاريتمية .

4) قوانين اللوغاريتمات

أ) $لو_أ س ص = لو_أ س + لو_أ ص$

ب) $لو_أ \frac{س}{ص} = لو_أ س - لو_أ ص$

جـ) $لو_أ (س)^ن = ن لو_أ س$

د) $لو_أ \sqrt[ن]{س} = \frac{1}{ن} لو_أ س$

هـ) $لو_أ أ = 1$

و) $لو_أ 1 = 0$

5) الدوال اللوغاريتمية

أ) اللوغاريتم المعتاد : $لو_{10} س$ يكتب أيضًا بالصورة Log: .

ب) اللوغاريتم الطبيعي : $لو_هـ س$ يكتب أيضًا بالصورة Ln .

جـ) لكي يتواجد $لو_أ س$ ، حيث $أ > 0$، يجب أن يكون س موجبًا

د) الثابت الأسي هـ = 2.718.

هـ) إذا علم أن $ن^س = ب$ ، إذا لم يكن ممكنا التعبير عن ب كقوة للعدد ن ، خذ اللوغاريتم المعتاد للطرفين لحل المعادلة في س ، إذا كانت ن = هـ استخدم اللوغاريتم الطبيعي.

6) الدوال الأسية : $أ^س > 0$ لجميع قيم س الحقيقية.

ورقة المراجعة (3):

(1) أوجد قيمة: $لو_م \frac{41}{35} + لو_م 70 - لو_م \frac{41}{2} - 2\ لو_م 5$

(2) إذا كان $لو_م 2 = س$ ، $لو_م 3 = ص$ ، فأوجد لوغاريتم كل مما يأتي للأساس م .

أ) $4\frac{1}{2}$ ب) 24 جـ) $\frac{9م^2}{8}$

(3) حل المعادلة: $لو_{10} 5ع - لو_{10} (2ع-3) = 1$

(4) إذا كان $ص = 5^{س-1}$ فاوجد .

أ) قيمة ص عندما س=0 ب) قيمة س عندما ص= 1

(5) إذا كان $لو_{10} 4 + 2\ لو_{10} ق = 2$ ، فاحسب قيمة ق .

(6) إذا كان: $لو_م 3 = س$ ، $لو_م 5 = ص$ ، فأوجد لوغاريتم كل مما يأتي للأساس م .

أ) $3\frac{2}{3}$ ب) 75 جـ) $\frac{5م^2}{27}$

(7) حل المعادلة: $2\ لو\ 3 + لو\ 2\ س - لو\ (3س+1) = 0$

(8) حل المعادلات الآتية:

أ) $6^{س+1} = 3^{س}$ ب) $هـ^{س-1} = 4$ جـ) $4^{س} = 3^{س-5}$

د) $2^{س} = 3$ هـ) $هـ^{س} = 2$ و) $3^{س-1} = 5$

ز) $5^{س+1} = 6$ ح) $12^{1-س} = 8^{س}$ ط) $هـ^{س+1} = 6$

(9) حل المعادلات الآتية:

أ) $2^{س} = 512$ ب) $(0.01)^{س-3} = 1000$ جـ) $81^{س} = 27^{3س-5}$

د) $4^{س+1} = 2^{س-1}$ هـ) $2^{س+4} = 32$ و) $9^{س}(2^{س}) = 6$

(10) إذا كان $ص = 4\ هـ^{-2س}$ فأوجد:

أ) قيمة ص عندما س=0 ب) قيمة س عندما ص= 18

(11) (أ) إذا كان $لو_3 م = ق$ عبر عن الآتي بدلالة ق :

(1) $لو_3 م^3$ (2) $لو_3 \frac{1}{م}$

ب) حل المعادلة: $لو_م 16 = 8$

(12) حل المعادلات الآتية:

أ) $2^{س} = 3^{س-2}$ ب) $5^{س} = 2^{س+3}$

أ) لو $س^2 = (\text{لو } س)^2$ ب) $2^{2-3س} = 16$

(13) (1) اختصر كلا مما يأتي:

أ) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{11}} + \frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}$ ب) $(م^{\frac{1}{4}} + ن^{\frac{1}{4}})(م^{\frac{1}{4}} - ن^{\frac{1}{4}})$

أ) $(ع^{ن} + ع^{م})(ع^{-ن} - ع^{-م})$ ب) $\frac{(ن)^{-3} \times (ن)^{-2} \times (ن)^{4}}{(ن)^{-2}}$

(2) احسب قيمة: لو$_5$ 9 × 2 لو$_3$ 25

(14) حل المعادلات الآتية:

أ) لو $(س - 2)$ + لو $(2س - 3)$ = 2 لو س

أ) لو $س^2 = (\text{لو } س)^2$

أ) $3^{س} = 5^{س+1}$

(15) أوجد قيمة:

(أ) $2\sqrt{7}(\sqrt{7} - \sqrt{\frac{1}{7}})$ (ب) $\sqrt[3]{ص} \times \sqrt[3]{ص} \times \sqrt[3]{ص}$

(أ) $24\sqrt{\frac{1}{2}} - 18\sqrt{\frac{1}{8}} - 5\sqrt{32}$ (ب) $(\sqrt{س}+\sqrt{ص})(\sqrt{س}-\sqrt{ص})$

3

الباب الثالث

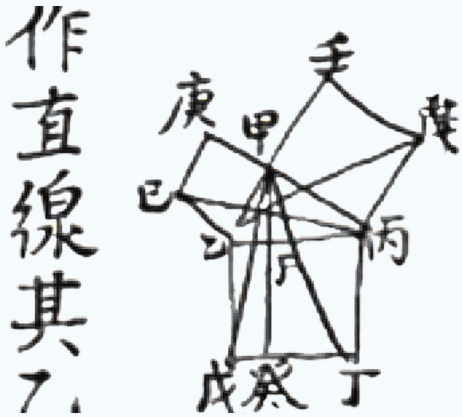
نظرية فيثاغورث وحساب المثلثات

Pythagoras Theorem and Trigonometry

نظرية فيثاغورث وحساب المثلثات

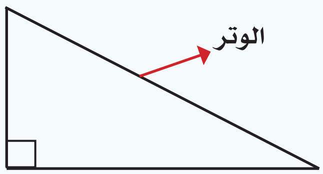
Pythagoras Theorem and Trigonometry

وُلد عالم الرياضيات اليوناني الشهير فيثاغورث في عام 540 قبل الميلاد تقريباً ، ولقد اشتهر بنظريته المتعلقة بالمثلث قائم الزاوية من أن البابليين سبقوه في التوصل إلي تلك النظرية إلا أن فيثاغورث عُرِف بأنه أول من أثبتها. ولقد عَرف الصينيون تلك النظرية في نفس الوقت تقريباً.



وقبل دراسة النظرية سوف نلتفت إلي حقيقة مهمة حول المثلث القائم.

المثلث قائم الزاوية هو المثلث الذي إحدى زواياه تساوي 90^0 بمعنى أن فيه ضلعين متعامدين. وأطول ضلع في المثلث يقابل الزاوية القائمة ويسمى الوتر.



مثلث قائم الزاوية

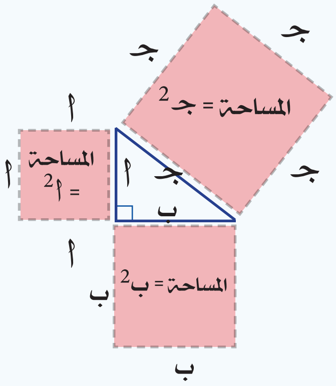
في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادراً على:

- استخدم نظرية فيثاغورث في إيجاد طول أحد أضلاع المثلث القائم.
- استخدام نظرية فيثاغورث في حل المسائل.
- استخدام النسب المثلثية(جا ،جتا ،ظا) لإيجاد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلث قائم الزاوية.
- حل مشكلات تتضمن المثلثات قائمة الزاوية نابعة من حياتنا اليومية.
- حل مشكلات تتضمن زوايا الارتفاع والانخفاض.

3-1 نظرية فيثاغورث Pythagoras Theorem

تنص نظرية فيثاغورث على أنه:

في أي مثلث قائم الزاوية ، مساحة المربع المنشأ على الوتر تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين.



وهذا يعنى أن: جـ^2 = أ^2 + ب^2 حيث،

جـ طول الوتر ، أ و ب طولا الضلعين الآخرين.

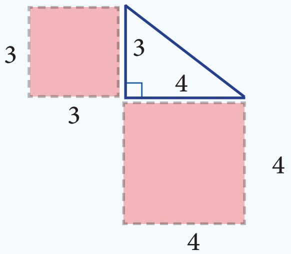
ملحوظة: يجب قياس أطوال الأضلاع أ ، ب ، جـ بنفس وحدات الطول.

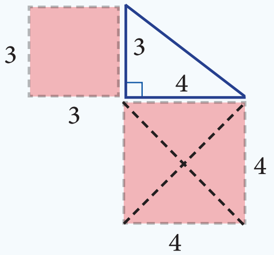
نشاط: للتحقق من نظرية فيثاغورث نفذ النشاط التالي:

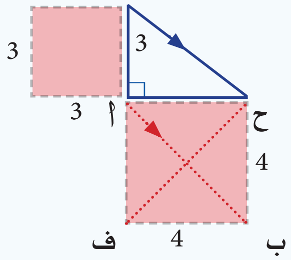
مثلث قائم الزاوية. فيه ضلعان متعامدان طولهما وليكن 3 وحدات ، 4 وحدات كما هو مرسوم.

ادخل على شبكة الانترنت لاستقصاء العلاقة بين اطوال أضلاع المثلث القائم.

ارسم مربعاً أمام كل ضلع من الضلعين المتعامدين.

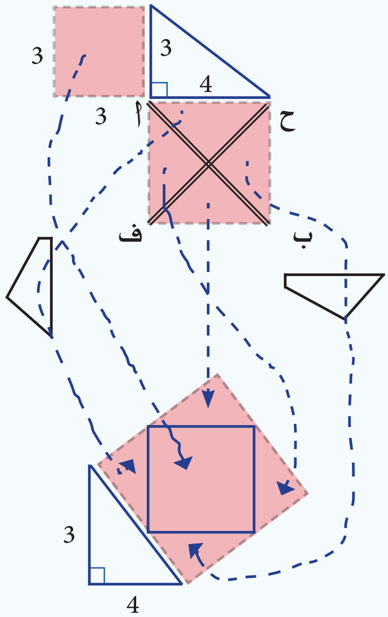






أ ب رُسم بحيث يوازي الوتر.
ح ف رُسم عمودياً على الوتر.
أ ب ،ح ف يتقاطعا في حـ .

ابحث على شبكة الانترنت لإيجاد طرق أخرى تثبت نظرية فيثاغورث.



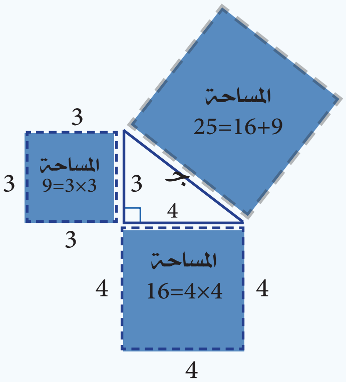
قُطع المربع الأكبر إلى أربع قطع بطول أ ب ، ح ف.
المربع الأصغر يلصق على بطاقة.

تُرتب القطع الخمس لتكون مربعاً أمام الوتر كما هو موضح بالشكل.

شكل (3-1)

يمكن بيان نفس النتيجة لأي مثلث قائم من أي مساحة . فضلاً عن ذلك تمكننا هذه النظرية من إيجاد طول الوتر في المثلث المعطى في الشكل . (3 -1). ليكن طول الوتر جـ . عليه تكون مساحة المربع المنشأ على الوتر = جـ × جـ = جـ^2
لأن مساحة المربع المنشأ على الوتر $9 + 16 = 25$ شكل (3-2)
أي أن: جـ^2 $= 25$
∴ جـ $= \sqrt{25} = 5$

ملحوظة: جـ×جـ $= 5\times5$
تحذف وحدات القياس في هذه الحالة

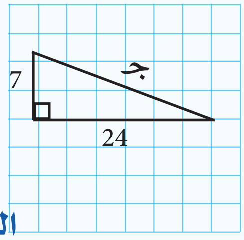


ولهذا فإن المثلث القائم الذي فيه ضلعي القائمة 3 ، 4 وحدات طول وتره يساوي 5 وحدات.

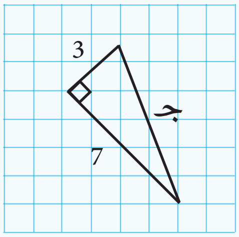
مثال 1:

أوجد طول الوتر في المثلثات قائمة الزاوية الآتية:

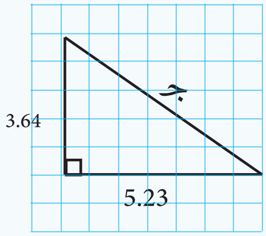
(أ)



(ب)



(جـ)



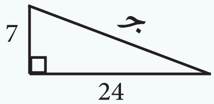
الحل:

(أ) ليكن طول الوتر = جـ وحدة طول.

باستخدام نظرية فيثاغورث.

جـ^2 = أ^2 + ب^2 ، عندما أ = 7 ، ب = 24

أي أن: جـ^2 = $7^2 + 24^2 = 625$

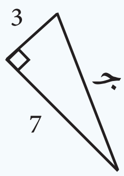


∴ جـ = $\sqrt{625} = 25$

∴ طول الوتر = 25 وحدة طول.

(ب) ليكن طول الوتر = جـ وحدة طول.

باستخدام نظرية فيثاغورث.



جـ^2 = أ^2 + ب^2 ، عندما أ = 3 ، ب = 7

أي أن: جـ^2 = $3^2 + 7^2 = 58$

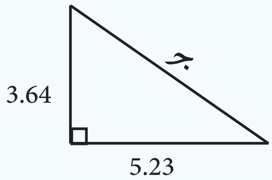
∴ جـ = $\sqrt{58} = 7.62$ لأقرب 3 أرقام معنوية

∴ طول الوتر = 7.62 وحدة طول.

ملحوظة:

صحح الإجابة لثلاثة أرقام معنوية. رغم ظهور أعداد أكثر على الآلة الحاسبة.

(جـ) ليكن طول الوتر = جـ وحدة طول.



باستخدام نظرية فيثاغورث.

جـ^2 = $(3.64)^2 + (5.23)^2 = 40.6025$

∴ جـ = $\sqrt{40.6025} = 6.37$ لأقرب 3 أرقام معنوية

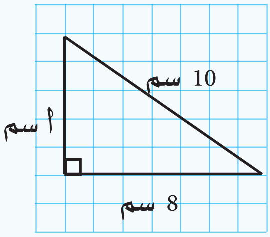
∴ طول الوتر = 6.37 وحدة طول.

إن لم تحدد درجة الضبط والأحكام في السؤال ، وإن لم تكن الإجابة تامة ، أعط إجابتك مقرباً لأقرب ثلاثة أرقام معنوية. ولكن لا تقرب الأرقام خلال الخطوات (أي لا تقرب أثناء إجراء الخطوات واجعل التقريب في النهاية).

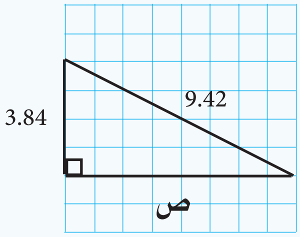
مثال 2:

اوجد الطول المجهول والمشار إليه في المثلثات القائمة التالية ، أعط إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام معنوية إن لم يكن الناتج صحيحاً.

(أ)



(ب)



ملحوظة:

ابدأ بالصيغة الرياضية

$أ^2 + ب^2 = جـ^2$

الحل:

(ب) باستخدام نظرية فيثاغورث.

$$(3.84)^2 + ص^2 = (9.42)^2$$

$$\therefore\ ص^2 = (9.42)^2 - (3.84)^2$$

$$= 73.9908$$

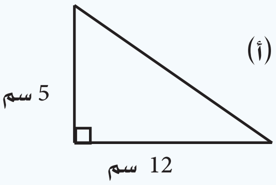
$$\therefore\ ص = \sqrt{73.9908} = 8.60$$

لأقرب 3 أرقام معنوية

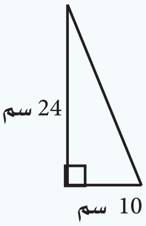
تمرين 3 أ:

1- أوجد طول الوتر في كل من المثلثات القائمة التالية:

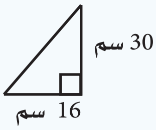
(أ)



(ب)

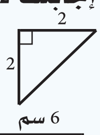


(جـ)

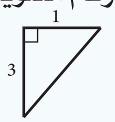


2- أوجد طول الوتر في كل من المثلثات القائمة التالية مقرباً إجابتك لأقرب ثلاثة ارقام معنوية.

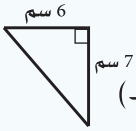
(أ)



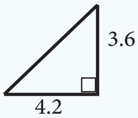
(ب)



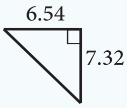
(جـ)



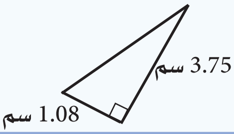
(د)



(هـ)

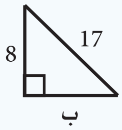


(و)

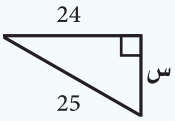


3- أوجد الطول المجهول والمشار إليه في المثلثات القائمة التالية.

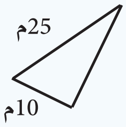
(أ)



(ب)

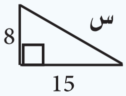


(جـ)

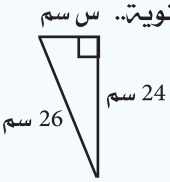


4- أوجد قيمة س في كل من المثلثات القائمة التالية مقرباً إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام معنوية..

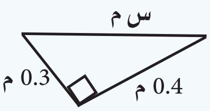
(أ)



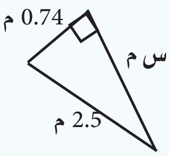
(ب)



(جـ)



(د)



(هـ)

(و)

5 -يشير الجدول التالي إلي بعض أطوال أضلاع المثلثات القائمة، أكمل الجدول معتبراً الوتر جـ /.

	أ	ب	جـ
أ	3	4	5
ب	5	12	
جـ	7		25
د		15	17
هـ		10	41
و	12		37
ز	21	20	

5.4.3 تسمى ثلاثة فيثاغورث لأنها تحقق نظرية فيثاغورث ،وتوجد سبع ثلاثيات لفيثاغورث في الجدول على اليمين، الأثنين الأول منها هما الأكثر شيوعا ،مُضاعفات ثلاثية فيثاغورث تحقق أضا ًنظرية فيثاغورث على سبيل المثال 6 ، 8 ، 10 مضاعفات للأرقام 3، 4 ،5 ويلاحظ أن:

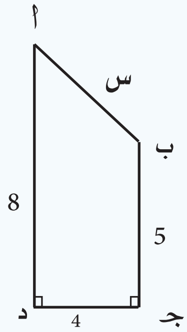
$$(6)^2 + (8)^2 = (10)^2$$

ومن ثم فإن 6 ، 8 ، 10 تعتبر ثلاثية فيثاغورث أيضاً.

ابحث على شبكة الإنترنت للحصول على المواقع التي تعطيك معلومات حول ثلاثية فيثاغورث.

Pythagoreacan Triples

2-3 تطبيقات نظرية فيثاغورث Applications of Pythagoras Theorem



تبين الأمثلة التالية كيفية تطبيق نظرية فيثاغورث.

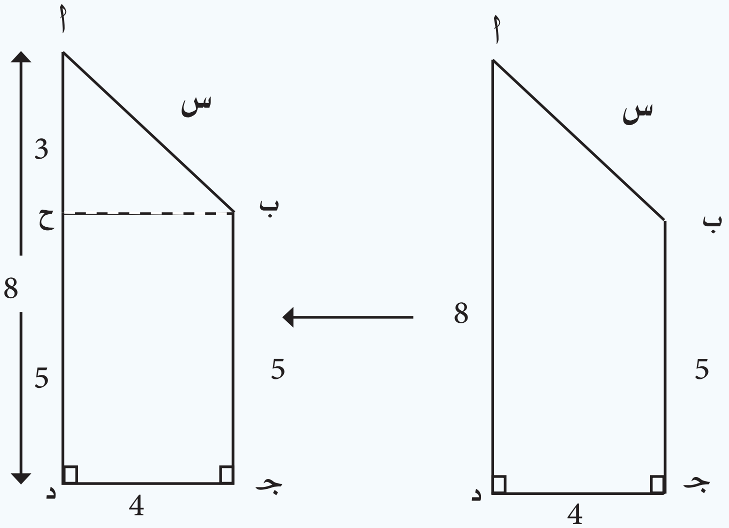
مثال 3 :

أوجد قيمة س في الشكل الموجود على اليمين.

الحل:

لاستخدام نظرية فيثاغورث يجب ان يكون لدينا $\triangle$ قائم الزاوية.

ملحوظة:
ارسم عموداً من ب على أد.

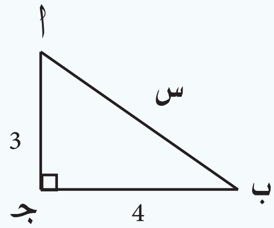


الآن في المثلث أ ب ح قائم الزاوية.

$س^2 = 3^2 + 4^2$ (نظرية فيثاغورث)

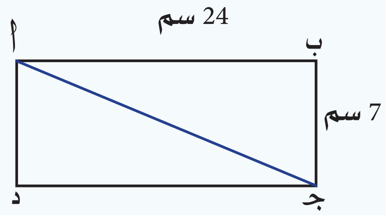
$= 9 + 16 = 25$

$س = \sqrt{25} = 25$



مثال 4 :

أوجد طول القطر في المستطيل الذي طوله 24 سم وعرضه 7سم



الحل:

أ جـ قطر المستطيل أ ب جـ.

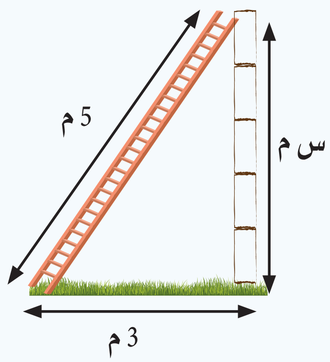
$(أجـ)^2 = (24)^2 + 7^2$ (نظرية فيثاغورث)

$= 576 + 49 = 625$

$أجـ = \sqrt{625} = 25$سم

مثال 5 :

سلم طوله 5 م يستند إلي حائط ، فإذا كانت قاعدة السلم تبعد 3 م عن قاعدة الحائط فما هو الارتفاع الذي يبلغه السلم من الحائط؟



الحل:

الشكل المعطى يمكن إعادة رسمه ببساطة كما يلي:

$س^2 + 3^2 = 5^2$ (نظرية فيثاغورث)

$س^2 + 9 = 25$

$س^2 = 25 - 9$

$س^2 = 16$

$س = \sqrt{16} = 4$ م

يمكن للسلم الوصول إلي ارتفاع 4 أمتار مستنداً على الحائط.

مثال 6 :

دائرة مركزها و ، طول نصف قطرها 7 سم . رُسم الوتر أ ب = 10 سم.

أوجد المسافة العمودية من و إلي أ ب مقرباً إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

الحل:

ليكن و م عمودي من و على أ ب، م نقطة انتصاف أ ب ، المثلث و أ ب متساوي الساقين.

$\therefore$ أ م $= \frac{10}{2} = 5$ سم

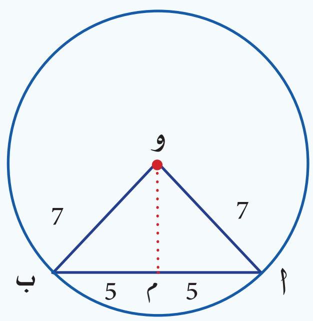
الآن $(وم)^2 + 5^2 = 7^2$ (نظرية فيثاغورث)

$\therefore (وم)^2 + 25 = 49$

$\therefore (وم)^2 = 49 - 25 = 24$

$\therefore (وم)^2 = \sqrt{24} = 4.90$ سم (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

طول العمود المرسوم من و إلي أ ب 4.90 سم.



مثال 7 :

مخروط دائري قائم ارتفاعه 12 سم ، طول حرفه المائل 13 سم احسب طول نصف قطر قاعدته.

الحل:

ليكن طول نصف قطر قاعدة المخروط = نق سم

$\therefore$ نق$^2 + (12)^2 = (13)^2$ (نظرية فيثاغورث)

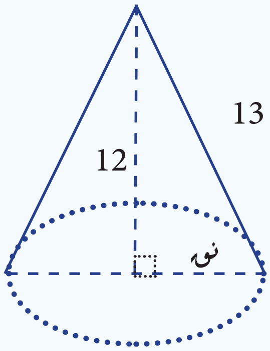
أي نق$^2 + 144 = 169$

نق$^2 = 169 - 144$

نق$^2 = 25$

نق = $\sqrt{25} = 5$ سم

طول نصف قطرها قاعدة المخروط 5 سم.



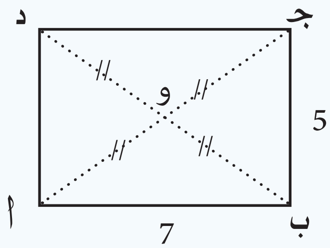
ملحوظة:

توضح الأمثلة رقم 8 ، 7 تطبيق نظرية فيثاغورث على الأشكال ثلاثيو الأبعاد.

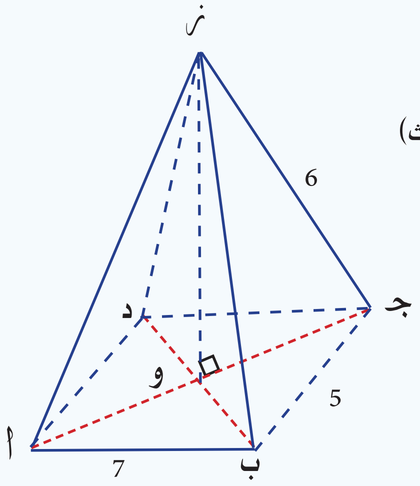
مثال 8 :

أوجد طول أ جـ ، ز و في الهرم القائم المستطيل الأبعاد كلها بالسنتيمترات.

أعط إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.



الحل:



القاعدة ا ب جـ د مستطيل

$\therefore$ (أ جـ)$^2 = 7^2 + 5^2$ (نظرية فيثاغورث)

$\therefore \; = 49 + 25 = 74$

$\therefore$ أ جـ = $\sqrt{74} = 8.602$ سم

(لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

الآن و جـ = $\frac{\text{أ جـ}}{2} = \frac{8.602}{2}$

= 4.301 سم

المثلث ز و جـ قائم الزاوية.

$\therefore$ (وجـ)^2 + (ز و)^2 = (ز جـ)^2 (نظرية فيثاغورث)

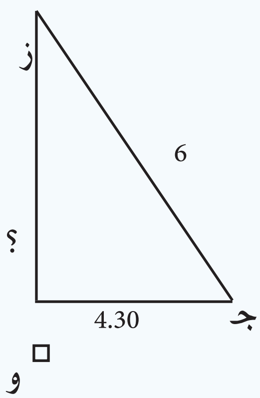
(ز و)$^2 + (4.301)^2 = 6^2$

$\therefore$ (وجـ)$^2 = 36 - (4.301)^2 = 17.50$

ز و = $\sqrt{17.50} = 4.18$ سم (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

ملحوظة:

تعامل مع أربعة أعداد وقرب الإجابة إلى أقرب ثلاثة أعداد معنوية

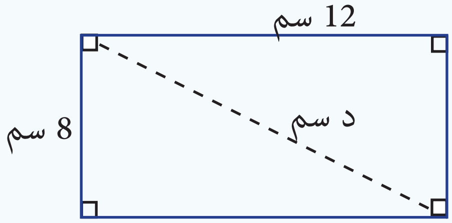


تمرين 3 ب

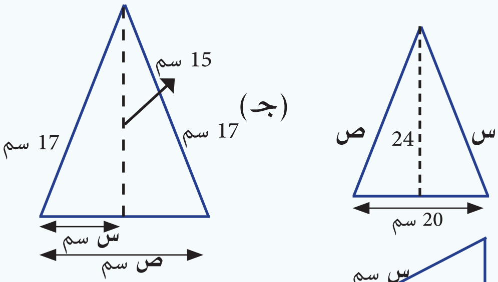
الأسئلة التي عليها العلامة (❖) أسئلة اختيارية:

1 – أوجد الطول المجهول والمشار إليه في الأشكال الآتية.
قرب الناتج لأقرب ثلاثة أرقام معنوية إن لم يكن الرقم صحيحاً.

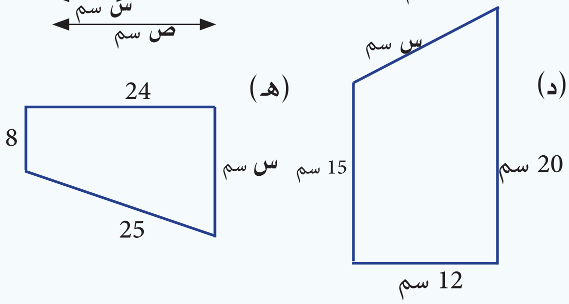
(أ)



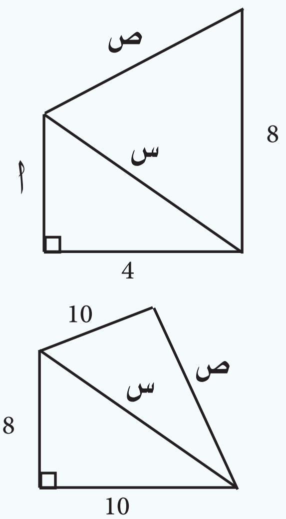
(ب) (جـ)

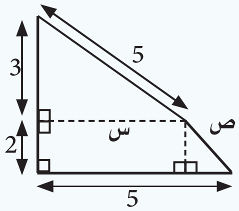


(د) (هـ)

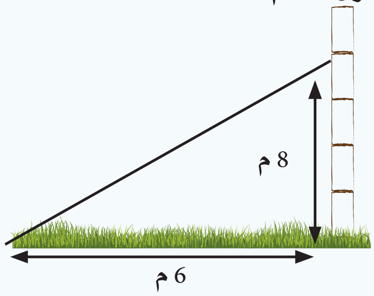


2 – في كل من الأشكال التالية. أوجد قيمة س، ثم أوجد قيمة ص.
(أ)(ب)(جـ)

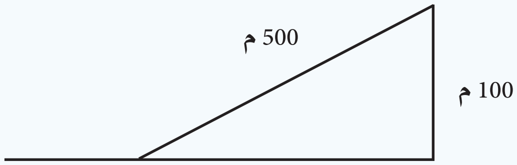




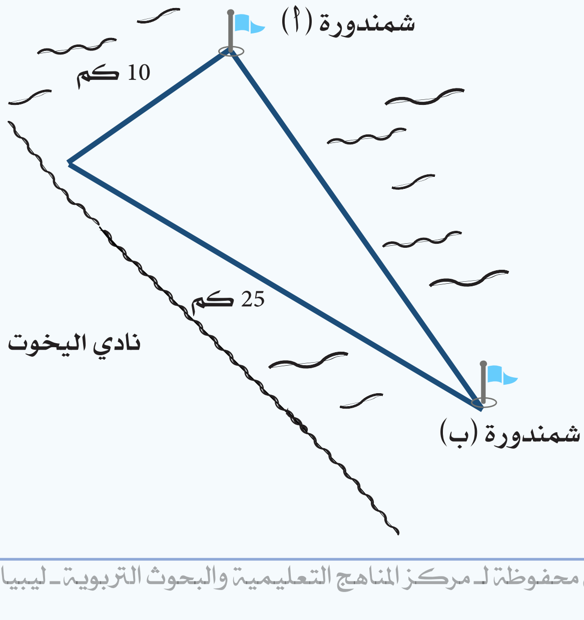
3 – يرتكز سلم على حائط رأسي ، فإذا كانت قمة السلم ترتفع عن الأرض 8 م وتبعد قاعدته عن قاعدة الحائط 6 م. أوجد طول السلم.



4 – سار رجل مسافة 500 متر معتلياً جانباً في تل . فإذا كانت المسافة العمودية للتل 100 متر ، أوجد المسافة الآفقية التي سارها الرجل.



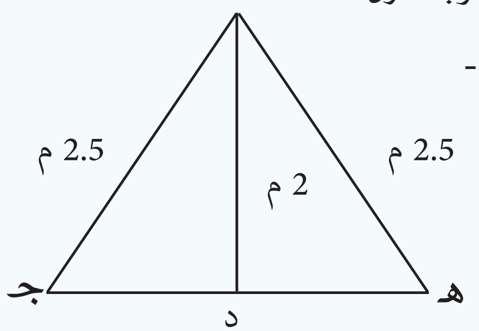
5 – استلزم المضمار في مسابقة اليخوت إيجار اليخت في شكل مثلثي كما هو موضح بالشكل. فإذا كانت المسافة من نادي اليخت إلي الشمندورة (أ) = 10كم والمسافة من النادي إلي الشمندورتين (ب)= 25 كم.
(أ) أجد المسافة بين الشمندورتين أ ، ب.
(ب) عندئذ أوجد الطول الكلي لمضمار مسابقة اليخوت.



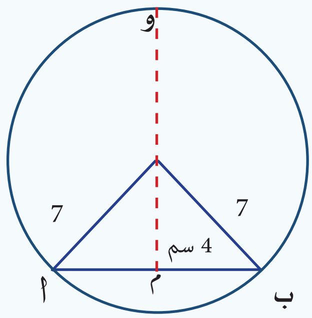
6 - ثبت ساري خيمة ت د ، عمودياً بواسطة حبلين ت جـ ، ت هـ إلي الأرض فإذا كان طول كل من الحبلين 2.5 متر وكان طول الساري 2 متر.

(أ) أوجد طول د هـ..

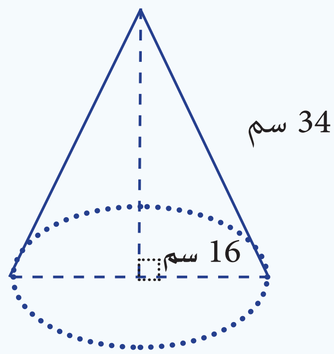
(ب) ثم أوجد طول جـ هـ



7 - أ ب و وتر في دائرة مركزها) و (وطول نصف قطرها 7 سم ، فإذا كان طول العمود و م من و إلي أ ب يساوي 4سم ، احسب طول أ ب مقرباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.



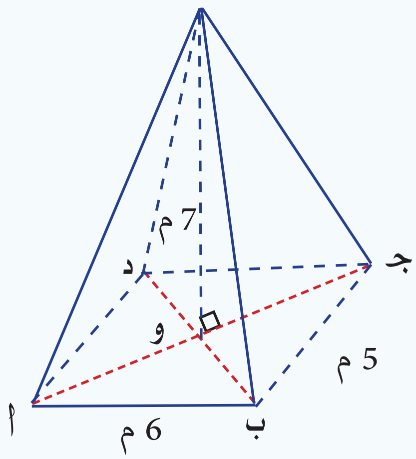
*8 -مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته16 سم وطول حرفه المائل 34 سم ، أحسب ارتفاعه.



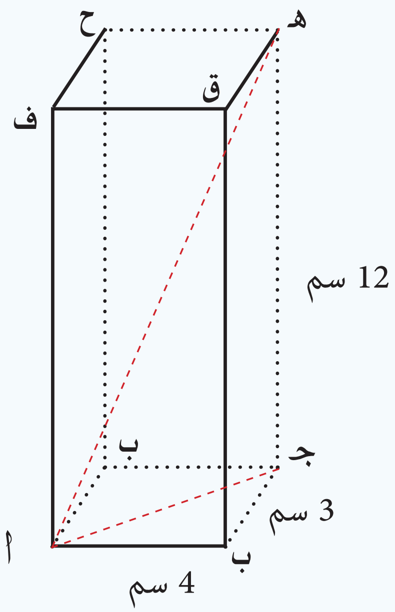
*9- هرم قائم قاعدته مستطيلة الشكل طولها 6 أمتار وعرضها 5 أمتار. فإذا كان ارتفاع الهرم ز و يساوي 7مم ، احسب لأقرب 3 أرقام معنوية.

(أ) طول وجـ

(ب) طول الحرف المائل زجـ.



*10- أوجد طول أ جـ ، أ هـ في متوازي السطح المستطيلة المبين.



3-3 عكس نظرية فيثاغورث

إذا كانت مساحة المربع المنشأ على احد أضلاع مثلث تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأئين على الضلعين الآخرين كانت الزاوية المكونة من هذين الضلعين قائمة.

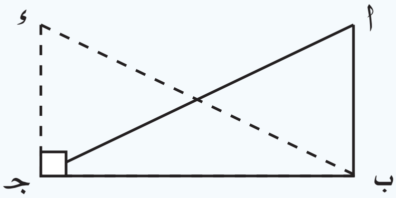
المعطيات: أ ب جـ فيه ا ب + ب جـ = أ جـ

المطلوب: إثبات أن أ ب جـ = قائمة

العمل: نقيم على ب جـ العمود جـ د = ب أ

ثن نصل د ب

البرهان: ∵ د جـ ب قائم في جـ



∴ د ب = د جـ + ب جـ

∵ أ ب = د جـ (عملا)

∴ د ب = أ ب + ب جـ ----→ (1)

∵ أ ح = أ ب + ب جـ ------→ (2)

من(1)، (2)

∴ أ جـ = د ب

Δ Δ أ ب جـ ، د جـ ب فيهما

أ ب = د جـ (عملاً)

بجـ (مشترك)

أ جـ = د ب (إثباتاً)

طابق Δ Δ وينتج أن ∡ أ ب جـ = ∡ د جـ ب = قائمة.

ملحوظة:

للتحقق من Δ قائم الزاوية نوجد مربع الضلع الأكبر، ومجموع مربعي الضلعين الأخرين في حالة الناتجان متساويين فالمثلث قائم الزاوية.

مثال 9 :

بين أي المثلثات الآتية قائم الزاوية إذا كانت أطوال الاضلاعها هي:

(أ) 6 ، 8 ، 10 (ب) 5 ، 7 ، 9 (جـ) 24 ، 10 ، 26

الحل:

(أ) 6 ، 8 ، 10

$= 6^2 + 8^2 = 36 + 64$

$= 100$

$= (10)^2$

∴ Δ الذي أضلاعه 6 ، 8 ، 10 قائم الزاوية.

(ب) 5 ، 7 ، 9

$= 5^2 + 7^2 = 25 + 49$

$= 74$

$\neq (9)^2$

∴ Δ الذي أضلاعه 5 ، 7 ، 9 غير قائم الزاوية.

(جـ) 24 ، 10 ، 26

$= 24^2 + 10^2 = 576 + 100$

$= 676$

$= (26)^2$

∴ Δ الذي أضلاعه 24 ، 10 ، 26 قائم الزاوية.

مثال 10 :

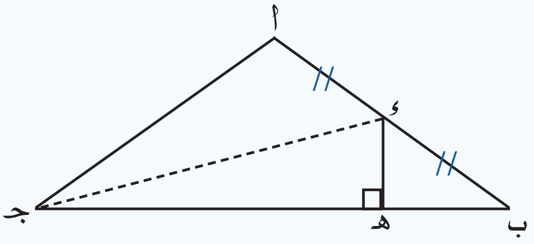
أ ب جـ مثلث ، نصف أ ب في و ، أُنزل و هـ ⊥ ب جـ فإذا كان:

$\overline{\text{أجـ}}^2 = \overline{\text{هـ جـ}}^2 - \overline{\text{هـ ب}}^2$ فإثبت أن ∠ أ قائمة

الحل:

المعطيات: أ ب جـ مثلث ، و منتصف أب ، و هـ ⊥ ب جـ أب = هـ جـ - هـ ب

المطلوب: إثبات أن: ∠ 90^0 = أ



أب = هـ جـ - هـ ب

= (جـ و - و هـ) - (ب و - و هـ)

= جـ و - و هـ - ب و + و هـ

= جـ و - ب و (أ و = و ب)

أ جـ = جـ و - أ و

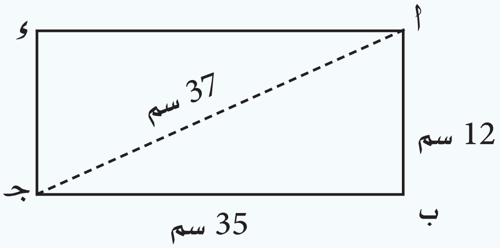
جـ و = أ جـ + أ و

∴ ∠ أ قائمة

مثال 11 :

أ ب جـ و متوازي أضلاع فيه أ ب = 12 سم ، ب جـ = 35 سم ، أ جـ= 37 سم اثبت انه مستطيل.

الحل:



$\overline{\text{أب}}^2 + \overline{\text{ب جـ}}^2 = (12)^2 + (35)^2 = 1369$ سم^2

$\overline{\text{أجـ}}^2 = (37)^2 = 1369$ سم^2

∠ أ ب جـ = 90^0 (عكس نظرية فيثاغورث)

أ ب // جـ و ، أ و // ب جـ

كل زاوية من زوايا الشكل أ ب جـ و قائمة.

أ ب جـ و مستطيل.

تمرين 3 جـ

(1) بين أي △△△ الآتية قائم الزاوية إذا كانت أطوال أضلاعها:

(أ) 18 ، 15 ، 8 (ب) 16 ، 12 ، 20 (جـ) 5 ، 4 ، 3

(2) أ ب جـ مثلث انزل أ هـ عموداً على ب جـ وكان أ جـ = 15 سم ، أ هـ = 12 سم

$\overline{\text{أب}}^2 = 160$ سم^2 ثم نصف أ هـ في و فأثبت أن: ∠ ب و جـ قائمة. (يترك للطالب)

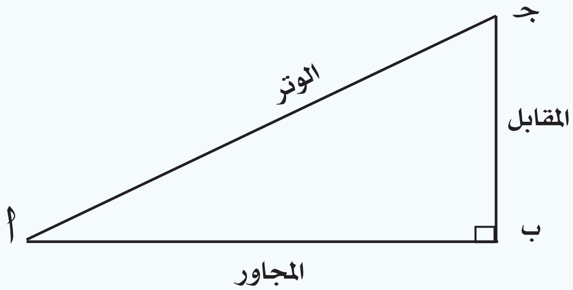
4-3 مقدمة لحساب المثلثات Introduction to Trigonometry

أشْتُقَت كلمة الحساب المثلثات "Trigonometry" من الأصل اليوناني لكلمتي " مثلث" و " قياس" وتعنى بذلك هذه الكلمة دراسة قياس المثلثات ، أو حساب المثلثات ، ولقد مكنت هذه الدراسة للمثلثات البابليين الذين عاشوا منذ أكثر من 3000 سنة مضت من تطبيق بعض القواعد الأساسية المتعلقة بأضلاع وزاويا المثلث في مجال الدراسات المسحية ،وعلم الفلك ،والملاحة ،وأسس الأغريق هذه العلاقات في صورة نسب حوالي 150 سنة قبل الميلاد.

وسوف ندرس في هذا الفصل ثلاث نسب خاصة تسمى الجيب ، وجيب التمام والظل ، تعرف عموماً بإسم النسب المثلثية ، عند تطبيق هذه النسب على المثلث القائم تربط أطوال الأضلاع بقياسات الزاويا.

نحتاج إلي معرفة أسماء أضلاع أي مثلث قائم الزاوية قبل دراسة أي من النسب المثلثية ، لقد تعلمنا أن الضلع المقابل للزاوية القائمة في المثلث قائم الزاوية يسمى الوتر.

ملحوظة: الضلع المجاور دائما عمودي مع الضلع المقابل في المثلث قائم الزاوية.

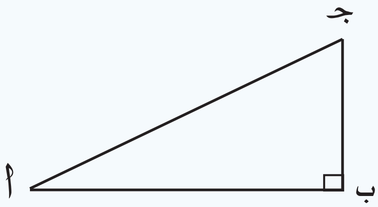


(شكل 3-3)

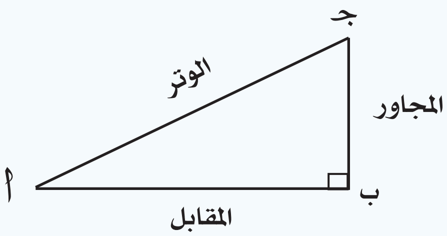
أما الضلعان الآخران فيسميان طبقاً لوضع الزاوية القائمة (موضحة بالشكل3-3)الضلع اب الذي يجاوز الزاوية (أ) يسمى مجاور الزاوية. ورغم أن الضلع أ جـ يجاوز الزاوية أ إلا أننا لا نسميه ضلعاً مجاوراً. لأن له اسماً خاصاً. ويسمى وتراً. أما الضلع الأخر ب جـ المقابل للزاوية أ. يسمى الضلع المقابل للزاوية أ.

مثال:12

حدد في المثلث المرسوم كلاًّ من الضلع المقابل والمجاور ،والوتر للزاوية جـ.



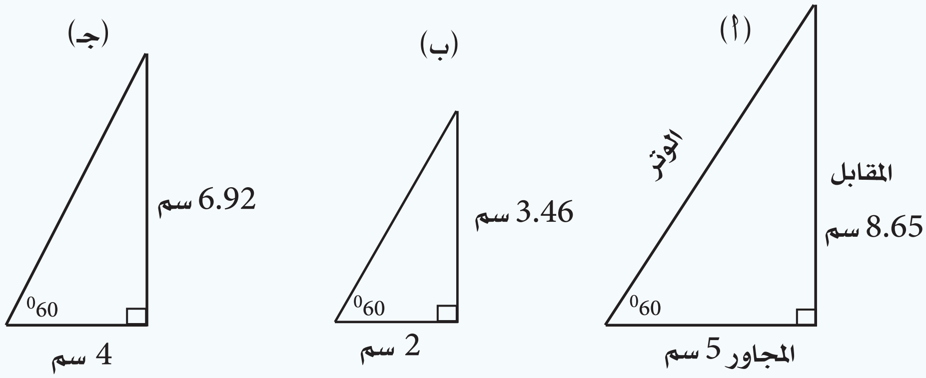
الحل:



ملحوظة:

إن وتر المثلث قائم الزاوية هو أكبر الأضلاع طولاً وهو يقابل الزاوية القائمة والضلع المجاور يجاور جـ ويكون عمودياً على الضلع المقابل.

3-5 نسبة الظل (التماس) ظا Tangent Ratio



شكل 3-4

ملحوظة:
هذه النسبة الثابتة دائماً تساوي ظا.

هذه المثلثات الثلاثة ليست مرسومة بمقاييس نسبية إلا أنها متشابهة. والمثلثات الثلاثة لها زوايا 90^0 ، 60^0 ، 30^0 وكما رأينا في الجزء (3-2) الضلع المقابل للزاوية القائمة يسمى الوتر. والضلع الثاني للزاوية 60^0. يسمى المجاور للزاوية 60 ، أما الضلع الضلع الثالث فيسمى المقابل للزاوية 60^0.

بالنسبة للزاوية 60^0 لاحظ أنه من

شكل (3-4) (أ) = $\dfrac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}} = \dfrac{8.65}{5} = 1.73$

شكل (3-4) (ب) = $\dfrac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}} = \dfrac{3.46}{2} = 1.73$

شكل (3-4) (حـ) = $\dfrac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}} = \dfrac{6.92}{4} = 1.73$

أي أن: $\dfrac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } 60^0}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } 60^0} = 1.73$

ينطبق ذلك على أي مثلث به الزاويا 90^0 ، 60^0 ، 30^0 ، تسمى هذه النسبة الثابتة ظل الزاوية 60^0

ظل الزاوية = $\dfrac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}$

وتختصر ظا أ = $\dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

وتكتب ظا $60^0 = 1.73$ (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

سوف تجد مفتاحاً على آلتك الحاسبة عنوانه tan أي ظا.

اضغط من اليسار $\boxed{0}\ \boxed{6}\ \boxed{\tan}$ وستجد الناتج على الشاشة 1.73205....

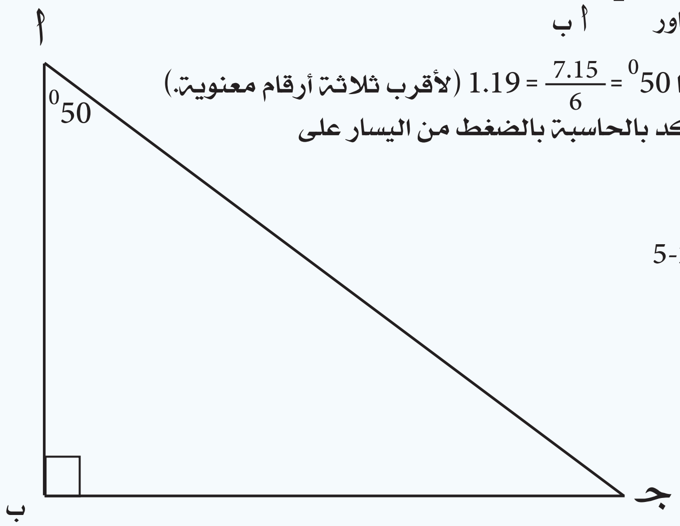
يمكننا إيجاد النسبة (ظا) لأي زاوية معطاة بالدرجات بتغيير أولاً نظام الحاسبة إلى DEG.

المثلث في الشكل (5-2) له زاوية 50^0 وبواسطة القياس نجد أن أ ب = 6 سم ، ب جـ = 7.15 سم.

$$\text{ظا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$$

بمعنى أن ظا $50^0 = \frac{7.15}{6} = 1.19$ (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.)

ويمكن التأكد بالحاسبة بالضغط من اليسار على



شكل 5-2

مثال 13 :

(أ) ارسم المثلث أ ب جـ الذي فيه أ ب = 7 سم، أ = 35^0 ، ب = 90^0

(ب) أوجد بالقياس بدقة طول الضلع ب حـ .

(جـ) أوجد ظا 35^0 لأقرب ثلاثة أرقام معنوية عن طريق قسمة $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$

(د) راجع إجابتك مستخدماً الحاسبة.

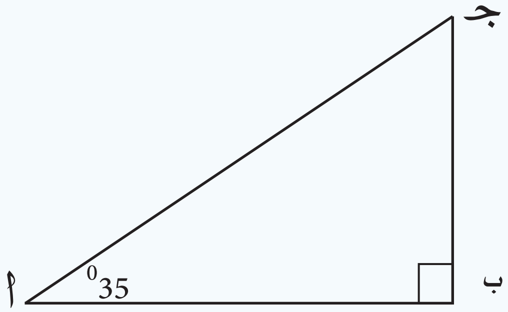
ملحوظة:

(تنطبق هذه الملحوظة على الفصل كله).

عندما نستخدم الآلة الحاسبة المحصول على النسب المثلثية جا ، جتا ، ظا، فإن خطوات الضغط على المفاتيح تعتمد على نوع الآلة . يمكن الضغط على المفتاح EXE بدلا من = ف بعض الآلات الحاسبة.

الحل:

(أ) ارسم المثلث أ ب جـ الذي فيه أ ب = 7 سم، ب = 90^0 ، $\measuredangle$ أ = 35^0



(ب) بالقياس نجد أن: ب جـ = 4.9 سم

(جـ) $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{4.9}{7} = 0.700$ (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

(د) اضغط من اليسار = $\boxed{5}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\tan}$

هذا يعطى 0.700 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

مثال 14 :

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد ظا 70^0 لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

الحل:

لإيجاد قيمة ظا 70^0 اضغط المفاتيح على آلتك الحاسبة كما يلي:

المفتاح	الناتج
tan	tan 0
7	tan 7
0	tan 70
=	2.7474774

ظا 70^0 = 2.75 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

ملحوظة:
ابدا بضبط الحاسبة في نظام DEGأولاً.

يمكنك الضغط على EXE بدلاً من = في بعض الآلات الحاسبة.

مثال 15 :

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد الزاوية س لأقرب رقم عشري واحد إذا كان ظا س = 0.36

الحل :

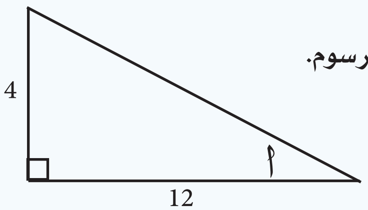
لإيجاد قيمة س اضغط المفاتيح على الآلة الحاسبة بالترتيب التالي :

مفتاح	الناتج
2nd F	0
	$\tan^{-1}$ 0
0	$\tan^{-1}$ 0
.	$\tan^{-1}$ 0
3	$\tan^{-1}$ 0.3
6	$\tan^{-1}$ 0.36
=	19.798876

س = 19.8^0 (لأقرب رقم عشري واحد)

ملحوظة:
$\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$
تؤدي نفس الوظيفة
اضغط $\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\text{tan}}$
لإيجاد الزاوية من خلال نسبة الظل ودائما تُقرب الزاويا لأقرب رقم عشري واحد.

مثال 16 : أوجد قيمة ∠ أ في الشكل المرسوم.



الحل:

ظا أ = $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

أ = 18.4^0 (لأقرب رقم عشري واحد)

ملحوظة:
$\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\text{Tan}}$ $\boxed{(}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

3-5-1 تغير الظل عندما تزداد الزاوية من 0^0 إلي 90^0 نفرض محورين متعامدين و س ، و ص ثم نركز في و ، نرسم ربع دائرة نصف قطرها أ يساوي الوحدة ونفرض مستقيماً و ن طوله الوحدة أيضاً بدأ يدور في الأتجاه الموجب من الوضع الأساسي و س إلي الوضع النهائي و ص.

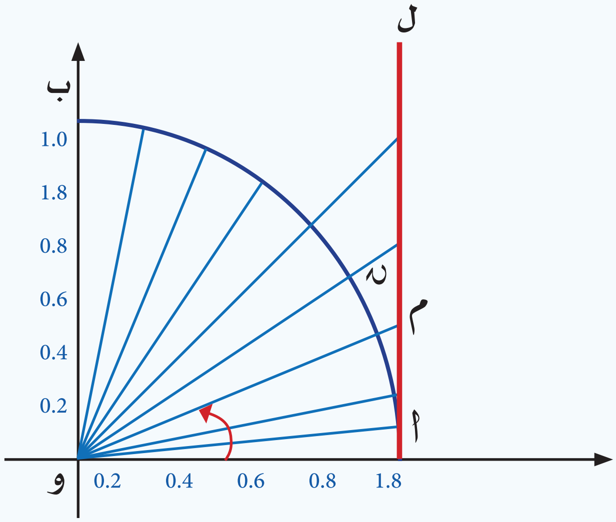
فإذا فرضنا أن و ں أحد أوضاع المستقيم الدائري رسمنا بذلك الزاوية أ و ں = جـ

رسمنا من نقطة ا مماساُ للدائرة ليلاقي امتداد و ن في م

∵ المماس العمودي على نصف القطر و أ

∴ ظا جـ = $\frac{أم}{و أ} = \frac{أم}{1} =$ أ م

وعلى ذلك فإن طول الجزء المقطوع من المماس المرسوم من أ بالمستقيم الدائري يدل على قيمة ظا جـ.



ومن الشكل نلاحظ ما يأتي:

(1) إذا كانت جـ = 0^0 كان مستقيم الدائرة و ں منطبقاً على و أ وكان أ م = 0.

ظا $0^0 = 0$

(2) إذا كانت حـ = 45^0 كان المثلث و أ ل قائم الزاوية ومتساوي الساقين وكان ظا جـ = أ ل = و أ = ل 1

ظا $45^0 = 1$

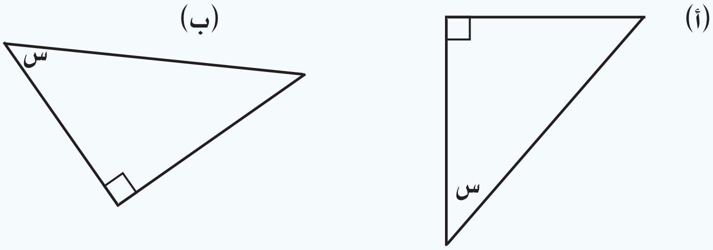
(3) إذا زادت حـ على 45^0 زاد الظل عن الواحد الصحيح.

(4) كلما اقتربنا حـ من 90^0 زاد الظل زيادة كبيرة.

(5) إذا كانت جـ = 90^0 انطبق مستقيم الدائرة و ں على و ص وأصبح موازياً للمماس المرسوم من أ ويصبح الجزء المقطوع من المماس كبيراً لا نهائياً ويكون ظا 90^0 يساوي ما لا نهاية.

تمرين 3 د

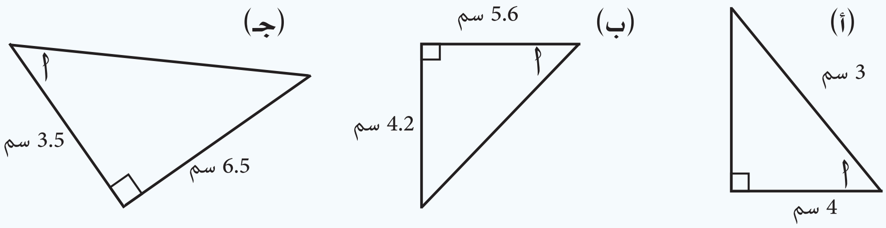
1 – ارسم كلاً من المثلثات الآتية قائمة الزاوية واكتب بيانات المقابل، والمجاور،والوتر للزاوية س.



2 – بالنسبة للمثلثات الآتية :
(i) ارسم المثلث بدقة .
(ii) قس ب حـ .
(iii) احسب ظا أ لأقرب رقمين عشريين .
(iv) تأكد من إجابتك باستخدام مفتاح tan على آلتك الحاسبة مقرباً لاقرب ثلاثة ارقام عشرية.

	أ ب	∠ أ	∠ ب
أ	10 سم	20°	90°
ب	8 سم	30°	90°
جـ	6 سم	40°	90°
د	8 سم	50°	90°
هـ	5 سم	63°	90°
و	3 سم	69°	90°

3 – بالنسبة للمثلثات الآتية أوجد ظا أ مقرباً إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام معنوية إن لم يكن الناتج صحيحاً .



4 – استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربا إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام معنوية إن لم يكن الناتج صحيحاً .

(أ) ظا 40° (ب) ظا 23° (جـ) ظا 35°

(د) ظا 85.1° (هـ) ظا 12.6° (و) ظا 0°

5 – استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد قياس الزاوية (أ) في كل مما يأتي مقربا إجابتك لأقرب رقم عشري واحد ما لم تكن الإجابة صحيحة.

(أ) ظا أ = 12 (ب) ظا أ = 4.2 (جـ) ظا أ = 0.0012

(د) ظا أ = 0 (هـ) ظا أ = 4.371 (و) ظا أ = 200

6–3 نسبة الجيب (جا) Sine Ratio

تعتبر نسبة الظل مفيدة عند التعامل مع أقصر ضلعين في المثلث القائم ، ولكنها لا تساعد في حل المشكلات المتضمنة الوتر والضلع المقابل، ولتلك المسائل نستخدم نسبة الجيب والتي تعطى بما يلي :

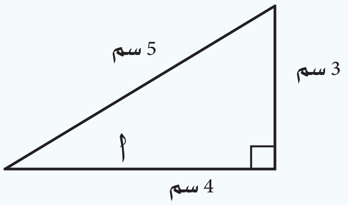
جيب الزاوية = $\frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$ ، أي أن جا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

ملحوظة : جيب الزاوية عادة ما تختصر إلي كلمة (جا).

المفاتيح الآتية من اليسار إلي اليمين (أو أو) تستخدم مع مفتاح في حالة الجيب ، تماماً كما في حالة في البند (3-4).

مثال 17 :

بالنسبة للمثلث المعطى أوجد جا أ



الحل :

جا أ = $\frac{3}{5}$ = 0.6

مثال 18 :

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد جا 70^0 لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

الحل :

جا 70^0 = 0.940 (لأقرب ثلاثة أرقام عشرية)

ملحوظة:

$\boxed{\text{Sin}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$

مثال 19 :

مستخدما الآلة الحاسبة اوجد زاوية س مقربا لأقرب رقم عشري إذا كان: جا س = 0.753 .

الحل :

جا س = 0.753 .

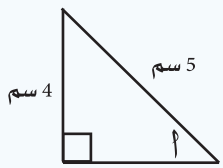
س = 48.9 (لأقرب رقم عشري)

ملحوظة :

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Sin}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{.}$ $\boxed{7}$ $\boxed{5}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

مثال 20 :

أوجد قيمة الزاوية أ في المثلث المعطى



الحل :

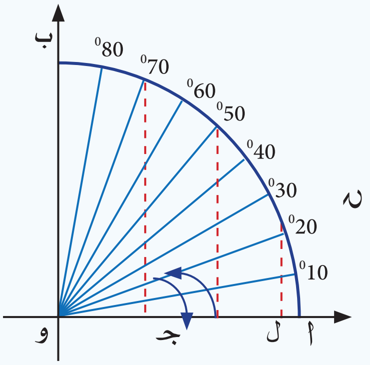
جا أ = $\frac{4}{5}$

أ = 15.5^0 (لأقرب رقم عشري)

ملحوظة :

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Sin}}$ $\boxed{(}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

3-6-1 تغير الجيب عندما تزداد الزاوية من 0 إلى 90^0 ،



من الشكل الذي أمامك والاستعانة بما ورد في (3-5-1) نجد أن :

جا حـ = $\frac{ل ن}{و ن}$ = $\frac{ل ن}{1}$ = ل ن

وعلى ذلك فإن طول ل ن يمثل قيمة جا جـ

ومن الشكل نلاحظ ما يأتي :

(1) إذا كانت جـ = 0^0 كان المستقيم و ن منطبقاً على و أ وكان ل ن = 0.

$\therefore$ جا $0^0 = 0$

(2) عندما تزداد الزاوية حـ من 0 إلى 90^0 يزداد الجيب ، وذلك لازدياد ل ن .

(3) إذا كانت حـ = 90 أنطبق المستقيم و ن على و ب ، وأصبح ل ن متساوياً نصف القطر و ب أي يساوي الوحدة.

$\therefore$ جا $90^0 = 0$

ملحوظة : عندما تزداد الزاوية جـ من 0^0 إلى 90^0 يزداد الجيب من 0 إلى 1 .

تمرين 3 هـ

1 - في كل من المثلثات الآتية:

(i) ارسم المثلث بدقة.

(ii) قس طول ب ح

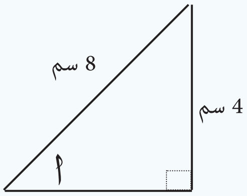
(iii) احسب جيب الزاوية أ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

(iv) تأكد من إجابتك باستخدام مفتاح على آلتك الحاسبة مقرباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

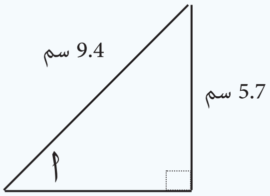
	أ ب	$\measuredangle$ أ	$\measuredangle$ ب
أ	10 سم	20^0	90^0
ب	5 سم	30^0	90^0
جـ	3 سم	50^0	90^0

2 - بالنسبة للمثلثات الآتية: أوجد جا أ مقرباً إجابتك لأقرب 3 أرقام معنوية إن لم تكن صحيحة.

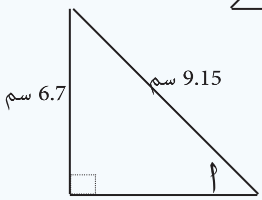
(أ)



(ب)



(جـ)



3 - استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد زاوية ا في كل مما يأتي مقرباُ إجابتك لأقرب رقم عشري واحد.

(أ) جا أ = 0.3 (ب) جا أ = 0.78 (جـ) جا أ = 0.456

(د) جا أ = 0.01 (هـ) جا أ = 1

4 - استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

(أ) جا 40^0 (ب) جا 50^0 (جـ) جا 60^0 (د) جا 70^0

ماذا تلاحظ عن قيمة جيب الزاوية كلما كبرت الزاوية.

7-3 نسبة جيب التمام Cosine Ratio

تستخدم نسبة جيب التمام في حل المشكلات التي تتضمن الوتر والضلع المجاور. وجيب تمام الزاوية تعطى بالعلاقة الآتية.

نسبة جيب تمام الزاوية = $\dfrac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$

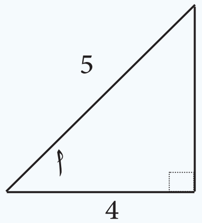
أو بإختصار جتا أ = $\dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

وللحصول عليها من الحاسبة نضغط المفتاحين INV (أو SHIFT) مع المفتاح Cos كما في حالة الظل أو الجيب في البندين (3-5) (3-6).

ملحوظة:
عادة ما نختصر جيب التمام إلي كلمة (جتا).

مثال 21 :

بالنسبة للمثلث المعطى . أوجد جتا أ



الحل :

جتا أ = $\dfrac{4}{5}$ = 0.8

مثال 22 :

استخدم حاسبة الجيب لإيجاد جتا 70^0 مقرباً لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

الحل :

جتا 70^0 = 0.342 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

ملحوظة :
Cos 7 0 =

مثال 23 :

استخدم حاسبة الجيب لإيجاد س مقرباً لأقرب رقم عشري واحد.

جتا س = 0.135

الحل:

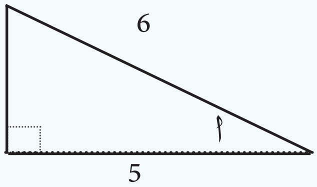
جتا س = 0.135

س = 82.2^0 (لأقرب رقم عشري واحد).

ملحوظة :
2nd Cos 0 . 1 3 5 =

مثال 24 :

أوجد الزاوية ا الموضحة في المثلث.



الحل :

جتا أ =$\dfrac{5}{6}$

أ = 33.6^0 (لأقرب رقم عشري واحد).

ملحوظة :
2nd Cos (5 ÷ 6 =) =

3-7-1 تغير جيب التمام عندما تزداد الزاوية من 0^0 إلي 90^0 بالمثل وبالرجوع إلي (3-6-1) نلاحظ أن:

$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{و ل}}{\text{ون}} = \frac{\text{و ل}}{1} = \text{و ل}$$

وعلى ذلك فإن طول و ل يمثل قيمة جتا جـ، ومن الشكل نلاحظ ما يأتي:

(1) إذا كانت حـ = 0 كان المستقيم الدائر و ن منطبقاً على و أ وكان و ل = و أ = 1.

$\therefore$ جتا $0^0 = 0$

(2) عندما تزداد الزاوية حـ من 0^0 إلي 90^0 يتناقص جيب التمام ، وذلك لتناقص طول و ل .

(3) إذا كانت حـ 90^0 إنطبق المستقيم الدائر ون على و ن على و ب ، أصبح و ل مساوياً صفراً.

$\therefore$ جتا $90^0 = 0$

ملحوظة:

1 – عندما تكون $\hat{\text{س}} = \hat{\text{ص}}$ فإن جا س = جا ص، جتاس = جتاص ، وكذلك ظا س = ظا ص بحيث إن $\hat{\text{س}}$ ، $\hat{\text{ص}}$ حادتان.

2 – عندما تكون $\hat{\text{س}} \neq \hat{\text{ص}}$ فإن جا س$\neq$جا ص ، جتا س$\neq$جتاص ، ظا س$\neq$ظا ص .

3 -جيب الزاوية ثابت مهما كان طول كل من المقابل والوتر ، وكذلك لبقية النسب المثلثية الأخرى.

تمرين 3 و

1 – بالنسبة للمثلثات الآتية:

(i) ارسم المثلث بدقة.

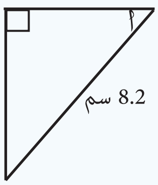
(ii)قس طول أ جـ.

(iii) احسب جتا الزاوية أ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

(iv) راجع إجابتك باستخدام مفتاح على آلتك الحاسبة

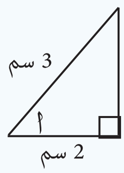
	أ ب	∠ أ	∠ ب
أ	8 سم	30^0	90^0
ب	7 سم	40^0	90^0
جـ	6 سم	50^0	90^0

(جـ)

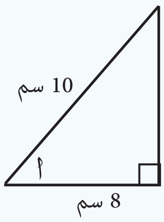


2 – بالنسبة لكل مثلث من للمثلثات الآتية أوجد جتا أ مقرباً إجابتك لأقرب 3 أرقام معنوية إن لم تكن صحيحة

(أ)



(ب)



3 – استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد قياس أ في كل مثلث مما يلي مقرباُ إجابتك لأقرب رقم عشري واحد إن لم تكن صحيحة.

(أ) جتا أ = 1 (ب) جتا أ = 0.67

(جـ) جتا أ= 0.707 (د) جتا أ = 0.123

(هـ) جتا أ= 0.9875

4 – استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

(أ) جتا 40^0 (ب) جتا 50^0 (جـ) جتا 60^0 (د) جتا 87.9^0

ماذا تلاحظ عن قيمة جيب تمام الزاوية عند زيادة قياس الزاوية.

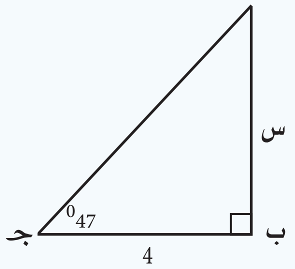
8-3 استخدام النسب المثلثية في إيجاد الأضلاع المجهولة في المثلث

Using Trigonometric Ratios to Find the Unknown Sides of a Triangle

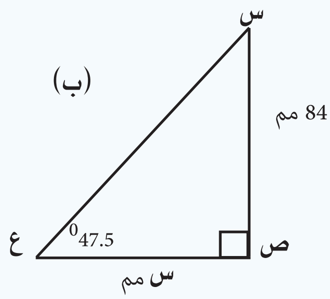
في المثلث قائم الزاوية . إذا علمت منه ضلعاً واحداً وزاوية واحدة. علينا تقرير أي النسب المثلثية يمكن استخدامها لإيجاد الأضلاع المجهولة.

مثال 25 : أوجد قيمة س في كل من المثلثات الآتية :

(أ)



(ب)



الحل:

(أ) $\overline{\text{أ ب}}$ هو الضلع المقابل للزاوية 47^{0}

ب جـ هو الضلع المجاور للزاوية 47^{0}

ظا 47^{0} = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ = $\frac{\text{س}}{4}$

س = 4 ظا 47^{0}

س = 4.29 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

(ب) $\overline{\text{س ط}}$ هو الضلع المقابل للزاوية 47.5^{0}

ص ع هو الضلع المجاور للزاوية 47.5^{0}

ظا 47.5^{0} = 84 س

س ظا 47.5^{0} = 84

س = $\frac{84}{\text{ظا } 47.5^{0}}$ = 77.0 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

ملحوظة :

ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

4 × ظا 47^{0} يمكن كتابتها على أنها 4 ظا 47^{0}

اضغط $\boxed{4}\boxed{\times}\boxed{\tan}\boxed{4}\boxed{7}\boxed{=}$

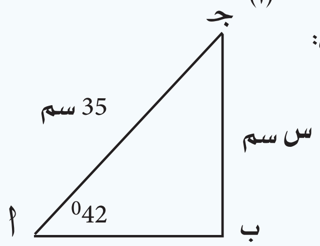
ظا = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$

اضغط $\boxed{8}\boxed{4}\boxed{\div}\boxed{\tan}\boxed{4}\boxed{7}.\boxed{5}\boxed{=}$

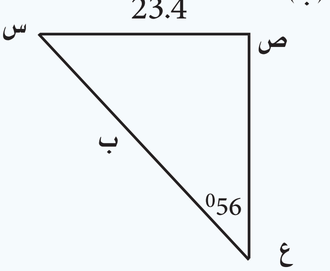
مثال 26 :

أوجد قيمة س ، ب في المثلثين الاتيين :

(أ)



(ب)



الحل:

(أ) طول الضلع المقابل للزاوية أ = 42° هو س سم

طول الوتر = 35 سم

جا أ = جا 42° = $\frac{س}{35}$

س = 35 × جا 42°

= 23.4 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

ملحوظة:

جتا أ = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{وتر المثلث قائم الزاوية}}$

اضغط

$\boxed{3}\boxed{5}\boxed{\times}\boxed{Sin}\boxed{4}\boxed{2}\boxed{=}$

جتاع = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{وتر المثلث قائم الزاوية}}$

اضغط على

$\boxed{2}\boxed{3}.\boxed{4}\boxed{\div}\boxed{Sin}\boxed{5}.\boxed{6}\boxed{=}$

(ب) طول الضلع المقابل (للزاوية ع = 56°) هو 23.4

وطول الوتر = ب.

جا 56° = $\frac{23.4}{ب}$

ب جا 56° = 23.4

ب = $\frac{23.4}{جا\ 56^\circ}$

=28.2 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

مثال 27 :

جا أ = $\frac{3}{5}$ ، جتا أ = $\frac{4}{5}$ ، ظا أ = $\frac{3}{4}$

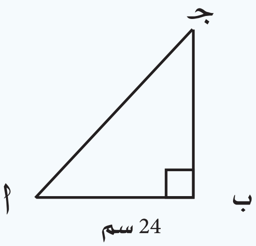
من دون استخدام الآلة الحاسبة ، أوجد ب جـ

الحل:

ب جـ يقابل أ ، أ ب = 24 سم ، وهو مجاور للزاوية أ

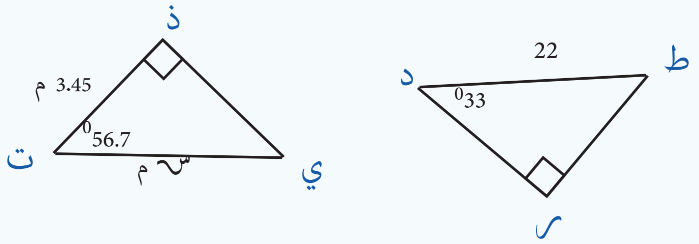
ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{ب\ جـ}{24}$ = $\frac{3}{4}$

ب جـ = 24 × $\frac{3}{4}$ = 18سم



مثال 28 : أوجد قيمة ر ، س في كل من المثلثين الآتيين :

(أ) (ب)



الحل:

(أ) طول الضلع المجاور لزاوية

$\measuredangle$ د = 33^0، هو ر وطول الوتر = 22

جتا 33^0 = $\frac{ر}{22}$

ر = 22 × جتا 33^0

= 18.5 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

(ب) طول الضلع المجاور للزاوية ت = 56.7^0 هو

ت ذ = 3.45 م وطول الوتر س م.

جتا 56.7 = $\frac{3.45}{س}$

س جتا 56.7^0 = 3.45

س = $\frac{3.45}{جتا\ 56.7^0}$

= 6.28 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

ملحوظة:

جتا د = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{وتر المثلث قائم الزاوية}}$

اضغط

tan 2 2 × Cos 3 3 =

جتا ت = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{وتر المثلث قائم الزاوية}}$

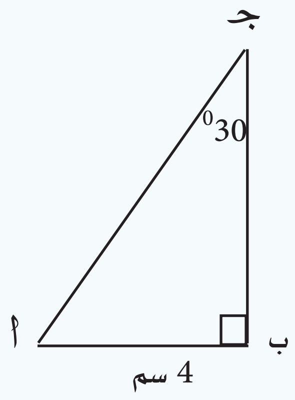
اضغط على

tan 3 . 4 5 ÷ Cos 5 6 . 7 =

مثال 29 :

إذا كان جا 30^0 = 0.5 ، جتا 30^0 = 0.866

ظا 30^0 = 0.577 احسب طول أ جـ.



الحل :

أ ب يقابل جـ، قياس $\measuredangle$ جـ = 30^0

أ جـ يعتبر الوتر

جا 30^0 = $\frac{أب}{أجـ}$

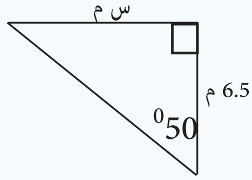
0.5 = $\frac{4}{أجـ}$

أ جـ = $\frac{4}{0.5}$ = $\frac{40}{5}$ = 8 سم

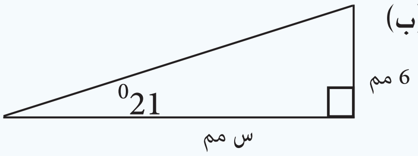
تمرين 3 ز :

1 – أوجد طول الضلع الذي يحمل العلامة س في كل من المثلثات الآتية مقرباً إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

(أ)

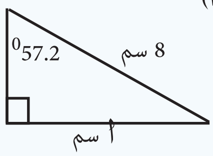


(ب)

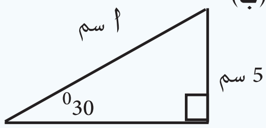


2 – أوجد قيم أ في كل مما يأتي مقرباً إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام معنوية إن لم تكن صحيحة.

(أ)

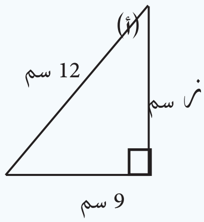


(ب)

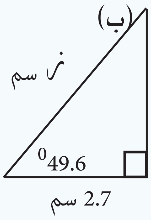


3 – أوجد قيم ز في كل مما يأتي مقرباً إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام معنوية إن لم تكن صحيحة

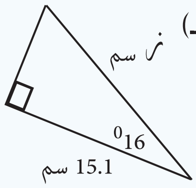
(أ)



(ب)

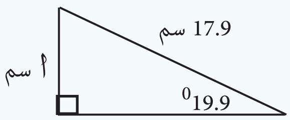


(جـ)

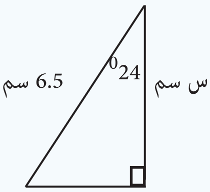


4 – أوجد طول الضلع المجهول المشار إليه في كل مما يأتي مقرباً إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام معنوية إن لم تكن صحيحة

(أ)



(ب)

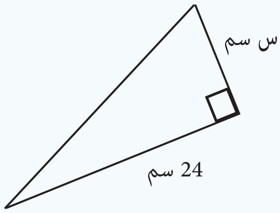


5 – بالنسبة للمثلثات القائمة الآتية استخدم المعلومات المعطاة لحساب أطوال الأضلاع المجهولة المشار إليها ، وذلك من استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جا أ $= \frac{5}{13}$

جتا أ $= \frac{12}{13}$

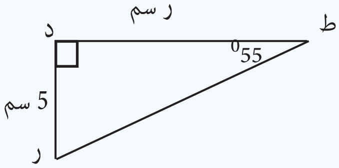
ظا أ $= \frac{5}{12}$



(ب) جا $55^0 = 0.819$

جتا $55^0 = 0.574$

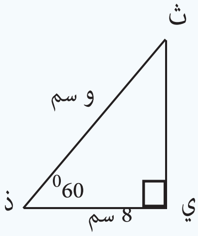
ظا $55^0 = 1.428$



(جـ) جا $60^0 = 0.866$

جتا $60^0 = 0.5$

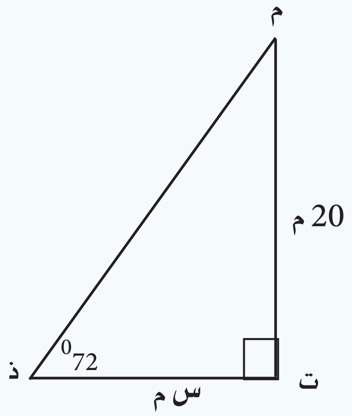
ظا $60^0 = 1.732$



3 - 9 تطبيقات بسيطة Simple Application

مثال 30 :

تثبت سارية علم طولها 20 متراً عن طريق ربطها بدعامة من القمة بحيث تصنع زاوية 72^{0} مع الأرض ، أوجد المسافة من قاعدة السارية إلي قاعدة الدعامة.



الحل:

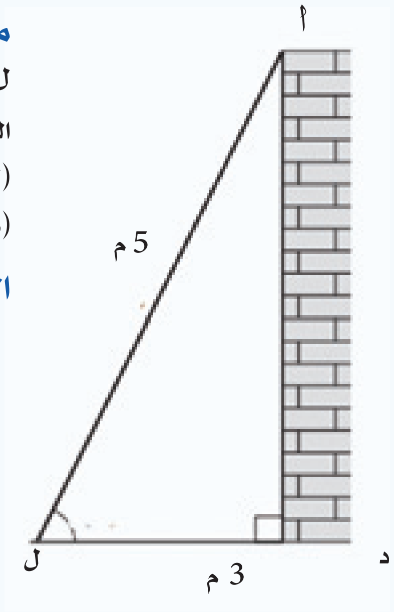
الخطوة الأولى: ارسم $\triangle$ م ت ذ حيث م ت يمثل سارية العلم ، م ذ يمثل الدعامة ، وبما أن المقابل والمجاور للزاوية تم تسميتها في المسألة ، نستخدم نسبة الظل.

لتكن المسافة من قاعدة السارية إلي قاعدة الدعامة = س متر.

ظا $72^{0} = \frac{20}{\text{س}}$ $\therefore$ س ظا $72^{0} = 20$

س = $\frac{20}{\text{ظا } 72^{0}} = 6.50$ متر (لأقرب ثلاثة رقام معنوية).

تبعد قاعدة السارية عن قاعدة الداعمة 6.5 متر .



مثال 31 :

ل أ سلم طوله 5 أمتار يرتكز على حائط رأسي وأرض أفقية بحيث قاعدة السلم تبتعد عن الحائط مسافة 3 أمتار.

(أ) احسب الزاوية التي يصنعها السلم مع الأفقي

(ب) ما هو الإرتفاع الذي يبلغه السلم من الحائط.

الحل:

(أ) جتا $\measuredangle$ أ ل ى $= \frac{3}{5}$

$\measuredangle$ أ ل ى $= 53.1^{0}$

(ب) $3^2 + \overline{\text{أى}}^2 = 5^2$ (نظرية فيثاغورث).

$9 + \overline{\text{أى}}^2 = 25$

$\therefore$ $\overline{\text{أى}}^2 = 25 - 9 = 16$

$\therefore$ أى $= \sqrt{16} = 4$ م

حل أخر (طريقة بديلة)

جا $\measuredangle$ أ ل ى $= \frac{\text{أى}}{5}$

جا $53.1^{0} = \frac{\text{أى}}{5}$

أى $= 5$ جا 53.1^{0}

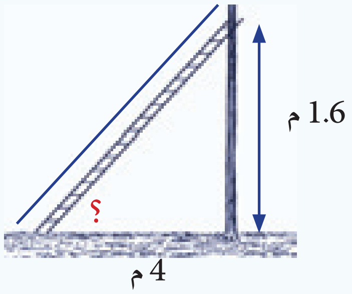
أى $= 4.00$ م (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

ملحوظة :

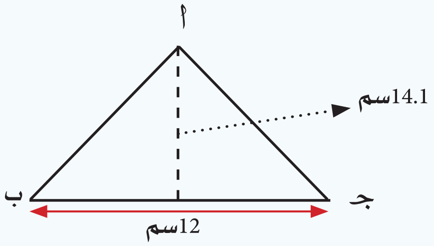
قد تريد استخدام نسبة الظل (ظا) بدلاً من نسبة الجيب (جا).

تمرين 3 ح

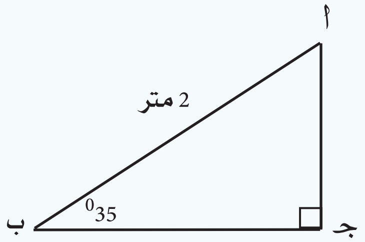
1 - يرتكز سلم على قائمة حائط رأسي ارتفاعه 1.6 متر. فإذا كانت قاعدة السلم تبعد عن الحائط 4 أمتار . أوجد قياس الزاوية التي يصنعها السلم مع الأفقي.



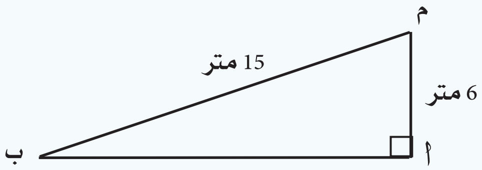
2 – قاعدة مثلث متساوي الساقين طولها 12سم ، فإذا كان أرتفاع المثلث 14.1سم . أوجد زاويتي القاعدة للمثلث.



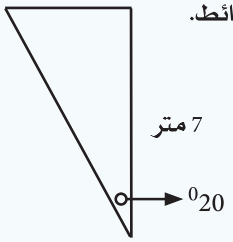
3 – اوجد المسافة من قاعدة سلم أ ب طوله 2 متر من حائط رأسي ا حـ إذا كان السلم يصنع زاوية قياسها 35^0 مع الأفقي.



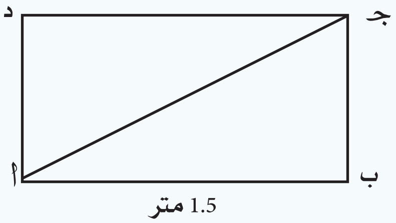
4 – اوجد قياس الزاوية التي يصنعها حبل م ب مع الأفقي إذا كان طوله 15 متراً والساري الذي يدعمه م أ ارتفاعه 6 أمتار.



5 –ربط بالون بخيط يصنع من الرأسي زاوية قياسها 20^0 ، فإذا كان البالون يرتفع 7 أمتار بعيداً عن الأرض ، أوجد المسافة الأفقية بين البالون والحائط.

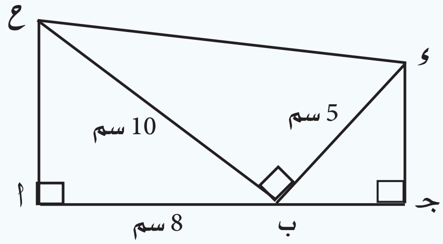


6 – قطر بوابة مستطيلة الشكل يصنع زاوية قياسها 45^0 مع الأفقي ، أوجد ارتفاع البوابة إذا كان عرضها 1.5 متر.



7 – أ جـ ء ع شكل رباعي فيه قياس ∡ ع أ جـ = قياس ∡ أ جـ ء = 90^0 ، أ ع = 6 سم النقطة ب تقع على أ جـ بحيث أ ب = 8 سم ، ع ب = 10 سم ، ء ب = 5 سم ، قياس ∡ ع ب ء = 90^0 ، احسب :

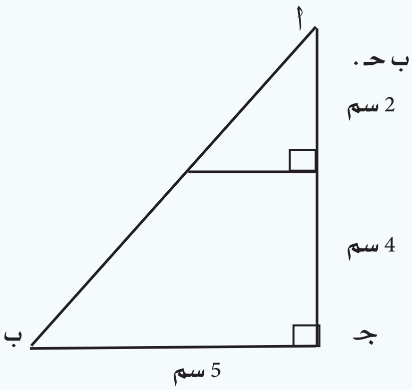
(أ) مساحة الشكل أ جـ ء ع   (ب) طوله ء جـ



8 – استخدم الأبعاد الموجودة في الشكل ثم احسب :

(أ) د حـ.

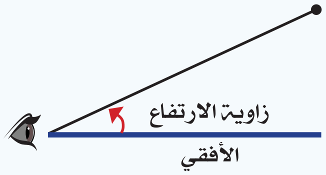
(ب) قياس ا ب حـ.



10-3 زوايا الارتفاع والانخفاض Angles of Elevation and Depression

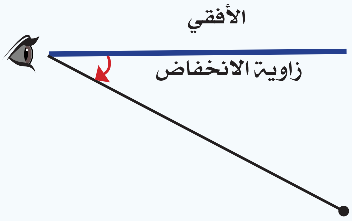
تعطى زوايا الارتفاع والانخفاض اتجاه نقطة محددة بالنسبة لنقطة أخرى في مستوى رأسي.

زاوية الارتفاع



تستخدم عند النظر إلي أعلى نحو النقطة د

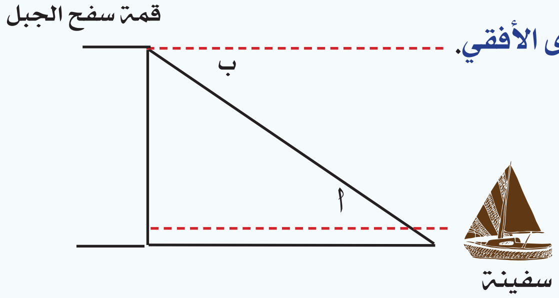
زاوية الانخفاض



تستخدم عند النظر إلي أسفل نحو النقطة.

تؤخذ دائماً زاوية الارتفاع أو الانخفاض بالنسبة للمستوى الأفقي.

يمكن ملاحظة أن زاوية الارتفاع من سفينة إلي قمة جبل ولتكن (أ) تساوي زاوية الانخفاض من قمة الجبل إلي السفينة ولتكن (ب) (بالتبادل).



مثال 32 :

زاوية ارتفاع قمة سفح جبل من سفينة في مستوى البحر 12.3^0 ، فإذا كانت السفينة تبعد عن الجبل مسافة 2.3كم ، أوجد ارتفاع الجبل بالأمتار.

الحل:

ليكن حـ ف هو ارتفاع الجبل ، ولتكن ن السفينة

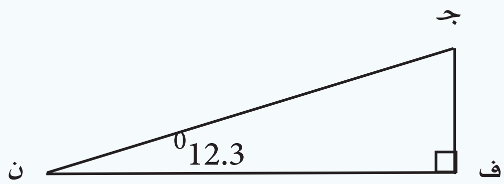
ظا $12.3^0 = \frac{\text{جـ ف}}{2.3}$

حـ ف = 2.3 ظا 12.3^0

= 0.501 كم

= 0.501 × 1000 متر

= 501 متر ⇦ ارتفاع الجبل = 501 متر.



مثال 33 :

فنار طوله 50 متراً يقع على قمة جبل ارتفاعه 500 متر ، أوجد قياس زاوية انخفاض سفينة من قمة الفنار ، إذا كانت السفينة تبعد 2.3 كم من قاعدة الجبل.

الحل:

ليكن الفنار ل جـ ، الجبل جـ ف ،

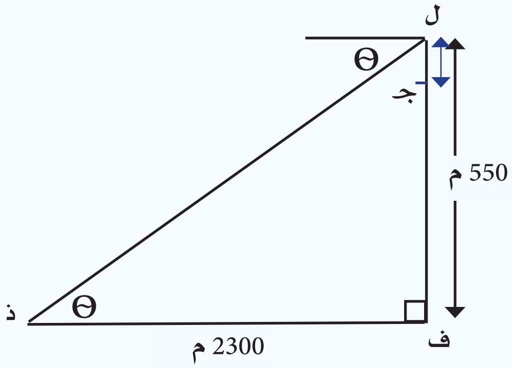
وزاوية الانخفاض Θ = ∡ ل ذ ف .

ل ف = ل جـ + جـ ف = 50 + 500 = 550 متراً

ظا ∡ ل ذ ف = $\frac{550}{2300}$

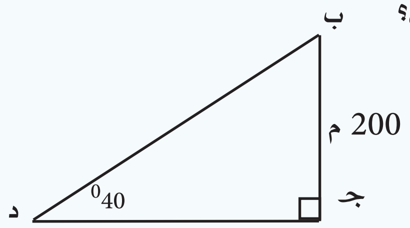
قياس ∡ ل ذ ف = 13.4 (لأقرب رقم عشري)

قياس الزاوية الانخفاض = 13.4^0

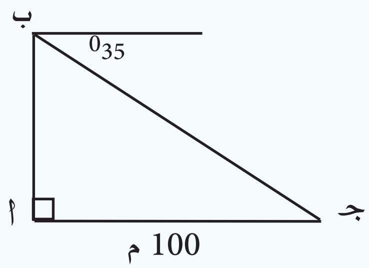


تمرين 3 ط

1- زاوية ارتفاع بالون (ب) من النقطة (د) على سطح الأرض 40^0 فإذا كان البالون يعلو الأرض مسافة 200 م ، ما المسافة من النقطة د إلي البالون؟



2 - زاوية انخفاض سيارة (جـ) من قمة مبنى (ب) يبعد 100 متر عن السيارة تساوي 35^0 ، اوجد ارتفاع المبنى.



3 - زاوية ارتفاع الشمس تساوي 78^0 ، فما طول عصا راسية طولها 50 سم ؟

4 - إذا كان الظل الملتقى بواسطة عصا طوله 40 سم ، وكان طول العصا 65 سم ، فما قياس زاوية ارتفاع الشمس في هذا الوقت ؟

5 - اوجد قياس زاوية ارتفاع قمة سارية علم طولها 30 متراً من نقطة على الأرض تبعد 270 متراً عنها.

6 - كم تبعد سفينة عن قاعدة جبل ارتفاعه 25 متراً إذا كانت زاوية ارتفاع الجبل من السفينة 7^0 ؟

7 - زاوية ارتفاع قمة مبنى تساوي 70^0 من نقطة على الأرض تبعد 50 متراً عنه.

(أ) فما ارتفاع المبنى ؟

(ب) أوجد قياس زاوية ارتفاع قمة المبنى من نقطة على سطح الأرض تبعد عنه مسافة 25 متراً.

11-3 التقدير الستيني والتقدير الدائري Degree and Radian Measure

تعلمت أن قياس زاوية هو مقدار دوران ضلع ابتدائها حتى يأخذ ضلع الانتهاء ،

- فإذا كان الدوران معاكس لدوران عقارب الساعة كان القياس موجباً ،
- وإذا كان الدوران مع دوران عقارب الساعة كان القياس سالباً.

وهناك قياسات عدة للزاوية ، منها القياس الستيني (الدرجات) ، والتنقدير الدائري (راديان).

تعريف الريباديان: هو قياس زاوية مركزية في دائرة الوحدة تقابل قوساً طوله يساوي وحدة الأطوال، ويرمز له بالرمز أ^{د} ويسمى قياس الزاويا بالراديان (التقدير الدائري).

- لتحويل التقدير الستيني إلي التقدير الدائري نضرب في $\frac{\pi}{180}$
- لتحويل التقدير الدائري (راديان) إلي التقدير الستيني نضرب في $\frac{180}{\pi}$.

مثال 34 :

حول كلاً من القياسات الآتية إلي التقدير الدائري.

(أ) 120^0 (ب) 315^0 (جـ) 135^0

الحل :

(أ) $120^0 = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$

(ب) $315^0 = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{4}\pi$

(جـ) $135^0 = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi$

مثال 35 :

حول كلاً من القياسات الآتية إلي التقدير الستيني.

(أ) $\frac{7}{3}\pi$ (ب) $-\frac{3}{2}\pi$ (جـ) $\frac{7}{9}\pi$

الحل :

(أ) $\frac{7}{3}\pi = \frac{7}{3}\pi \times \frac{180}{\pi} = 420^0$

(ب) $-\frac{3}{2}\pi = -\frac{3}{2}\pi \times \frac{180}{\pi} = -270^0$

(جـ) $\frac{7}{9}\pi = \frac{7}{9}\pi \times \frac{180}{\pi} = 140^0$

تمرين 3 ي :

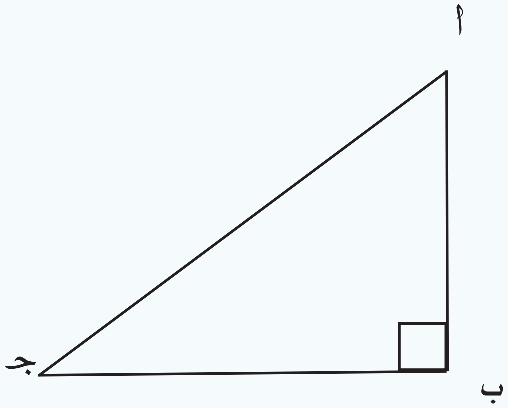
1 - حول من التقدير الستيني إلي التقدير الدائري

(أ) 240^0 (ب) 60^0 (جـ) 225^0

2 - حول من التقدير الستيني إلي التقدير الدائري

(أ) $\frac{\pi}{6}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (جـ) $\frac{71}{3}\pi$

12-3 النسب المثلثية للزوايا المتتامة



في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب ، ∠ أ تتمم ∠ جـ.

النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ هي :

جا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ ، جتا جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ ، ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

النسب المثلثية لزاوية أ هي :

جا أ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ ، جتا أ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ ، ظا أ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$

من مقارنة النسب المثلثية للزاويتين أ ، جـ

نجد أن : جا جـ = جتا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ ، ظا جـ = $\frac{1}{\text{ظا أ}}$

وعلى ذلك يكون :

جا 20° = جتا 70° ، جتا 30° = جا 60° ، ظا 45° = $\frac{1}{\text{ظا } 45^\circ}$

لاحظ أن : $20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$ ، $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ ، $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

تعريف :

الزاويتان المتتامّتان هما االزاويتان اللتان مجموعهما يساوي 90° وتسمى كل منهما مُتممة للأخرى.

أي أن : ∠ أ + ∠ب = 90° فالزاوية أ حادة فإن متممها تساوي (90° – ب)

مثال 36 :

أوجد قيمة كل زاوية من الزوايا الآتية : 60° ، 75°

الحل :

الزاوية	متممتها
60°	30°
75°	15°

مثال 37 :

إذا كانت جتا 4 س = جا (3 س + 20) ، فأوجد قيمة س بالدرجات.

الحل :

جتا 4 س = جا (3 س + 20)

الزاويتان 4 س ، 3 س + 20 متتامتان

4 س + 3 س + 20 = 90

7 س = 70

س = 10°

مثال 38 :

إذا كانت جتا (8 أ - 12) - جا (أ - 6) = 0 ، أوجد قيمة أ بالدرجات

الحل :

جتا (8 أ - 12) - جا (أ - 6) = 0

جتا (8 أ - 12) = جا (أ - 6)

8 أ - 12 + أ - 6 = 90

∡ أ = 12^0

مثال 39 :

أوجد القيمة العددية لكل مقدار مما يأتي :

(أ) جا 30^0 جتا 60^0 + جتا 30^0 جا 60^0

(ب) $\sqrt{2}$ جتا 45^0 - جا^2 60^0

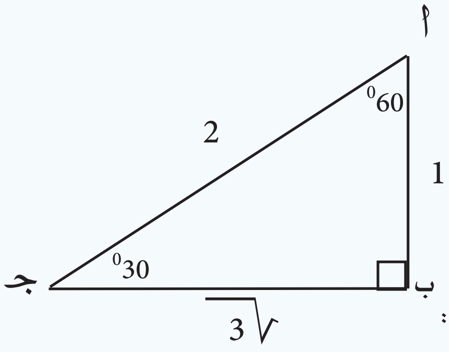
الحل :

(أ) جا 30^0 جتا 60^0 + جتا 30^0 جا 60^0 = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

(ب) $\sqrt{2}$ جتا 45^0 - جا^2 60^0 = $\sqrt{2}$ جتا 45^0 - (جا 60^0)^2

$= \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

13-3 النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة



أولاً : إيجاد النسب المثلثية للزاوية 30^0 ، 60^0

نرسم مثلث أ ب جـ القائم في ب وفيه الضلع

أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ (فرضاً)

∡ جـ = 30^0 ، ∡ أ = 60^0

فإذا كان طول أ ب = الوحدة، طول أ جـ = 2 من هذه الوحدة نجد أن :

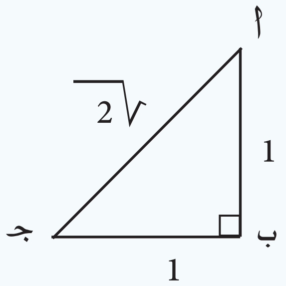
∴ طول ب جـ = $\sqrt{3}$

∴ جا 30^0 = $\frac{1}{2}$ ، جتا 30^0 = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، ظا 30^0 = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

وباستخدام النسب المثلثية للزوايا المتتامة نجد ان :

جا 60^0 = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جتا 60^0 = $\frac{1}{2}$ ، ظا 60^0 = $\sqrt{3}$

ثانياً : إيجاد النسب المثلثية للزاوية 45^0



نرسم مثلث أ ب جـ القائم في ب وفيه الضلع أ ب = ب جـ (فرضاً)

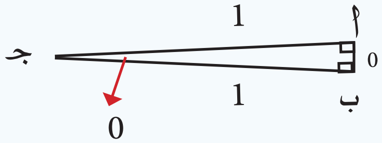
كل من أ ، جـ = 45^0

فإذا كان طول كل من أ ب ، ب جـ = الوحدة

∴ أ جـ = $\sqrt{2}$

∴ جا $45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، جتا $45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، ظا $45^0 = 1$

ثالثاً: إيجاد النسب المثلثية للزاوية 0^0



نرسم قوساً من دائرة نصف قطرها ب جـ

ثم نأخذ نقطة أ على القوس ونصل جـ أ ،

بحيث تكون $\hat{جـ}$ أصغر ما يمكن ثم نسقط أ ى ⊥ ب جـ ،

فعندما تصغر $\hat{جـ}$ إلي ما لانهاية تقرب نقطة أ من ب ،

فإذا آلت ث إلي الصفر انطبقا أ جـ على ب جـ ،

ويتلاشى الطول أ ى فإذا أصبح أ جـ = ب جـ = الوحدة فإن أ ى = 0

وباستخدام النسب المثلثية للزاويا المتتامة نجد أن :

جا $90^0 = 1$ ، جتا $90^0 = 0$ ، ظا 90^0 = كمية غير مرفغة .

تمرين 3 ك :

1 - أي من المتساويات الآتية صحيحة وأيها خاطئة ؟

(أ) جتا ($30^0 + 60^0$) = جتا 30^0 + جتا 60^0

(ب) جا 90^0 - جا30^0 = جا 60^0

(جـ) جتا 75^0 = جا 15^0

(د) جا θ = جتا (90^0 - θ) حيث θ زاوية حادة.

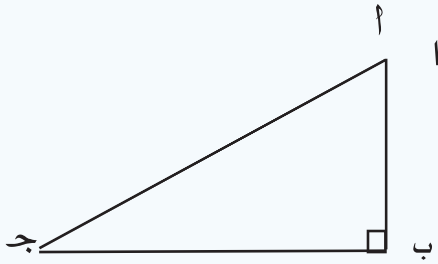
2 - إذا كانت ∡ أ = 50^0 فإن متممة أ = ... ، جتا 50^0 = جا ...... ، ظا 40^0 = ... (أكمل العبارات السابقة)

3 - برهن أن: $\frac{\text{ظا } 60^0 - \text{ظا } 30^0}{1 + \text{ظا } 60^0 \text{ظا } 30^0}$ = ظا 90^0

4 - بدون الآلة الحاسبة ، أوجد قيمة : 2 جا 60^0 جتا 45^0 حتا 0^0 جا 45^0

14-3 القاطع ، قاطع التمام ، ظل التمام

تسمى مقلوبات الجيب وجيب التمام والظل على الترتيب **قا** ، **قتا** ، **ظتا**



قا جـ = $\frac{1}{\text{جتاجـ}}$

قتا جـ = $\frac{1}{\text{جاجـ}}$

ظتا جـ = $\frac{1}{\text{ظاجـ}}$

حيث:

جتا جـ $\neq 0$ ⇦ جـ ∈ ح - $\{ \frac{\pi}{2} + ن\pi \}$ ، ن = 0 ، ±1 ، ± 2 ، ±3 ، ...

، جا جـ $\neq 0$ ⇦ جـ ∈ ح - $\{$ ن $\pi \}$

، ظا جـ $\neq 0$ ⇦ جـ ∈ ح - $\{$ ن $\pi \}$

ويمكن التعبير عن هذه النسب بدلالة أضلاع المثلث قائم الزاوية كما يأتي :

∴ جا جـ = $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ ∴ قتا جـ = $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}}$

جتا جـ = $\frac{\text{بجـ}}{\text{أجـ}}$ ∴ قا جـ = $\frac{\text{أجـ}}{\text{بجـ}}$

ظا جـ = $\frac{\text{أب}}{\text{بجـ}}$ ∴ ظتا جـ = $\frac{\text{بجـ}}{\text{أب}}$

نتيجة 1 : جا جـ . قتا جـ = 1 ، جتا جـ . قا جـ = 1 ، ظا جـ . ظتا جـ = 1.

نتيجة 2 : يكون كل من الجيب وجيب التمام أقل من الواحد على وجه العموم، ويكون كل من القاطع وقاطع التمام أكبر من الواحد على وجه العموم.

علمنا فيما سبق أن الزاوية هـ تتمم 90 - هـ يقال إن الزاوية 90 - هـ منتسبة للزاوية هـ الواقعة في الربع الأول وكذلك الزاوية 360 + هـ واقعة أيضاً في الربع الأول عليه :

جا (90 - هـ) = جتا هـ

جتا (90 - هـ) = جا هـ

ظا (90 - هـ) = ظتا هـ

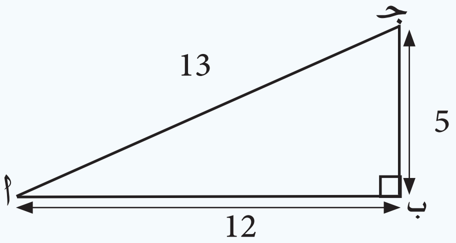
قتا (90 - هـ) = قا هـ

قا (90 - هـ) = قتا هـ

ظتا (90 - هـ) = ظا هـ

مثال 40 :

إذا كانت قتا أ = $\frac{13}{5}$ حيث أ زاوية حادة فأوجد قا أ ، ظتا أ



الحل : قتا أ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{13}{5}$

(باستخدام نظرية فيثاغورث) نجد أن المجاور = 12 ،

ظتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{12}{5}$ ، ∵ قا أ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ ، ∴ قا أ = $\frac{13}{12}$

مثال 41 :

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، أوجد قيمة كل من الآتي :

(أ) $\sqrt{2}$ قتا 45^0 − قتا^2 60^0 − $\frac{1}{2}$ ظتا^2 30^0

(ب) 2 جا^2 30^0 + 3 جا^2 45^0 − 4 جا^2 60^0 + 3 قتا^2 60^0

الحل :

(أ) المقدار = $\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right) - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)^2$

(ب) المقدار = $2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

$= 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} - 4 \times \frac{3}{4} + 3 \times \frac{4}{3}$

$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 3 + 4 = 3$

تمرين 3 ل :

1 – إذا كان ظا جـ = $\frac{5}{13}$ ، فأوجد جتا جـ ، قتا جـ ، ظتا جـ .

2 – إذا كان 3 ظا أ = 5 ، فأوجد قيمة المقدار : $\frac{\text{6 جا أ – 4 جتا أ}}{\text{7 جتا أ - 3جا أ}}$

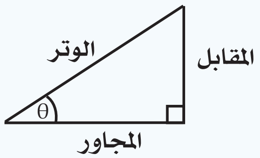
3 – بدون استخدام الا لة الحاسبة أوجد قيمة : جا^2 60^0 (جتا0 – جتا 60^0) + جا^2 45 (جا90^0 – جا 30^0)

4 – مثلث أضلاعه جا 60^0 ، جتا 60^0 ، ظا 45^0 مانوعه ؟

5 – إذا كانت س = جتا 60^0 + ظا 45^0 ، ص=2جا 30^0 فأوجد قيمة كل من: س^2+ص^2 ، (س–ص)^2

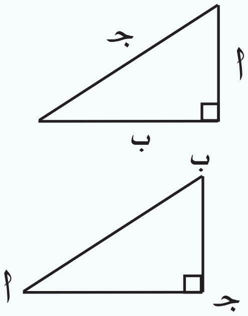
الملخص:

1 - في المثلث قائم الزاوية : الضلع الأطول هو المقابل للزاوية القائمة ويسمى وتراً أما الضلعان الأخران فيتحدان طبقاً لموقع الزاوية (كما هو موضح بالرسم).



2 - نظرية فيثاغورث بالنسبة للمثلث قائم الزاوية : $\text{أ}^2 + \text{ب}^2 = \text{ج}^2$ ، حيث ج طول الوتر

3 - في المثلث قائم الزاوية أ ب ج



ظا أ = المقابل / المجاور ، ظتا أ = المجاور / المقابل

جا أ = المقابل / الوتر ، قتا أ = الوتر / المقابل

جتا أ = المجاور / الوتر ، قا أ = الوتر / المجاور

4 - إذا عُلم طولاَ من مثلث قائم الزاوية.

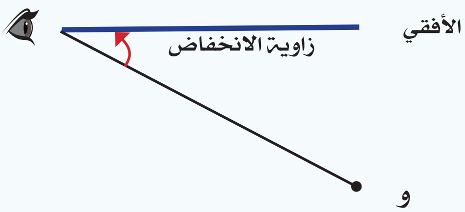
(أ) يمكن الحصول على الضلع الثالث عن طريقة نظرية فيثاغورث.

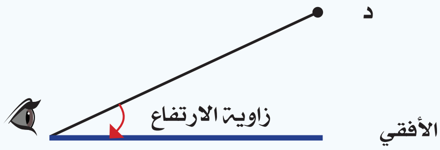
(ب) يمكن الحصول على قياسات الزوايا عن طريق النسب المثلثية.

5 - إذا عُلم الضلع والزاوية الحادة له في مثلث قائم الزاوية ، يمكن إيجاد طولي الضلعين الآخرين باستخدام النسب المثلثية.

6 - نستخدم زاوية الارتفاع عندما ننظر إلي أعلى صوب النقطة د.

7 - نستخدم زاوية الانخفاض عندما ننظر إلي أسفل صوب النقطة و .





استقصاء رياضيات :

المقطع الذهبي

الهندسة لها كنزان عظيمان ، الأول هو نظرية فيثاغورث ، والثاني هو تقسيم الخط المستقيم إلي خط انعكاس ونسبة بحتة. يمكن مضاعاة الأول بمقياس الذهب ، والثاني يمكن تسميته الجوهرة الثمينة. يبدو أن أرقام فيبوناشى (مثل 1،1 ، 2، 3، 5 ،8 ،13، 21، 34،....) ذات تأثير غريب على الفن والعمارة ، والنسبة لأي عدد فيبوناشي(بعد العدد34) بالنسبة للعدد الفيبوناشى الذي يسبقه 1.618 تقريباً. وقد أطلق الأغريق المقطع الذهبي على هذا العامل المقدس.

وتقول الأسطورة أن العالم الرياضي أدسيوس المولود في 350 ق.م تقريباً هو أول من حاول أكتشاف سبب الولع الشديد بهذا المقطع الذهبي. وتوصل طادسيوس إلي معرفة النسبة الذهبية واكتشف أن تلك النسبة ما هي إلا عدد يمكن التعبير عنه في صيغة رياضية أطلق عليها (فاي) على اسم فيدياس وهو الفنان الذي استخدم النسبة الذهبية في أعماله النحتية.

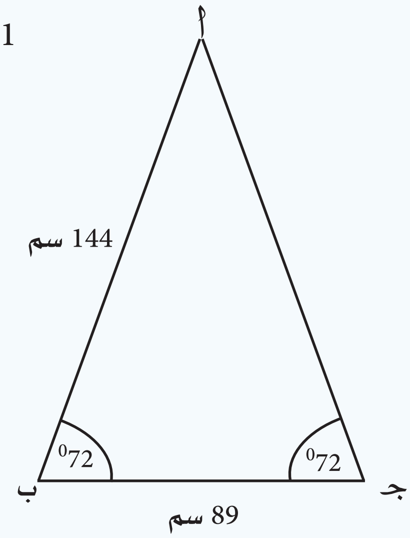
وقد اشتبه فيثاغورث في أن النسبة الذهبية في أساس النسب في الجسم الإنساني. ولقد استطاع أن يبرهن على صدق ذلك عندما أوضح أن كل جزء في جسم الإنسان قد بنى بنسبة ذهبية ثابتة بالنسبة لباقي أجزاء الجسم. فعلى سبيل المثال ارتفاع الإنسان إلي مستوى سُرته يقترب من 1.618.

ومع تكرار استخدام النسبة الذهبية طور الأغريق أنماطاً وتصميمات رائعة استخدمت في صناعة الأواني الفخارية. ومشغولات الزينة. والنحت والرسم والعمارة أيضاً . وعلى الرغم من استخدام تلك النسبة في الدوائر والأشكال الخماسية إلا أنها ملاحظة بصفة خاصة في المستطيل الذهبي الذي يقال أنه من الناحية البصرية من أكثر الأشكال الهندسية إمتاعاً. (الصف الثامن من مرحلة التعليم الأساسي الفصل السابع).

لمعرفة المزيد عن المقطع الذهبي . ابحث في شبكة الإنترنت وفي صفحة البحث اكتب "fibonacci" أو "Golden section" ثم أنتظر حتى تصل المعلومات.

أنشطة :

المثلث الذهبي



1 - ارسم بالحجم الحقيقي المثلث أ ب جـ على قطعة مقوة من الورق طبقاً للمقاسات الموضحة في الشكل.

استخرج النسبة : $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جـ د}}$

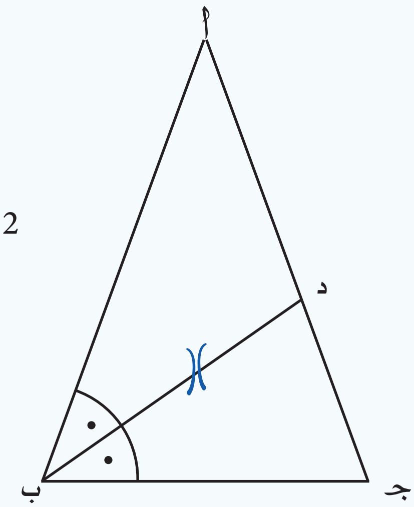
الناتج 1.618 هو النسبة الذهبية ونطلق على المثلث أ ب جـ المثلث الذهبي.

بعد ذلك ، نصف ∡ أ ب جـ. مستخدماً الفرجار أو المنقلة بحيث يقطع المنصف الضلع أ جـ في نقطة د.

استخرج النسبة $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

أ ب جـ مثلث ذهبي ، وكذلك △ ب جـ د ماذا تعتقد حدوثه إذا نصفت زاوية ب جـ د ؟

استمر في هذه العملية بتنصيف الزاوية في كل أشكال المثلثات الذهبية الجديدة. تأكد من اختيار الزاوية التي في موقع مناظر في كل مرة. سوف تنتج مجموعة من المثلثات الذهبية تصغر في كل مرة بحيث لا نستطيع رسمها في النهاية.



2 - قص حول المثلث أ ب جـ ثم اقطع مبتدئاً من النقطة د بطول الخطوط السميكة وائن الخطوط المنقطة بالترتيب بحيث عند الثنية الثانية تمس النقطة د النقطة ح على (الضلع أ ب) . استمر في هذه الطريقة حتى تصل إلي المركز. الصق الأن المثلث المنثنى معاً لعمل نموذج حلزوني مثل القوقعة الحلزونية. توجد عادة النسبة الذهبية في القوقعة الحلوزنية الحقيقية.

$\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ $\frac{1}{2\text{جتا } 72}$

(إرشاد: ارسم العمود المنصف من ا إلي ب حـ).

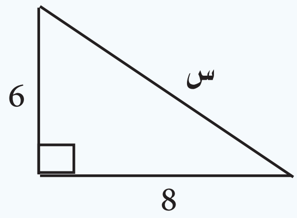
ورقة المراجعة 4 :

القسم أ :

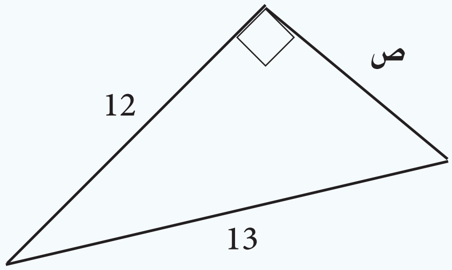
لا تستخدم حاسبة الجيب فيما يلي .

1- أوجد قيمة س، ص في المثلثات الآتية:

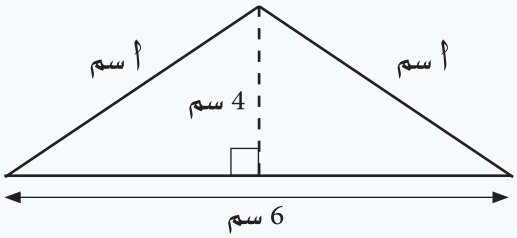
(أ)

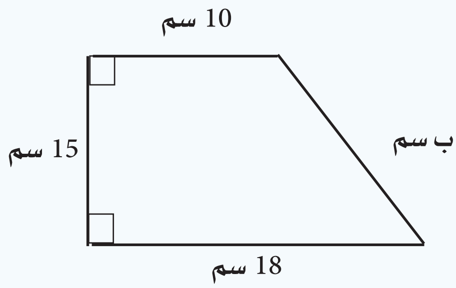


(ب)



2- أوجد قيمة أ ، ب في الأشكال التالية:



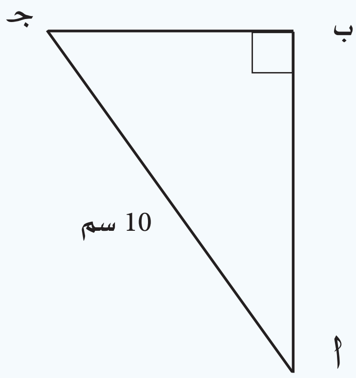


3- بالنسبة للمثلثات المعطاة . استخدم المعلومات الموجودة لحساب الأطوال المجهولة.

(أ) جا أ = $\frac{4}{5}$

جتا أ = $\frac{4}{5}$

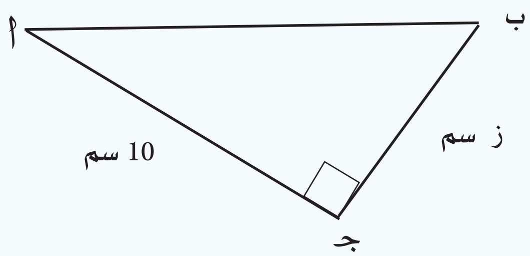
ظا أ = $\frac{3}{4}$

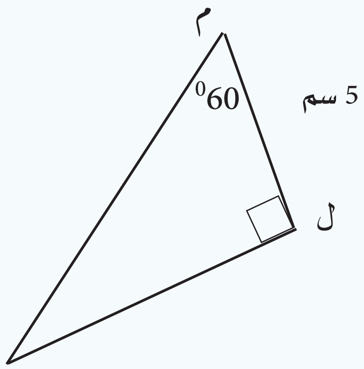


(ب) جا ب = $\frac{5}{13}$

جتا ب = $\frac{12}{13}$

ظا ب = $\frac{5}{12}$





القسم ب (يمكن استخدام آلتك الحاسبة)

4- استخدم المعلومات المعطاة أسفل بقدر الضرورة لحساب.

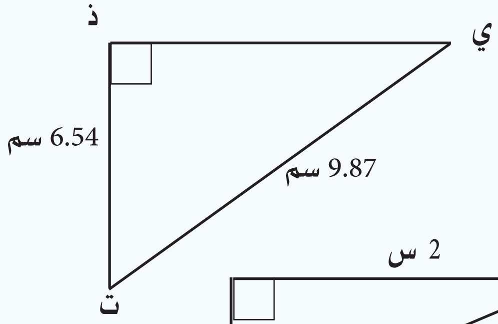
(أ) ل ن　　　(ب) ن م

(جا 60^0 = 0.866 ، جتا 60^0 = 0.5 ، ظا 60^0 = 1.73)

5- بالنسبة للمثلث المعطى ، أوجد

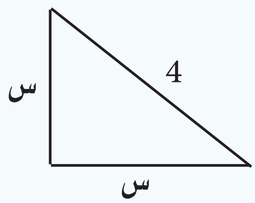
(أ) طول ذ ى

(ب) مساحة ذ ت ى

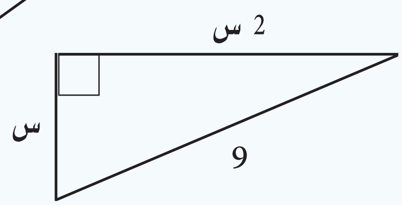


6- أوجد قيمة س في الحالات الآتية

(أ)



(ب)



القسم جـ (يمكن استخدام آلتك الحاسبة)

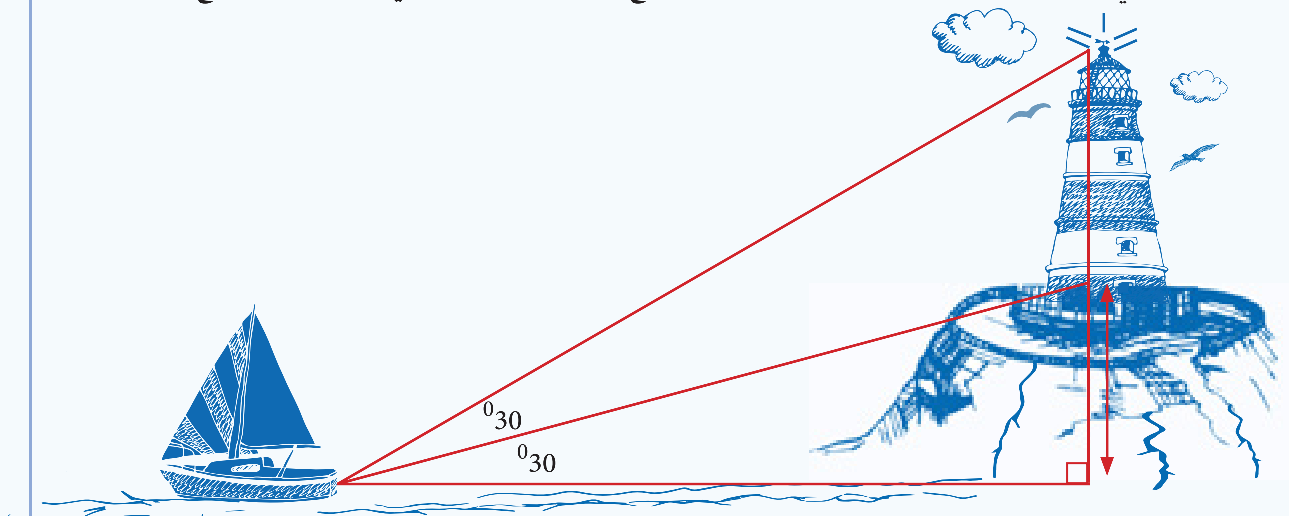
7- (أ) قطعة من الورق الكرتون على الشكل مستطيل أبعاده ، 13 سم ، 21 سم احسب طول قطره.

(ب) قطر بوابة مستطيلة يصنع زاوية قياسها 30^0 مع الآفقي. أوجد ارتفاع البوابة إذا كان عرضها 2 متر.

(جـ) يرتكز سلم على حائط رأسي وأرض أفقية فإذا كان طول الحائط 3 أمتار وقياس زاوية السلم 60^0 مع الآفقي، أوجد طول السلم.

8- (أ) قياس زاوية ارتفاع قمة سفح تل طوله 10 أمتار من قارب تساوي 30^0. أوجد المسافة بين القارب والتل.

(ب) إذا بُني فنار على حافة الجبل بحيث كانت زاوية ارتفاع قمته من القارب تساوي 60^0، احسب ارتفاع الفنار.



4

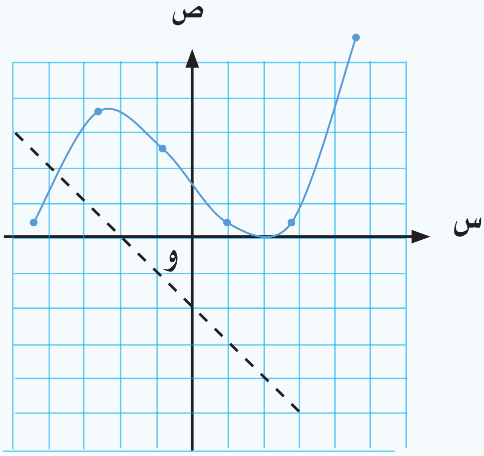
الباب الرابع

الهندسة الإحداثية والرسوم البيانية الخطية

Coordinate Geometry and Linear Graphs

الهندسة الإحداثية والرسوم البيانية الخطية
Coordinate Geometry and Linear Graphs

تعلمنا في كتاب الصف التاسع كيفية ابتداع ديكارت لمفهوم استخدام زوج من الأعداد لتحديد موقع على على شبكة من الخطوط المستقيمة المتقاطعة. وتعتبر تلك خطوة عظيمة في الرياضيات خاصة وأن ورق الرسم البياني لم يكن قد اخترع بعد. ولو مثلنا المعادلات الجبرية بيانياً باستخدام فكرة ديكارت كمتتاليات من النقاط، سوف تظهر في صورة أشكال هندسية مثل الخطوط المستقيمة والمنحنيات.



في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادراً على:

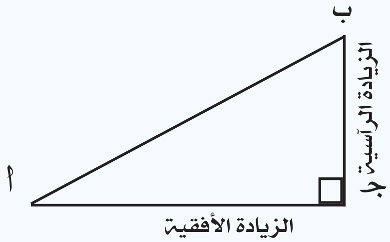
- إيجاد ميل الخط المستقيم.
- إيجاد معادلة الخط المستقيم.
- إيجاد معادلة المستقيمات المتوازية.
- حل المعادلات المتماثلة بيانياً.
- إيجاد المسافة بين نقطتين.
- إيجاد إحداثيات نقطة تنصيف القطعة المستقيمة المرسومة بين نقطتين.
- حل المسائل العملية التي تتضمن خطوطاً بيانية.

1-4 الميل The Gradient

الميل أو انحدار تل: هو قياس لتدرج التل، ويعرف بأنه نسبة الزيادة الرآسية إلى الزيادة الأفقية، على سبيل المثال:

$$\text{ميل أ ب} = \frac{\text{الزيادة الرأسية}}{\text{الزيادة الأفقية}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$$

لاحظ أيضا أن ظا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$



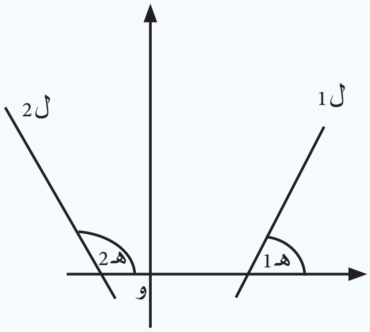
ولهذا فإن قياس الميل للخط المستقيم يعادل ظل الزاوية التي يصنعها هذا المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (الخط أفقي).

تعريف: ميل المستقيم هو ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ملحوظة:
القطعة المستقيمة: جزء من المستقيم، على سبيل المثال في الشكل المرسوم الجزء من المستقيم بين النقطتين (ر، ذ) يسمى القطعة المستقيمة ر ذ أو القطعة المستقيمة ذ ر.

أي أن:

- ميل المستقيم ل1 = ظا هـ1، حيث هـ1 زاوية حادة يكون موجباً لأن الظل قيمته موجبة.
- ميل المستقيم ل2 = ظا هـ2، حيث هـ2 زاوية منفرجة يكون سالباً لأن الظل قيمته سالبة.
- اعتبر الآن أن المستقيم يمر بالنقطتين أ (4، 6)، ب (2، 3) في المستوى الديكارتي.



بالنسبة للقطعة المستقيمة أ ب:

الزيادة الرأسية:

أ هـ = أ ل – هـ ل

= أ ل – ب ك

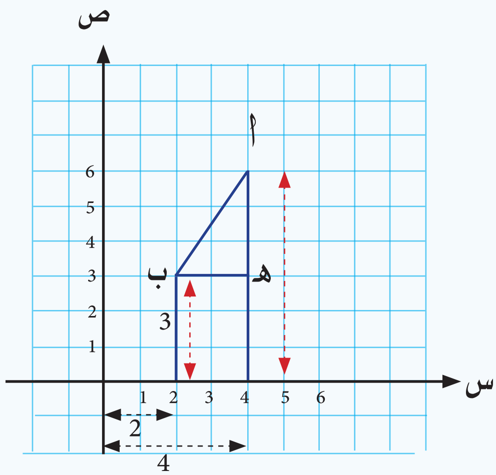
= 6 - 3 = 3

الزيادة الأفقية:

ب هـ = و ل – و ك

= 4 - 2

= 2



$$\text{ميل المستقيم أ ب} = \frac{\text{الزيادة الرأسية}}{\text{الزيادة الأفقية}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{3}{2}$$

يعتبر إيجاد الزيادة الأفقية و الزيادة الرآسية كلما أردنا الحصول على ميل القطعة المستقيمة طريقة مطولة، ولهذا سوف نعمل على استخراج قاعدة عامة يمكن تطبيقها، وليكن أي نقطتين أ (س$_2$، ص$_2$)، ب (س$_1$،ص$_1$) في مستوى الإحداثيات الديكارتي.

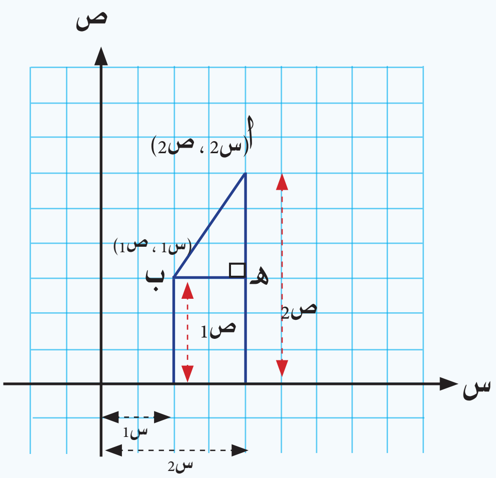
وكما سبق فإن القطعة المستقيمة أ ب ،

الزيادة الرأسية:

أ هـ = أ ل - هـ ل

= أ ل - ب ك

= ص$_2$ - ص$_1$



الزيادة الأفقية:

ب هـ = و ل - و ك

= س$_2$ - س$_1$

ميل أ ب = $\frac{\text{الزيادة الرأسية}}{\text{الزيادة الأفقية}}$

ميل أ ب = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

ولهذا يمكن أن نلخص تعريف ميل الخط المستقيم بأنه يساوي: $\frac{\text{الزيادة في محور الصادات}}{\text{الزيادة في محور السينات}}$

ميل المستقيم المار بالنقطتين (س$_2$ ، ص$_2$) ، (س$_1$ ، ص$_1$) = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

مثال1:

أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين م (-3 ، 1)، ن (4 ، 7).

الحل:

ليكن (-3 ، 1) هي: (س$_1$ ، ص$_1$) ، (4 ، 7) هي: (س$_2$ ، ص$_2$)

ميل الخط م ن = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

$= \frac{7 - 1}{4 - (-3)}$

$= \frac{6}{7}$

ملحوظة:

يمكن تغيير وضع النقط كأن تكون (-3، 1) هي (س$_2$،ص$_2$) ، (4، 7) هي (س$_1$،ص$_1$) هل الناتج سيكون نفس الميل $\frac{6}{7}$ ؟

تمرين 4 أ :

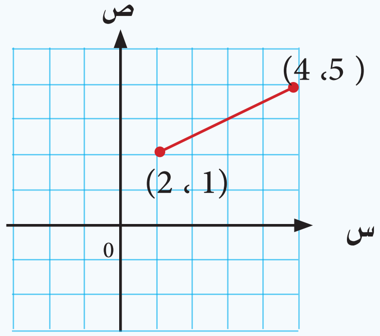
1 – بالنسبة للنقط أ ، ب ،جـ والتي تقع على خط مستقيم واحد . أوجد ميل كل من :

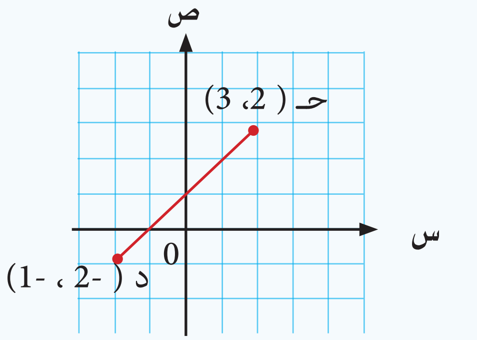
(أ) القطعة المستقيمة أ ب .

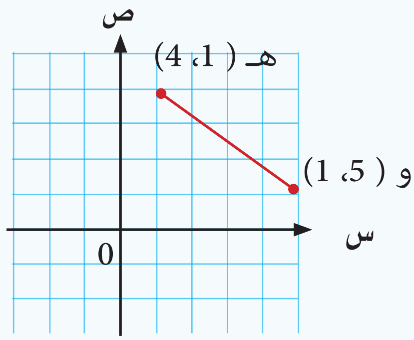
(ب) القطعة المستقيمة ب جـ

(جـ) القطعة المستقيمة أ جـ

ماذا تلاحظ عن ميل القطع المستقيمة المختلفة على نفس لخط؟



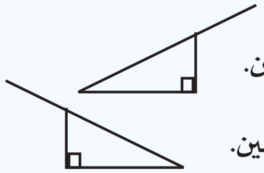




2 – حدد ما إذا كانت المستقيمات ميلها موجب أو سالب.

(i) ينحدر إلى أعلى اليمين.

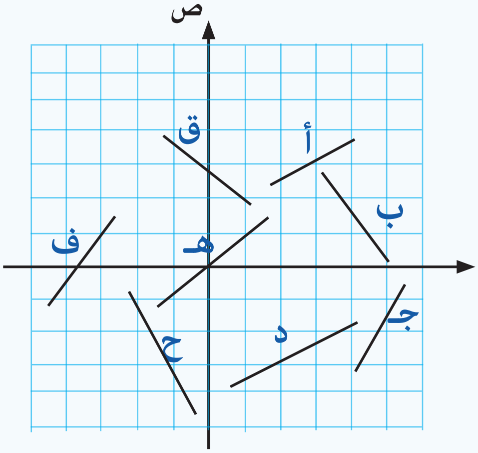
(ii) ينحدر إلى أسفل اليمين.



مهارة تفكير ، الاستقراء:

لاحظ أن الاستقراء يستخدم في السؤال السابق لتعميم إشارات الميل للخطوط المستقيمة المنحدرة.

3 – بدون الحساب بدقة ، حدد إشارة ميل كل من المتسقيمات الموضحة (موجبة/سالبة).



4 –أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل من النقط الآتية.

(أ) و (0،0) ، أ (3، 9)

(ب) حـ (2، 5) ، د (4، -1)

(جـ) م (-2 ، 4) ، ل (3، -1)

(د) ط (-3 ، 2) ، ي (4، 6)

5 – أوجد ميل كل مما يأتي :

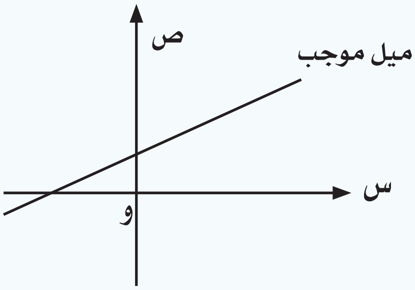
(أ) المستقيم الذي يصنع زاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قدرها 60^0.

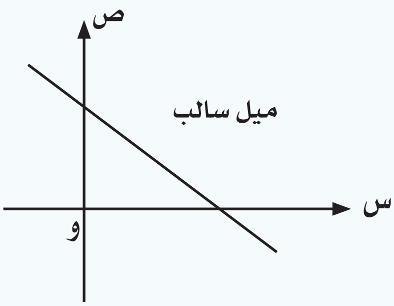
(ب) المستقيم الذي يصنع زاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قدرها 36^0.

6 –أوجد الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات الذي ميله واحد.

يمكن تعميم نتائج التمرين (4 أ).

مستقيم ينحدر إلي أعلى اليمين له ميل موجب بينما مستقيم ينحدر إلي أسفل اليمين له ميل سالب.





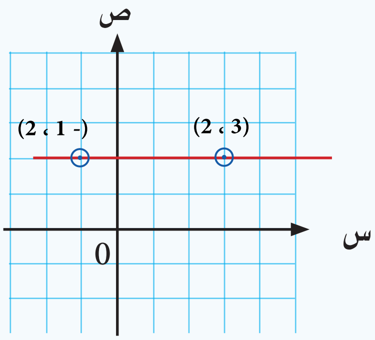
دعنا نحصل بعد ذلك على الميل للخطوط الرأسية والأفقية.

اعتبر النقطتين أ (- 1 ، 2) ، ب (3 ، 2) على الخط المستقيم الأفقي.

$$\text{ميل أ ب} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$\frac{2 - 2}{3 - 1-}$$

$$= \frac{0}{4-} = 0$$



ولهذا فإن ميل المستقيم الأفقي = 0

الزاوية هـ = 0 يكون بذلك المستقيم موازياً لمحور السينات.

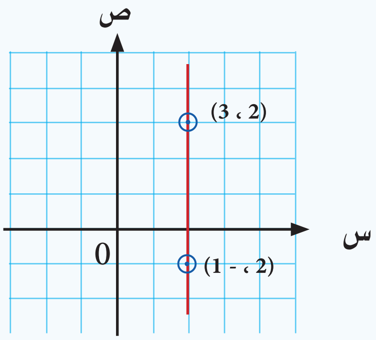
تأمل بعد ذلك النقطتين جـ (2 ، 3)، د (2 ، - 1) على المحور الرأسي ،

$$\text{ميل جـ د} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$= \frac{3 - (-1)}{2 - 2}$$

$$= \frac{4}{0}$$ غير مُعَرَّفة.

ولهذا فإن ميل المستقيم غير مُعَرَّفة.



الزاوية هـ = 90^0 يكون بذلك المستقيم متوازياً لمحور الصادات.

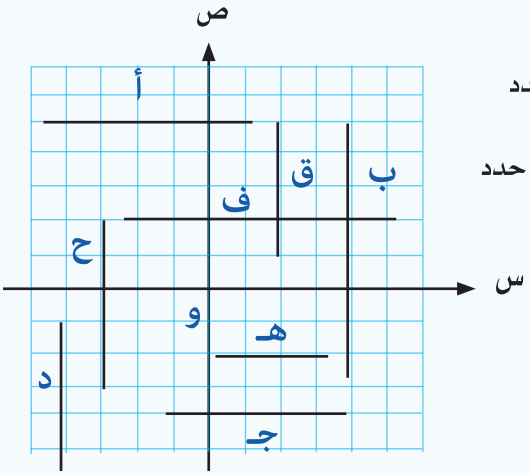
تمرين 4 ب :

1 -

(أ) هل محور الإحداثيات السيني خطاً أفقياً أم رأسياً؟ حدد ميل محور السينات.

(ب) هل محور الإحداثيات الصادي خطاً أفقياً أم رأسياً ؟ حدد ميل محور الصادات.

2 - حدد ميل كل من المستقيمات الآتية الموضحة في مستوى الإحداثيات الديكارتي أمامك.

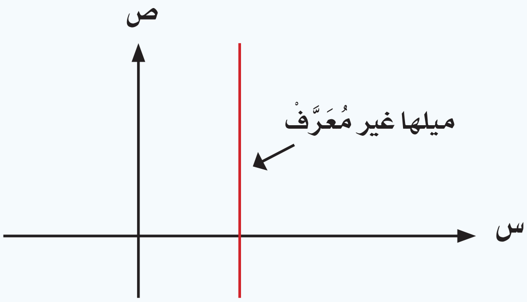


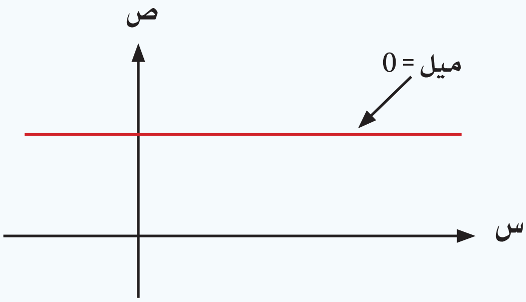
استقصاء:

يمكن تعميم نتائج التمرين(4 ب).

1 - كل المستقيمات الأفقية ميلها = 0

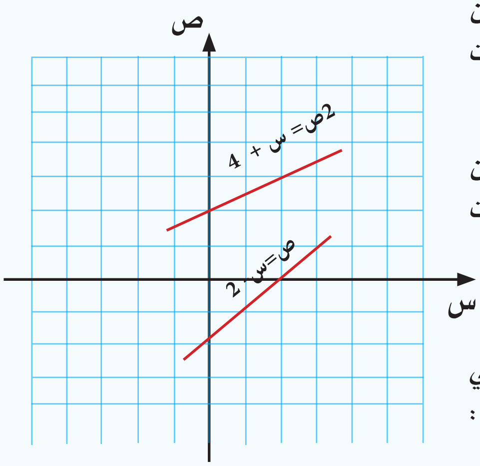
2 - كل المستقيمات الرأسية ميلها غير مُعَرَّفْ.





4 - 2 المعادلات الخطية على الصورة ص= م س +جـ، و المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

Linear Equations of the from y=mx + c and parallel Lines



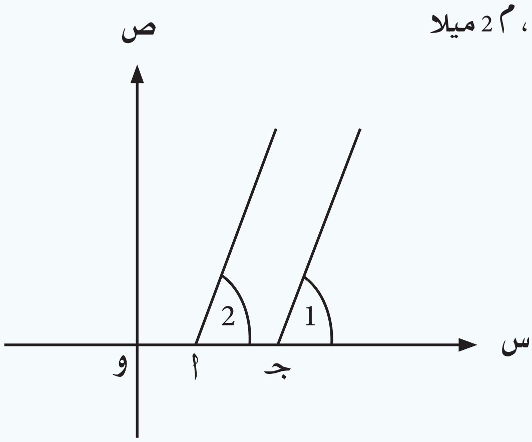
المستقيم 2ص= س + 4 يقطع محور الصادات عند وحدتين فوق نقطة الأصل ونقول أن الجزء المحصور من محور الصادات يساوي 2.

وبالمثل المستقيم ص=س- 2 يقطع محور الصادات عند وحدتين أسفل نقطة الأصل ونقول أن الجزء المحصور من محور الصادات يساوي - 2.

وفي النشاط التالي وتمرين 4 جـ سوف نكتشف المعلومات التي يمكن الحصول عليها من المعادلة الخطية التي على الصورة :

ص= م س +جـ

4 - 2 - 1 المستقيمان المتوازيان Parallel Lines



المستقيمان المتوازيان متساويان في الميل الفرض: م1 ، م 2 ميلا المستقيمين المتوازيين أ ب ، جـ ى على الترتيب

المطلوب: إثبات أن م 1 = م 2

الحل:

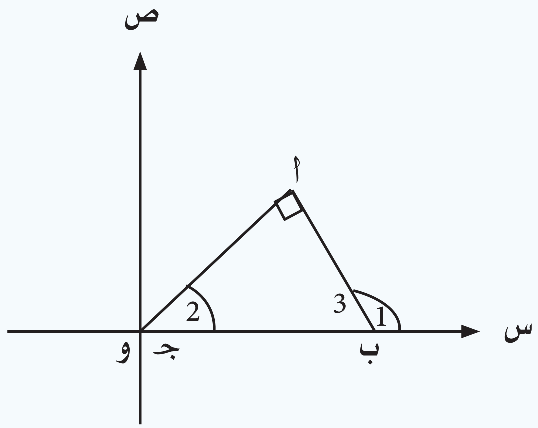
أ ب // جـ ى

$\measuredangle$1 = $\measuredangle$2 (بالتناظر)

ظا $\measuredangle$1 = ظا $\measuredangle$2

م 1 = م 2

2-2-4 المستقيمان المتعامدان



المستقيمان المتعامدان حاصل ضرب ميليهما= - 1

الفرض: أ ب $\perp$ أ جـ

المطلوب: إثبات أن ميل أ ب × ميل أ جـ = - 1

الحل:

$\measuredangle 1 = 90^0 =$ جـ

$\measuredangle 1 = 90^0 + \measuredangle 2$

ظا $1 =$ ظا $(90^0 + \measuredangle 2) = \frac{-1}{\text{ظا } \measuredangle 2}$

ظا $\measuredangle 1$ ظا $\measuredangle 2 = -1$

م$_1$ م$_2 = -1$

مثال 2 :

اثبت بواسطة الميل أن المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه هي النقط (3 ، 2) ، (-1 ، -2)، (6 ، -1) على الترتيب قائم الزاوية.

الحل ميل أ ب = $\frac{-2-2}{-1-3} = 1$ ، ميل أ جـ $= \frac{-1-2}{6-3} = -1$

ميل أ ب × ميل أ جـ $= -1$

المستقيمان متعامدان

Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ.

نشاط :

لدراسة معادلات الخط المستقيم باستخدام لوحة جيومتر (Geometer's Sketehped(GSP

ملحوظة:

إن GSP هي أداة تقانة معلومات قوية يمكن استخدامها في الإنشاءات الهندسية.

وفيما يلي دليل سريع للأدوات الأساسية في GSP.

Selection Arrow Tool

أداة سهم الاختيار.
لاختيار نقطة أو خط

Point Tool

أداة نقطة. لرسم نقطة

Compass Tool

أداة الفرجار. لرسم دائرة

Straightedge Tool

أداة لقياس الاستقامة

لرسم قطعة مستقيمة

Text Tool A

أداة نص لتسمية نقطة ، خط ، ......إلخ

ويمكنك بهذه الأدوات أداء بعض الإنشاءات الهندسية البسيطة.

الخطوة	العمل
1	لسرعة الوصول إلي البرنامج، قم بنقرة مزدوجة على أيقونة GSP أعلى سطح المكتب.
2	اضغط على كلمة "الرسم البياني" الموجودة في القائمة.
3	تخير كلمات "اطبق على السبكة"
4	تخير "صورة المعادلة" من على القائمة الموجودة ثم تخير "ميل/حصر".
5	اضغط على أداة قياس الاستقامة ثم اتجه يميناً لتتخير أداة الشعاع.
6	ارسم شعاعاً بالنقر على النقطتين حـ (−2،0) ، د (0،2)
7	انقر على أداة النص لتسميه النقطتين ج . د (بالنقر على النقط)
8	باستخدام أداة سهم الاختيار. انقر على الشعاع.
9	انقر على "يقيس" في القائمة ثم تخير "معادلة".
10	اسحب النقطة د لمواقع متنوعة كمل في الجدول اتالي.
11	املأ الجدول طبقاً لدراسة الرسم البياني على الشاشة، لقد تم ملء الصف الأول لك لتكمل الجدول على غراره.

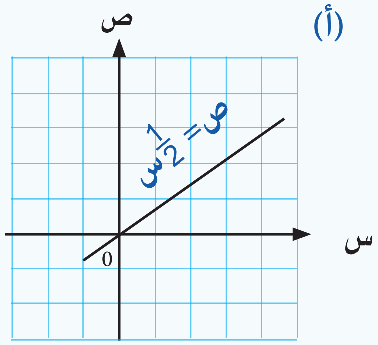
موضع النقطة د	الميل م	الجزء المحصور من محور الصادات	معادلة الخط المستقيم كما تتضح على الشاشة
(2، 0)	1	2	ص=1.0 س + 2.0
(5، 0)			
(4، 0)			
(1، 0)			
(0، −1)			
(0 ،−2)			

12 وعليه ، اكتب معادلة الخط المستقيم بميل = م وجزء محصور من محور الصادات = حـ.

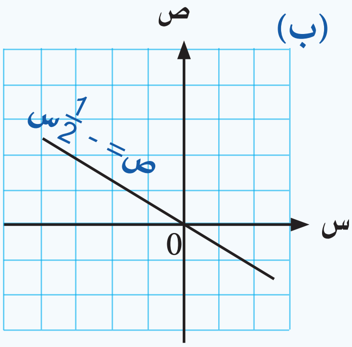
تمرين 4 جـ :

1 - بالنسبة لكل من الأشكال البيانية الخطية التالية.احسب الميل ثم قارن معاملات س (بمعنى العدد الملازم لـ س) بالميل الذي ستحصل عليه. بالنسبة لمستقيم معادلته ص = م س ما هو ميله؟

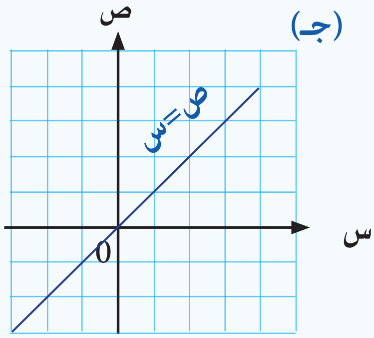
(أ)



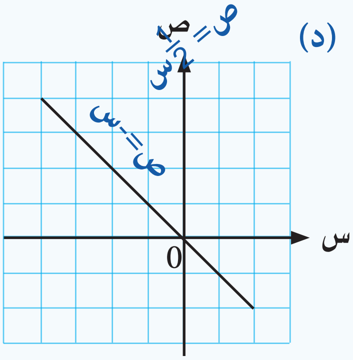
(ب)



(جـ)

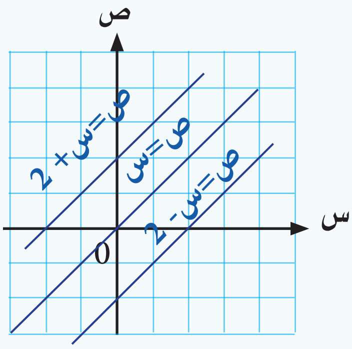


(د)

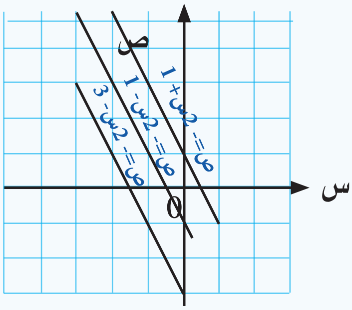


1 - بالنسبة للمستقيمات البيانية المرسومة ، احسب الميل باختبارك أي نقطتين تقعان على الخط المستقيم.

(أ)



(ب)



انقل وأكمل الجدول التالي باستخدان القيم التي حصلت عليها من الأشكال البيانية السابقة.

المعادلة	الميل	الجزء المحصور من محور الصادات.
ص=س+ 2		
ص=س		
ص=س- 2		
ص=- 2س+ 1		
ص=- 2س- 1		
ص=- 2س- 3		

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ص= م س +جـ فاكتب:

(أ) الميل (ب) الجزء المحصور من محور الصادات

3 - (أ) في المعادلة 2 (أ) هل المستقيمات متوازية؟ هل لهم نفس الميل؟

(ب) في المعادلة 2 (ب) هل المستقيمات متوازية؟ هل لهم نفس الميل؟

استقراء

يمكن تعميم النتائج الخاصة بتمرين 4 جـ

1 - مستقيم معادلته على الصورة ص = م س + جـ يكون ميله = م ، والجزء المحصور من محور الصادات = جـ

2 - المستقيمات المتوازية لها نفس الميل.

ملحوظة:
المستقيمان المتعامدان حاصل ضرب ميلهما يساوي (- 1)

مثال3:

أوجد الميل والجزء المحصورمن محور الصادات في كل من المستقيمات الآتية:

(أ) ص = 2س + 4

(ب) س + 2ص = 6

الحل:

(أ) بمقارنة المعادلة ص = 2س + 4

مع المعادلة ص = م س + جـ

نجد أن الميل م = 2

الجزء المحصور من محور الصادات جـ = 4

(ب) المعادلة س + 2ص = 6 يجب أولاً كتابتها على الصورة ص = م س + جـ

س + 2ص = 6

2ص = - س + 6

ص = - $\frac{1}{2}$ س + 3

بمقارنة المعادلة ص = م س + جـ

نجد أن الميل م = $\frac{1}{2}$

الجزء المحصور من محور الصادات جـ = 3

مثال4:

أكتب معادلة الخط المستقيم الذي:

(أ) ميله 3 ويحصر جزءً من محور الصادات طوله 2 - في الإتجاه السالب .

(ب) ميله - $\frac{1}{2}$ ويقطع جزءً من محور الصادات طوله 3 في الإتجاه الموجب .

الحل:

(أ) بفرض أن: م = 3

الجزء المحصور من محور الصادات جـ = -2

فتكون معادلة الخط المستقيم هي: ص = م س + جـ

أي أن: ص = 3س - 2

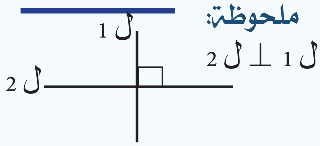
(ب) بفرض أن الميل م = - $\frac{1}{2}$

وأن الجزء المحصور من محور الصادات هو جـ = 3

معادلة الخط المستقيم هي: ص = م س + جـ

أي: ص = - $\frac{1}{2}$ س + 3

ملحوظة:



شرط تعامد مستقيمان

ميلهما م 1، م 2

هو م 1 م 2 = - 1

استخدم ص = م س + جـ

مثال 5:

بالنسبة للمستقيم الموضح على الشكل أوجد معادلته.

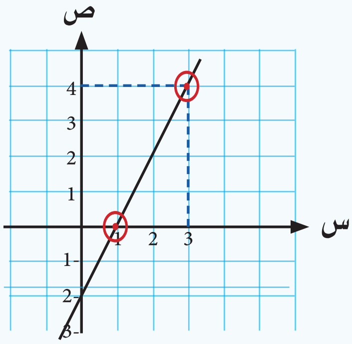
الحل:

للحصول على ميل م ، والجزء المحصور من محور الصادات جـ

اختر أي نقطتين وليكن (1،0)،(3،4) على المستقيم.

الميل م = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

الميل م = $\frac{4 - 0}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$



من الرسم البياني

الجزء المحصور من محور الصادات

هو جـ = -2

معادلة الخط المستقيم تكون :

ص = 2 س - 2

مثال 6 :

أوجد معادلة المستقيم ف الذي يحصر جزء طوله 3 وحدات من محور الصادات وعمودي على المستقيم ص = 8 س - 1

الحل: ميل المستقيم ص = 8 س - 1 هو م 1 = 8 ميل العمودي م 2 = - $\frac{1}{8}$

الجزء المحصور من محور ص جـ = 3

من المعادلة ص = م س + جـ ∴ معادلة المستقيم ص = - $\frac{1}{8}$ س + 3

ملحوظة :

من شرط التعامد

م 1 م 2 = - 1

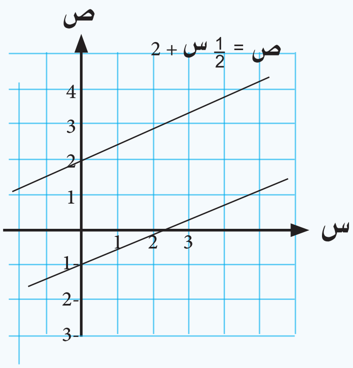
م 1 = $\frac{-1}{\text{م}_2}$

كذلك م 2 = $\frac{-1}{\text{م}_1}$

مثال 7 :

(أ) بالنسبة للخط ص = $\frac{1}{2}$ س + 2 حدد ميله

(ب) أوجد معادلة المستقيم ل الذي يحصر جزءاً طوله -1 من محور الصادات ويوازي المستقيم ص = $\frac{1}{2}$ س + 2



الحل:

(أ) بمقارنة المستقيم

ص = $\frac{1}{2}$ س + 2

مع ص = م س + جـ

نجد أن الميل م = $\frac{1}{2}$

(ب) ميل المستقيم ل = $\frac{1}{2}$

والجزء المحصور من محور الصادات جـ = -1

معادلة المستقيم ل هي: ص = $\frac{1}{2}$ س - 1

ملحوظة :
المستقيمات المتوازية لها نفس الميل.

استخدم ص = م س + جـ

تمرين 4 د :

1 - بالنسبة للمستقيمات الآتية:

(i) حدد ميلها.

(ii) حدد الجزء المحصور من محور الصادات.

(أ) ص= 2س- 4

(ب) ص= $\frac{1}{3}$س - 2

(جـ) 4س-ص = 6

(د) 6س+ 3ص= 8

2 - في كل حالة ، اكتب المعادلة الخاصة بكل مستقيم من البيانات الآتية:

	الميل	الجزء المقطوع من محور الصادات
(أ)	2	5
(ب)	8	- 5
(جـ)	-5	- $\frac{1}{2}$
(د)	$\frac{1}{2}$	4

3 - في كل حالة ، أوجد معادلة الخط المستقيم المعلوم جزءه المحصور من محور الصادات والذي يوازي المستقيم المعطى.

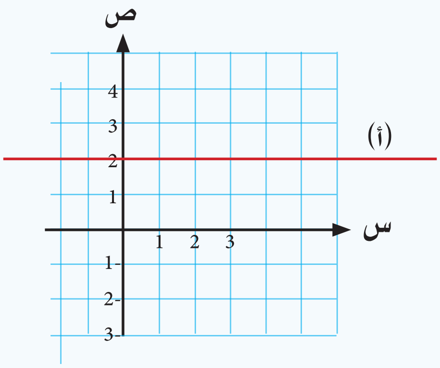
	الجزء المحصور من محور الصادات	يوازي
(أ)	5	ص=س+ 3
(ب)	- 4	2ص=س- 1
(جـ)	$\frac{1}{3}$	2س+ 2ص= 0

4 - في كل حالة ، أوجد معادلة الخط المستقيم المعلوم جزءه المحصور من محور الصادات والذي يكون عمودياً عل المستقيم المعطى.

	الجزء المحصور من محور الصادات	يوازي
(أ)	5	ص=س+ 1
(ب)	- 3	ص= 6 س - 1
(جـ)	$\frac{1}{2}$	ص= $\frac{1}{2}$ س - 9

3-4 معادلات المستقيمات الموازية للمحاور

Equations of Lines Parallel To the Axes



بالنسبة للخط المستقيم الأفقي (أ). ميله م = 0

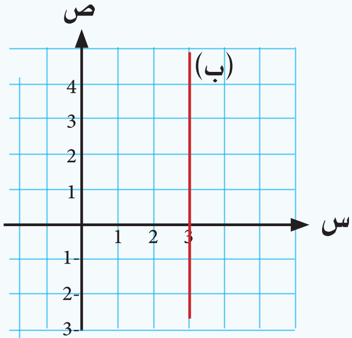
والجزء المحصور من محور الصادات جـ = 2

معادلة المستقيم (أ) هي : ص= م س + جـ

بمعنى ص= 0×س + 2

∴ ص = 2

لاحظ ذلك على الخط قيمة ص دائماً 2 لكل قيمة من قيم س.



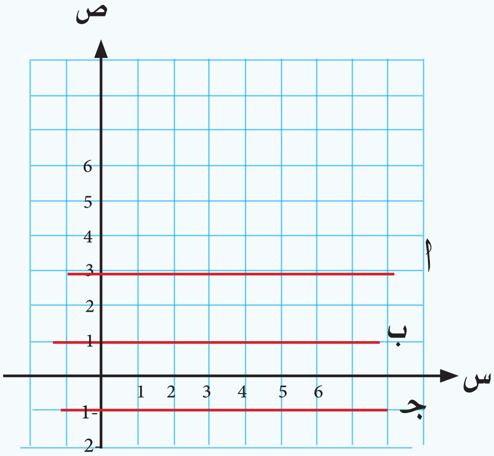
بعد ذلك ، اعتبر الخط الرأسي (ب) في هذه الحالة .

فإن قيمة س تساوي دائماً 3 لجميع قيم ص.

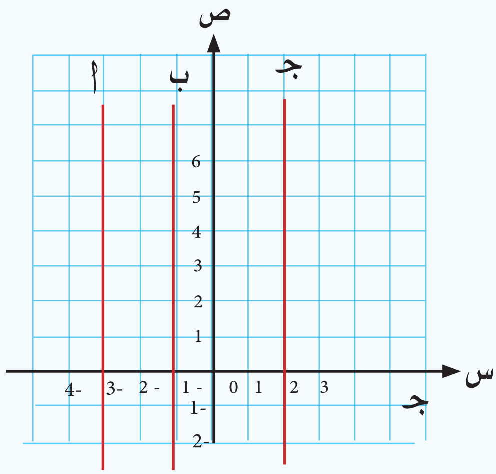
معادلة المستقيم (ب) تكون س = 3

تمرين 4 هـ :

1 -بالنسبة لكل خط أفقي في المستوى الديكارتي حدد قيمة ص لجميع قيم س . عندئذ اكتب المعادلة.
بصفة عامة. مامعادلة المستقيم الأفقي الذي يحصر جزءاً من محور الصادات طوله (ك) من الوحدات بعيداً عن نقطة الأصل؟

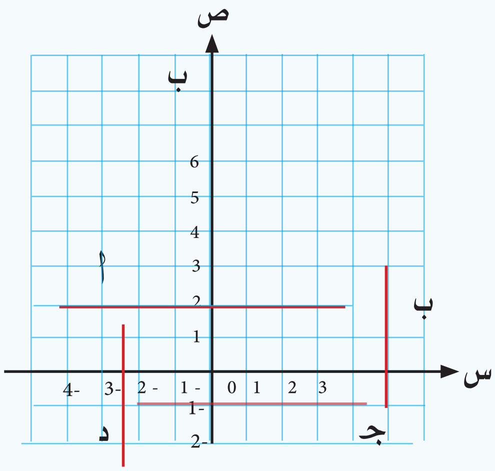


2 -بالنسبة لكل مستقيم رأسي في المستوى الديكارتي حدد قيمة س لكل قيمة من قيم ص وعندها حدد معادلته . بصفة عامة ما معادلة المستقيم الرأسي الذي يحصر جزءاً من محور السينات طوله (هـ) من الوحدات بعيداً عن نقطة الأصل؟



3 - (أ) هل محور السينات مستقيم رأسي أم أفقي؟ حدد معادلة محور السينات.
(ب) هل محور الصادات مستقيم رأسي أم أفقي ؟ حدد معادلة محور الصادات.

4 - حدد المعادلة لكل من المستقيمات الآتية:



بصفة عامة :

(أ) معادلة المستقيم الأفقي هي ص = ك

(ب) معادلة المستقيم الرأسي هي س = هـ

حيث ك ، هـ ثوابت

مثال 8 :

إذا كان ص = 2 س + جـ يمر بالنقطة أ (1، 3) فما قيمة جـ؟

الحل:

بما أن النقطة (1 ، 3) تقع على المستقيم س = 1 ، ص= ص= 3 يجب أن تحقق المعادلة

بالتعويض عن س = 1 ، ص=3 في المعادلة ص= 2س + جـ

نجد أن: 3 = 2 + جـ

جـ = 1

4-4 معادلة المستقيم بمعلومية ميله ونقطة تقع عليه

The Equation of a Lines Given Its Gradient and a Point on the Line

عندما يكون الميل والجزء المغطوع من محور الصادات بواسطة المستقيم معلوماً لدينا نعوض بقيمهما في المعادلة ص= م س + جـ للحصول على المعادلة خطية لهذا المستقيم . باستخدام طريقة مشابهة يمكن الحصول على معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله ونقطة تقع عليه.

مثال 9 :

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (1 ، 2) وميله - 3

الحل :

إذا كان الميل م = - 3

فإن معادلة المستقيم هي ص = - 3 س + جـ ⟵ (1)

بالتعويض بالنقطة (1 ، 2) في المعادلة (1)

نجد أن 2 = - 3 × 1 + جـ

جـ = 3 + 2 = 5

معادلة الخط المستقيم هي: ص = - 3 س + 5

ملحوظة:
قارن بالمعادلة
ص= م س + جـ
بمعنى س=1 ، ص = 2

مثال 10 :

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة (- 1 ، 2) وميله غير معرف.

الحل:

المستقيم له ميل غير معرف. إذن فهو مستقيم رأسي والذي معادلته تكون على الصورة س = ك حيث ك ثابت. وبما أنه يمر بالنقطة (- 1 ، 2) تكون معادلته على الصورة س = - 1

مثال 11 :

أوجد معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم 3ص+ 2س+ 6 = 0 ويمر بالنقطة (6، 2).

الحل:

$$3\,ص + 2\,س + 6 = 0 \longleftarrow (1)$$

$$3ص = - 2س - 6$$

$$ص = -\frac{2}{3}س - 2$$

$$م = -\frac{2}{3}$$

معادلة المستقيم الموازي إلي (1) هي ص = - $\frac{2}{3}$ س + جـ $\longleftarrow$ (2)

بالتعويض بالنقط (6 ، 2) في المعادلة (2)

$$2 = -\frac{2}{3} \times 6 + جـ$$

$$2 = - 4 + جـ$$

$$جـ = 2 + 4 = 6$$

المعادلة المطلوبة هي ص = - $\frac{2}{3}$ س + 6

ملحوظة:
اقسم الطرفين على 3
للوصول إلي الصيغة :
ص = م س + جـ
النقطة (2 ، 6)تحقق المعادلة (2) لأن المستقيم يمر بها.

5-4 معادلة المستقيم ، المار بنقطتين معلومتين

The Equation of a Line: Passing Through Two Given Points

مثال 12 :

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ (1، 3) ، ب(2، 5)

الحل:

$$ميل\ أ\,ب = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

$$= \frac{5 - 3}{2 - 1} = 2$$

معادلة الخط المستقيم هي: ص = 2س + جـ

بالتعويض بالنقطة (1، 3)

$$3 = 2 \times 1 + جـ$$

$$جـ = 1$$

معادلة الخط المستقيم ص= 2 س + 1

ملحوظة:
أوجد أولاً ميل الخط المستقيم

ملحوظة : هل يمكن التعويض بالنقطة (2 ، 5) بدلاً من (1 ، 3)؟

تمرين 4 و :

1 – إذا كان ص =3س+حـ يمر بكل من النقط التالية، أوجد قيمة جـ في كل من الحالات الآتية:

(أ) (1، 2) (ب) (–1، 2)

(جـ) (1، – 2) (د) (–1، – 2)

2 – إذا كانت النقطة (3 ، 2) تقع على المستقيم :

ص= 2س+ حـ أوجد جـ

3 – إذا كانت معادلة الخط المستقيم:

2 س+ص=4

(أ) أوجد ميل الخط المستقيم

(ب) إذا كانت النقطة (5،ك) تقع على المستقيم ، أوجد قيمة ك .

4 – خط مستقيم ميله 3 ويمر بالنقطة (0 ،7) أكتب معادلة هذا الخط المستقيم.

5 – أوجد معادلة كل من المستقيمات الآتية إذا عُلم ميلها ونقطة عليها.

	الميل	النقطة
(أ)	1	(2 ،3)
(ب)	– 2	(3، – 4)
(جـ)	$\frac{1}{3}$	(– 3 ،1)
(د)	0	($\frac{1}{2}$ ، 2)
(هـ)	غير معرف	(5، – 6)

6 – أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة (3 ، 5) وميله (– 4).

7 – بالنسبة لكل من المستقيمات الآتية اكتب معادلة المستقيم الذي يوازي كلاً منها ويمر بالنقطة المعطاة ، اجعل إجابتك على الصورة: ص= م س + جـ كلما أمكن.

(أ) ص= – 2س+ 3 (1 ، 2)

(ب) 2س + 3ص + 4 = 0 (– 3، 1)

(جـ) ص – 3 = 0 (3، – 2)

(د) س+ 4 = 0 (1، – 4)

8 – أكتب معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم: ص =3س+ 4 والذي يمر بالنقطة.

(أ) (0،0) (ب) (2 ، 5)

9 – الخط المستقيم ص= م س + جـ يوازي المستقيم ص=3س+ 2 ويمر بالنقطة (1، 2) ، أوجد قيم م ، جـ.

10 – اكتب معادلة المستقيم العمودي على المستقيم ص= $\frac{1}{2}$س + 5 ويمر بالنقطة (1 ، 4).

11 – أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين التاليتين:

(أ) (0، – 4) ، (4 ،0)

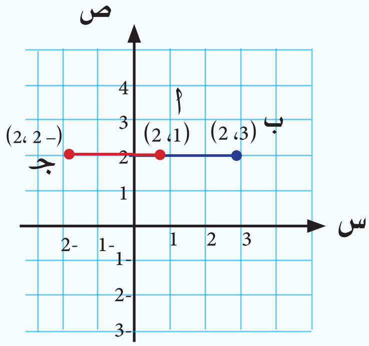
(ب) (6 ،5) ، (4 ،3)

(جـ) (2 ، – 2) ، (7، 8)

(د) [$\frac{1}{2}$ ، 1] ، [$\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{2}$]

12 – أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (– 1، 3) ويكون عمودياً على المستقيم المار بالنقطتين (3، 8)، (5 ، – 1).

6-4 المسافة بين نقطتين Distance B etween Two Points



المسافة بين النقطتين أ (1، 2)، ب (3، 2) هي أ ب = 3 − 1 = 2 ،

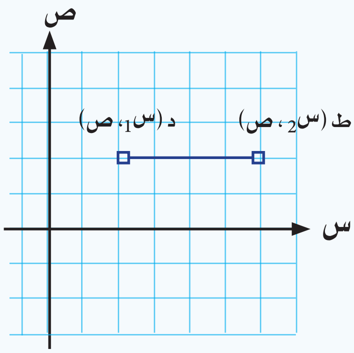
بينما المسافة بين النقطتين ا (1، 2)، جـ (−2، 2) هي : أ جـ = 1+2 = 3

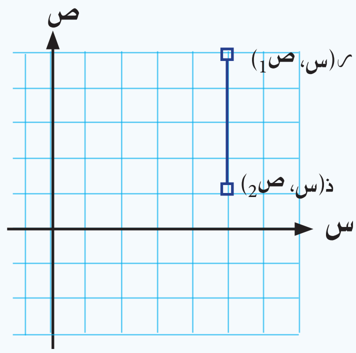
بصفة عامة إذا كان $س_2 > س_1$ فإن المسافة بين النقطتين:

د ($س_1$، ص)، ط ($س_2$ ، ص) تُعطى بالعلاقة د ط = $س_2 - س_1$

وبالمثل إذا كان $ص_2 > ص_1$ فإن المسافة بين النقطتين:

ر (س، $ص_1$). ذ(س، $ص_2$) تعطى بالعلاقة ذ ر = $ص_2 - ص_1$





مثال 13:

احسب المسافة بين النقطتين: ى (2، 4)، ز (−2، 1)

الحل :

حدد النقط كما هو موضح بالرسم لتكن ك النقطة (2، 1)

ى ك = 4−1 = 3

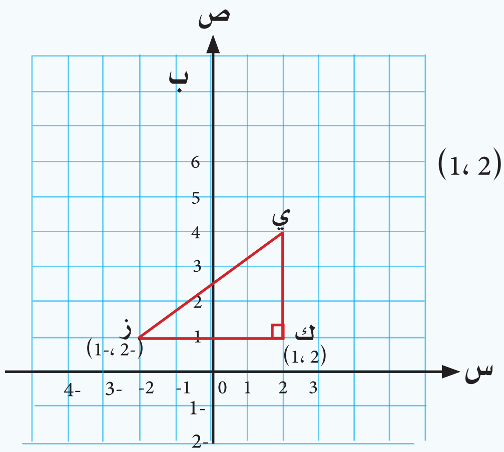
ز ك = 2 − (−2) = 4

وباستخدام نظرية فيثاغورث

$(\overline{ى ز})^2 = (\overline{ى ك})^2 + (\overline{ز ك})^2$

$= (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$

ى ز = $\sqrt{25}$ = 5 وحدات



يمكن استخدام خطوات المثال 13 لإيجاد صيغة رياضية عامة لحساب المسافة بين نقطتين.

لتكن نقطتين أ ($س_2$ ، $ص_2$) ب ($س_1$، $ص_1$) كما بالرسم ، جـ نقطة تجعل المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في جـ

لاحظ أن ب جـ // للمحور س ، ولهذا فإن ب جـ = $س_2 - س_1$

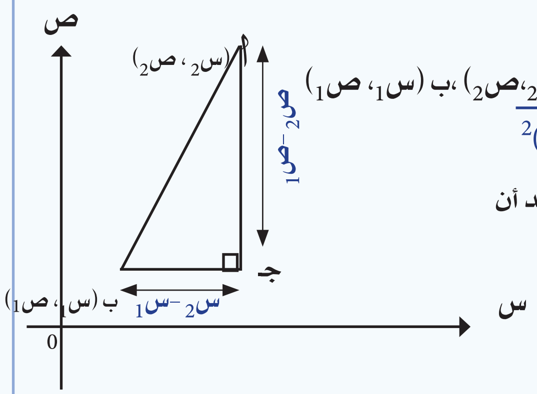
بينما جـ أ // محور الصادات ولهذا فإن جـ أ = $ص_2 - ص_1$

باستخدام نظرية فيثاغورث : $(أب)^2 = (ب حـ)^2 + (حـ ا)^2$

$= (س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2$

ولهذا فإن المسافة بين النقطتين أ $(س_2، ص_2)$، ب $(س_1، ص_1)$

$أ ب = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$



بتطبيق هذه الصيغة في المثال 16 ، نجد أن

$ى ز = \sqrt{(2-(-2))^2 + (4-1)^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ وحدات

ملحوظة :

$س_2 ، ص_2$

ى $(2 ، 4)$ ز $(-2 ، 1)$

$س_1 ، ص_1$

حاول استخدام ى كنقطة $(س_1، ص_1)$ ، ز كنقطة $(س_2، ص_2)$ ماذا تلاحظ ؟

مثال 14 :

أوجد قيمة س التي تجعل المسافة بين النقطتين أ $(2 ، 1)$، ب$(س ، 4)$ يساوي 5 وحدات.

الحل:

$أ ب = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

$5 = \sqrt{(س - 2)^2 - (4-1)^2}$

$5 = \sqrt{(س - 2)^2 + 9}$ نربع الطرفين

$25 = (س - 2)^2 + 9$

$(س - 2)^2 = 16$ بأخذ $\sqrt{\ }$ للطرفين

$س - 2 = \pm 4$

$س - 2 = 4$ أو $س - 2 = -4$

$س = 6$ أو $س = -2$

لـ س قيمتين هما -2 ، 6 تجعل المسافة بين النقطتين أ ، ب يساوي 5 وحدات.

تمرين 4 ح :

1 - احسب المسافة بين كل زوج من النقط التالية:

(أ) أ $(2 ،1)$ ، ب $(-2 ،4)$ (ب) حـ $(-4 ، 8)$ ، د $(4، 2)$ (جـ) ق $(0، 0)$ ، هـ $(-3 ، 4)$

2 - احسب المسافة بين كل زوج من النقط التالية ، مقرباُ الناتج إلي ثلاثة أرقام معنوية :

(أ) ر $(1،1)$ ، ذ $(2، 3)$ (ب) ت $(5، -8)$ ، ى $(-1 ، 3)$ (جـ) س $(-5 ، 5)$ ، ص $(-8 ، -9)$

3 - اوجد (د ط)2 لكل زوج من النقط التالية :

(أ) د $(1،1)$ ، ط $(2، 3)$ (ب) د $(-2، 4)$ ، ط $(3 ، -5)$

4 - رؤوس المثلث ل $(0، -5)$ ، م $(-9 ، 7)$ ، ك $(16 ، 7)$ احسب طول:

(أ) ل م (ب) م ك (جـ) ك ل (د) محيط المثلث

5 - رؤوس شكل رباعي ل $(-3، 4)$ ، م $(2، 16)$ ، ن $(8، 6)$ ، و $(0،0)$ احسب محيط الشكل الرباعي ، مقرباً إجابتك لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

6 - د (4، 0)، ط (10، 4)، ر (2، 6)، (و) نقطة الأصل،
أوجد:

(أ) (د ط)^2

(ب) ميل المستقيم ط ر.

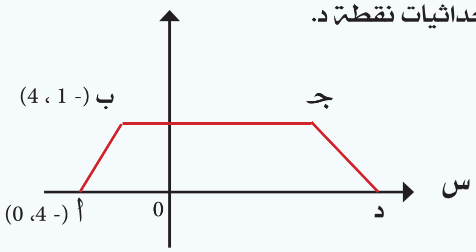
(جـ) معادلة المستقيم المار بالنقطة ط موازياً المستقيم و ر.

7 - أ ب جـ د شبه منحرف فيه ب حـ = 8 وحدات،
فإذا كانت النقطة أ (- 4، 0)، ب (- 1، 4) وكانت
مساحة شبه المنحرف 48 وحدة مربعة. احسب:

(أ) إحداثيات النقطة جـ

(ب) طول أ ب.

(جـ) إحداثيات نقطة د.



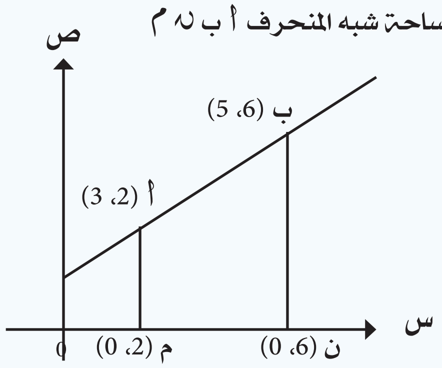
8 - في الشكل ب أ مرسوم بحيث يقابل محور الصادات
في نقطة حـ. فإذا كان أ (2، 3)، ب (6، 5)، احسب:

(أ) إحداثيات النقطة حـ

(ب) ميل المستقيم أ ب

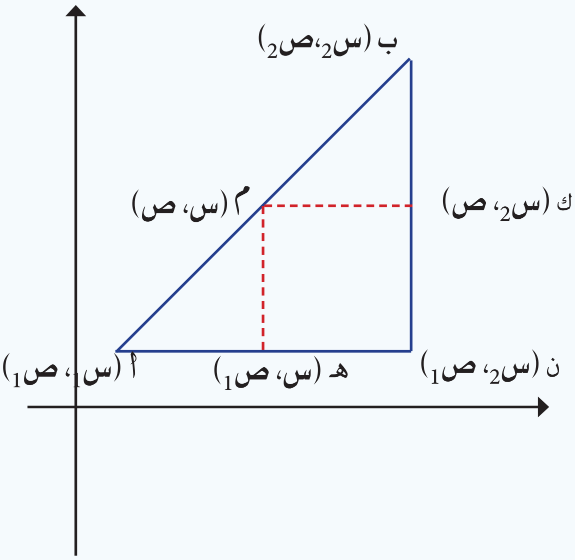
(جـ) طول أ ب

(د) مساحة شبه المنحرف أ ب ن م



7-4 نقطة تنصيف القطعة المستقيمة Midpoint of the Line Joining Two Points

م (س، ص) هي نقطة تنصيف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين أ (س$_1$، ص$_1$) ب (س$_2$، ص$_2$). من الشكل:



أ م = م ب

$\measuredangle$ م أ هـ = $\measuredangle$ ب م ك

$\measuredangle$ أ هـ م = $\measuredangle$ م ك ب = 90^0

Δ م أ هـ، Δ ب م ك متطابقان.

أ هـ = م ك

س - س$_1$ = س$_2$ - س

2س = س$_1$ + س$_2$

س = $\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2}$

وبالمثل م هـ = ب ك

ص - ص$_1$ = ص$_2$ - ص

2ص = ص$_1$ + ص$_2$

ص = $\frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2}$

ومن ثم فإن:

إحداثيات نقطة التنصيف للمسافة أ (س$_1$، ص$_1$) ب (س$_2$، ص$_2$) هي: $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} \right)$

مثال 15:

أوجد إحداثيات نقطة تنصيف القطعة المستقيمة الواصلة بين زوج النقاط التالية :

(أ) ا (3، 4) ، ب (5 ،6)

(ب) د (– 1 ، 2) ، ط (3 ، – 4).

الحل

(ا) ا (3 ،4) ، ب (5 ،6)

(س$_1$، ص$_1$) ، (س$_2$، ص$_2$)

نقطة تنصيف ا ب = $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$

$= \left(\frac{3 + 5}{2} ، \frac{4 + 6}{2}\right)$

$= (4 ، 5)$

(ب) د (– 1 ، 2) ، ط (3، – 4).

(س$_1$، ص$_1$) (س$_2$، ص$_2$)

نقطة تنصيف د ط = $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$

$= \left(\frac{-1 + 3}{2} ، \frac{2 - 4}{2}\right)$

$= (1، – 1)$.

ملحوظة :

قد ترغب في استخدام أ (3، 4) مثل (س$_2$، ص$_2$) ، ب (5، 6) مثل (س$_1$، ص$_1$).

هل تحصل على نفس النتيجة ؟

مثال 16 :

النقطة م(– 1، 2) نقطة تنصيف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين ا ، ب فإذا كانت إحداثيات النقطة ا هي (2، 3). أوجد إحداثيات ب.

الحل:

فلتكن إحداثيات النقطة ب (هـ،ك)

م = نقطة تنصيف أ ب

$(-1 ، 2) = \left(\frac{2 + هـ}{2} ، \frac{3 + ك}{2}\right)$

أي $\frac{2 + هـ}{2} = -1$ ، $\frac{3 + ك}{2} = 2$

2 + هـ = – 2 ، 3 +ك = 4

هـ = – 4 ، ك = 1

إحداثيات النقطة ب (– 4 ، 1)

ملحوظة :

أ (2، 3) ب (هـ ، ك)

(س$_1$، ص$_1$) (س$_2$، ص$_2$)

تمرين 4 ط :

1 - أوجد إحداثيات نقطة تنصيف القطع المستقيمة المرسومة بين كل من أزواج النقاط التالية:

(أ) أ (1 ، 2) ، ب (3 ، 4).

(ب)حـ (- 2 ،3) ، د (4 ، - 5).

(جـ) ح (3، - 2) ، ف (-3، 4)

(د) ق (- 1، - 3) ، هـ(5، 3)

(هـ)ط (- 3 ، - 2) ، ى (- 1، - 1)

2 - م نقطة تنصيف القطعة المستقيمة المستقيمة الواصلة بين النقطتين د ، ط أوجد إحداثيات النقطة (د) إذا كانت إحداثيات :

(أ)م (1، 2) ، ط (3، 4)

(ب) م (- 3 ، - 2) ، ط (1، 1)

3 - مثلث رؤوسه ا (1 ،4) ، ب (6 ،0) ، حـ(12 ،4)

احسب:

(أ) ميل المستقيم أ ب .

(ب) إحداثيات نقطة تنصيف $\overline{\text{ب حـ}}$.

4 - متوازي أضلاع د ط ر ذ له الرؤوس د (- 2 ، 3) ، ط (0، - 2) ، ر(4 ،1) أوجد إحداثيات النقطة ذ.

5 - النقطتان أ ، ب إحداثياتهما (- 6 ،2) ، (6، 6) على التوالي :

(أ) أوجد إحاثيات نقطة تنصيف $\overline{\text{أ ب}}$.

(ب) احسب طول أ ب .

(جـ) (i) أوجد ميل المستقيم أ ب .

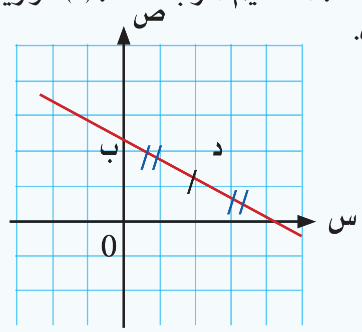
(ii) أوحد معادلة المستقيم أ ب .

6 - المستقيم 2ص+س= 6 يقطع محور السينات في النقطة أ ومحور الصادات في النقطة ب . فإذا كانت النقطة د هي النقطة تنصيف $\overline{\text{أ ب}}$.(و) نقطة الأصل.

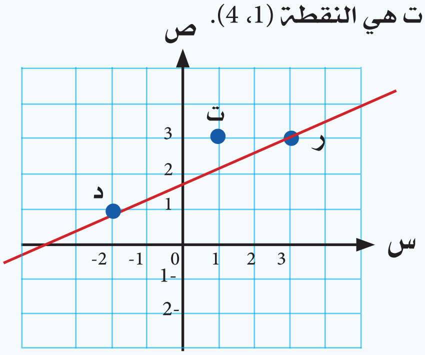
أوجد :

(أ) إحداثيات النقطة ا

(ب) معادلة المستقيم المار بالنقطة (د) موازياً محور السينات.



7 - في الشكل البياني المرسوم (و) نقطة الأصل . ل هو الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين د (- 2 ،1) . ر (4 ،4) ، ت هي النقطة (1، 4).



(أ) أوجد :

(i)ميل المستقيم ل .

(ii)معادلة المستقيم ل

(iii) معادلة المستقيم المار بالنقطة (ت) موازياً المستقيم ل.

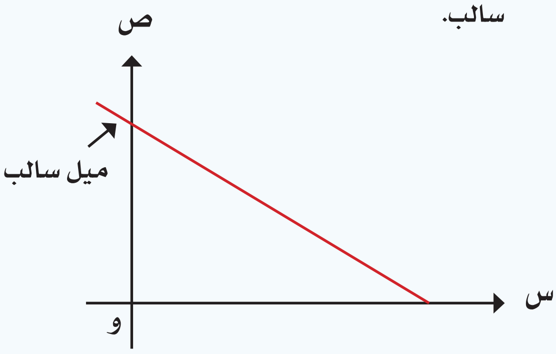
(ب) (i) اكتب إحداثيات النقطة م التي تنصف $\overline{\text{د ر}}$.

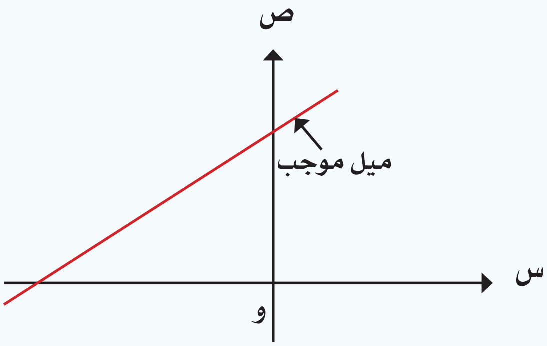
(ii) احسب مساحة $\triangle$ ت م ر.

الملخص:

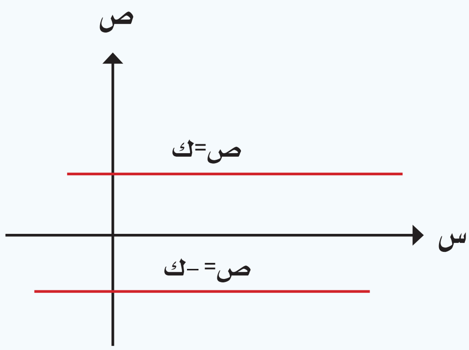
1 - ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (س$_1$، ص$_1$)، (س$_2$، ص$_2$) = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

2 - بصفة عامة المستقيم الذي يميل إلي أعلى اليمين له ميل موجب والذي يميل إلي أسفل اليمين له ميل سالب.

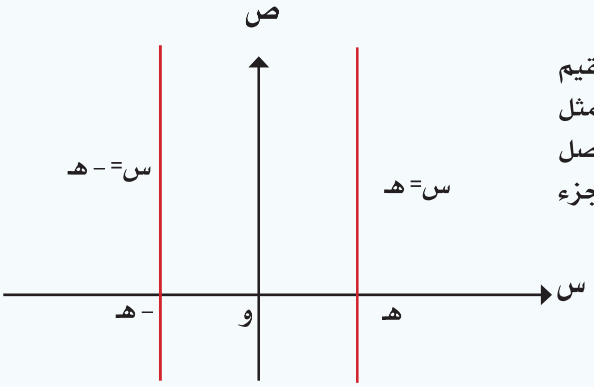




3 - ميل كل المستقيمات الأفقية = صفر ، ومعادلة المستقيم الأفقي هي : ص=ك ، حيث ك هي عدد الوحدات التي تمثل الجزء المحصور من محور الصادات فوق نقطة الأصل ، أو: ص= -ك حيث -ك هي عدد الوحدات التي تمثل الجزء المحصور أسفل نقطة الأصل.



4 - ميل جميع المستقيمات الرأسية غير معرف ومعادلة المستقيم الرأسي هي : س= هـ ، حيث هـ هي عدد الوحدات التي تمثل الجزء المحصور من محور السينات على يمين نقطة الأصل ، أو : س= - هـ ، حيث -هـ هي عدد الوحدات التي تمثل الجزء المحصورمن محور السينات على يسار نقطة الأصل.



5 - المستقيم الذي معادلته على الصورة ص= م س + جـ ميله يساوي م ويحصر من محور الصادات جزءاً طوله جـ.

6 -المستقيمات المتوازية لها نفس الميل.

7 - المستقيمان المتعامدان حاصل ضرب ميلاهما = -1

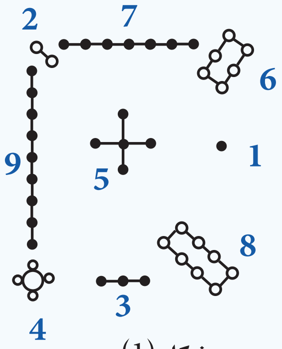
8 - المسافة بين نقطتين أ (س$_1$، ص$_1$) ، ب(س$_2$،ص$_2$) تعطى بالعلاقة أ ب = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

9 - نقطة تنصيف أي قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين أ (س$_1$، ص$_1$). ب (س$_2$،ص$_2$) هي م وتعطى بالعلاقة:

م = $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$

رياضيات ممتعة:

المربعات السحرية :



شكل (1)

يفترض في الأساطير الصينية أن أول مربع سحري كان على ظهر سلحفاة ظهرت أمام الامبراطور يو (2200 سنة قبل الميلاد) أثناء وقوفه على ضفة النهر الأصفر وكان شكل هذا المربع كما يتضح في الشكل (1).

تعبر النقاط المفرغة عن الأعداد الزوجية ، تعبر النقاط المظلة عن الأرقام الفردية يمثل المركز رقم 5 عناصر الأرض وحولها أربعة محاور متوازنة ، 4 ، 9 يرمزان إلي المعدن 2، 7 يرمزان إلي النار 1، 6 يرمزان إلي الماء 3، 8 يرمزان إلي الخشب.

أحد المربعات السحرية المعروفة (كما في الشكل 2) تم عمله عن طريق فنان ألماني Albrecht Durer عام 1514 ، ظهر في عمله Melancholia والذي عرض من خلاله بعض الأدوات العلمية.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

شكل (2)

في هذا الشكل:

نلاحظ التاريخ 1514 في منتصف الصف الأخير.

أيضا 1، 2 ، ....،16 استخدمت لمرة واحدة.

مجموع كل من الصفوف الأفقية والأعمدة والقطران ، والمربعات الأربع الداخلية 34 .

(ا) ما هو مجموع الأركان الأربعة للمربع.

(ب) ادرس أربعة مربعات (2×2) والتي يشكل كل منها ربع المربع الكبير، ما هو مجموع الأعداد في كل مربع من هذه المربعات.

(جـ) في كل صف يوجد رقمان متجاوران مجموعهما 15 ، ورقمان آخران مجموعهما 19

(د)اجمع تربيع الأرقام لكل صف :

$(16)^2+(3)^2+(2)^2+(13)^2 \quad (8)^2+(11)^2+(10)^2+(5)^2$

$(4)^2+(15)^2+(14)^2+(1)^2 \quad (9)^2+(6)^2+(7)^2+(12)^2$

افعل نفس الشئ مع الأعمدة هل النمط واحد ؟

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

شكل (3)

المربع المكسور (أو المائل) شكل (3) اجمع الأرقام في الجوانب المتقابلة ما هو مجموع كل منها ؟

4	9	2
3	5	7
8	1	9

شكل (4)

يظهر الشكل (4) مركز ختم من التبت القديم . كل الأعداد الصحيحة من 1، 9 استخدمت. اجمع الأرقام في كل صف ، وفي كل عمود ، وفي كل قطر.

ورقة مراجعة 5:

القسم أ

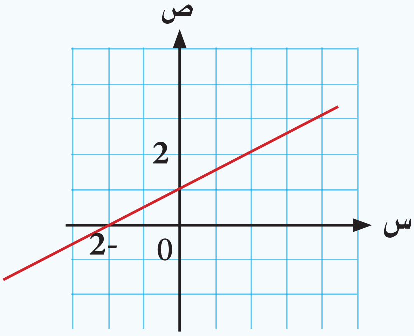
1 – أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل من أزواج النقاط التالية:

(أ) و (0 ، 0) ، أ (4 ، 6).

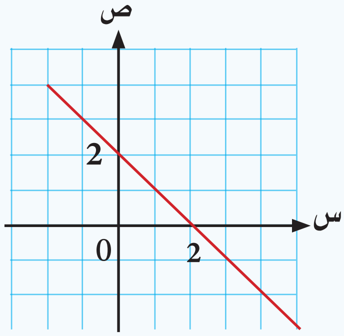
(ب) ب (1 ،1) ، حـ (2 ، 3).

2 – أوجد ميل كل من الخطوط الآتية:

(أ)

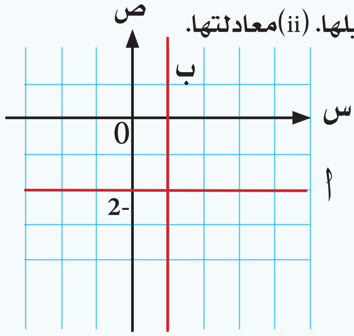


(ب)



3 –بالنسبة للخطوط المعطاة (أ) ، (ب) حدد :

(i)ميلها. (ii)معادلتها.



4 – بالنسبة لكل من المعادلات الآتية :

(أ) ص= – 2 س + 4 (ب) 3س – 2ص = 6

أوجد: (i) ميلها.

(ii) الجزء المقطوع من محور الصادات.

القسم ب

5 – (أ) اكتب فيما يلي معادلة الخط المستقيم الذي :

(i) ميله – 2 ويحصر من محور الصادات جزءاً طوله 5 وحدات.

(ii) ميله $\frac{1}{4}$ ويحصر من محور الصادات جزءاً طوله – 3.

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يحصر من محور الصادات جزءاً طوله 1 وحدة طول ، و يوازي المستقيم الذي معادلته 2ص = س+ 1.

6 – أوجد معادلة الخط المستقيم.

(أ) الذي يمر بالنقطة (2، 3) وميله – 5.

(ب) يمر بالنقطة (1، 2) وميله غير معرف.

7 – أوجد معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم 2 س + 3 ص + 5 = 0 ، ويمر بالنقطة (– 6، 13)

8 – بمعلومية النقطتين أ (1،1) ، ب (– 2، 3) .

(أ) احسب المسافة بين النقطتين.

(ب)أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين.

(جـ)إحداثي المنتصف بين أ ، ب .

القسم جـ

9 – (أ) إذا كانت النقط (2، 3)، (–1، 2) ، (– 2 ،– 7) هي رؤوس المثلث أ ب حـ على الترتيب ، فأوجد معادلة العمودي النازل من أ على ب حـ .

(ب) أوجد معادلة المستقيم العمودي على حـ د من نقطة هـ وبفرض أن هذا المستقيم قطع محور الإحداثيات في هـ ، أوجد مساحة Δ أ ب حـ .

10 – أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (2 ، – 3) إذا كان :

أولاً: موازياً للمستقيم 2 س – 5ص + 7 = 0

ثانياً : عمودياً عليه

ثالثاً: موازياُ لمحور السينات.

الإجابات Answers:

الفصل الاول :

تمرين 1 أ:

1 - (أ) ✓ (ب) ✗ (جـ) ✗ (د) ✓ (هـ) ✓

2 - (أ) { أحمد ، عمر ، سهام ، مبروكة ، محمد ، عبدالهادي}.

(ب) {31 ، 37}

(جـ) { عنب ، خوخ ، مشمش ، شمام ، بطيخ ، .... }.

(د) { رياضيات ، فيزياء ، لغة عربية ، تاريخ ، تربية إسلامية ، .... }.

3 - (أ) {{ 1 } ، { 2 } ، {1 ، 2} ، ∅ } .

(ب) {{ ر } ، { ص } ، { ع } ، { ر ، ص} ، { ر ، ع } ، { ص ، ع } ، { ر ، ص ، ع } ، ∅ } .

(جـ) ∅ (د) {{ ل } ، ∅ }

4 - أ = ع ، ب = و ، جـ = ن ، د = هـ ، أ ≡ جـ ≡ ز

5 - (أ) (3، 4) (1، 2، 3 ،4، 5، 6) (1، 2) .

(ب) (7، 8، 9، 10)

(جـ) (1، 2، 5، 6، 7، 8، 9، 10)

(د) (1، 2، 3، 4، 5، 6)

6 - (أ) ✓ (ب) ✗ (جـ) ✗ (د) ✓ (هـ) ✓ (و) ✓

تمرين 1 ب يترك للطالب

تمرين 1 جـ يترك للطالب

تمرين 1 ء

(أ) أ × ب = { (5 ،1) ، (5، $\sqrt{3}$) ، (6، 1) ، (6، $\sqrt{3}$) ، (7، 1) ، (7، $\sqrt{3}$) }

ب × أ = { (1 ، 5) ، (1،6) ، (1،7) ، ($\sqrt{3}$ ، 5) ، ($\sqrt{3}$ ، 6)، ($\sqrt{3}$ ، 7) }

(ب) (1) أ^2 = {(1، 1) ، (1، 2) ، (1، 3) ، (2، 1) ، (2، 2) ، (2، 3) ، (3، 1) ، (3، 2) ، (3، 3)}.

ب^2 = { (2،2)،(2، 3)،(2، 4)،(3، 3)،(3، 4)،(3، 2)،(4، 2)،(4، 3)،(4، 4)}.

أ × ب = {(1، 2) ، (1، 3) ، (1، 4) ، (2، 2) ، (2، 3) ، (2، 4) ، (3، 2) ، (3، 3) ، (3، 4)}.

ب × أ = {(2، 1) ، (2، 2) ، (2، 3) ، (3، 1) ، (3، 2) ، (3، 3) ، (4، 1) ، (4، 2)، (4، 3)}.

(2) أ^2 ∩ ب^2 = {(3،3) ،(2،3) ،(3،2) ،(2،2)}

(3) أ^2 ∪ ب^2 = { (1،1) ،(2،1) ،(3،1)،(1،2) ،(2،2) ،(2

،(3،(1،3)،(2،3)،(3،3)،(2،4)،(3،4) ،

{ (4،4)،(3،4)،(2، 4)

(4) (أ × ب) ∩ (ب × أ) = {(3،3) ،(2،3) ،(3،2) ،(2،2)}

(جـ) يترك للطالب إثبات صحة العلاقات.

تمرين 1 هـ

(أ) ع$_1$ = ∅

ع$_2$ = { (8 ،5)، (7 ،5) ،(8 ،4) ،(7 ،4) ،(8 ،3) ،(7، 3) }.

ع$_3$ = ∅

ع$_4$ = { (8 ،5)، (7 ،5) ،(8 ،4) ،(7 ،4) ،(8 ،3) ،(7، 3) }.

(ب) نع$_1$ = ∅ ، مع$_1$ = ∅

نع$_2$ = (4) (3، 4، 5) مع$_2$ =(7، 8).

(جـ) نع$_3$ =∅ ، مع$_3$ = ∅

نع$_4$ = (4) (3، 4، 5) مع$_4$ (7، 8).

ورقة المراجعة 1

(1)

(i) س' = (1، 3، 5، 7، 8، 9، 10)

ص' = (4 ، 6، 7 ، 9، 10)

ع' = (2 ، 4، 6 ،8، 10)

م' = (1، 3، 5، 7، 9 ، 10)

(ii) س ∪ ص = (1، 2، 3، 4، 5، 6، 8)

س ∪ ع = (1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 9)

س ∪ م = م

ص ∪ م = (1، 2، 3، 4، 5، 6، 8)

(iii) س ∩ ص = {2}

س ∩ ع = { }

س ∩ م = س ، ص ∩ م = (2، 8)

(iv) س - ص =(4، 6)

س - ع = (2، 4، 6)

ص - ع = (2، 8)

(v) ص ∩ ع' = (2 ، 8)

س' ∩ ص = (1 ، 3 ، 5 ، 8)

ع' ∩ م' = ∅ ، ع' ∪ م' = ش

(vi) (س ∪ ص) ∪ ع = (1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10)

س ∪ (ع ∪ م) = (1، 2، 3، ....، 7، 8، 9)

(vii) (س ∩ ص) ∪ ع = (1، 2، 3، 5، 7، 9)

س ∩ (ع ∩ م) = ∅

(2)

أ- س ∪ ص = (0، 1، 2، ....، 8، 10،....، 15)

ب- س ∩ ص = ∅

جـ- س - ص = س

د- ص - س = ص

هـ- س - ص' = ∅

و- ص' - س = (1، 2، 3، 7، 8، 9، 16، 17، ...)

(3) أ = (2 ، 3، 4) ، ب = (2 ، 4) جـ = (1، 2، 3)

أ ∩ ب ∩ جـ = (2)

أ' ∪ ب' = (1، 3، 5)

(أ ∩ ب)' = (1، 3، 5)

أ ∪ ب ∪ جـ = (1، 2، 3، 4)

أ' ∩ ب' = (1 ، 5)

(أ ∪ ب)' = (1 ، 5)

(4) يترك للطالب . (5) يترك للطالب .

(6) س ∩ ص 9، 5

س ∪ ص 14 ، 9

(7) يترك للطالب . (8) يترك للطالب .

(9) (أ) س ⩾ 5. (ب) س ∈ ع$^-$ (جـ) س ∈ ع - {0 ، 5}

(د) س ∈ (1 ، ∞) (هـ) س ∈ ع

(10) (أ) غير متساويين (ب) غير متساوية لعدم وجود شرط الاختصار .

(11)

أ- ل = {(1،1) ،(2،2) ،(3،3)}

ب- م = {(2،1) ،(3،1) ،(3،2)}

جـ- ن = {(2،1) ،(2،2) ،(2،3)}

د- ر = {(2،1)،(3،1) ،(2،2) ،(1،1) ،(3،2) ،(3، 2)}

هـ- ي = {(3،2) ،(2،3)}

الفصل الثاني :

تمرين 2 أ:

(1) (أ) 3×3×3×3×3 . (ب) 5×5×5

(جـ) 2×2×2×2×2×2 (د) س×س×س×س

(هـ) ص×ص×ص×ص×ص×ص

(2) (أ) 2^4 (ب) 10^4 (جـ) $ط^6$ (د) $أ^4$

(3) (أ) 9^3 (ب) 3^6

(4) (أ) 5^3 (ب) 4^3 (جـ) 7^2 (د) 10^3

(هـ) 6^3 (و) 2^8

تمرين 2 ب:

(1) (أ) 2^5 (ب) 3^4 (جـ) 2^9 (د) $م^د$

(هـ) $أ^{16}$ (و) $س^{12}$ (و) $ع^{14}$

تمرين 2 جـ:

(1) (أ) $3س^9$ (ب) $8أ^{12}$ (جـ) $2ص^6$

(د) $7جـ^{13}$ (هـ) $9م^5$ (و) $12ن^{12}$

(2) (أ) $س^7 ص^2$ (ب) $أ^7 ب^7$ (جـ) $ص ع^{15}$

(د) $جـ^3 د^{13}$ (هـ) $س^8 ص$ (و) $أ^{10} ب^2$

(ز) $6 س^2 ص^5$ (ح) $16أ^7 ب^4$ (ط) $21ن^4 هـ^7$

(ي) $15د^3 ط^4$ (ك) $12م^7 ن^7$ (ل) $45س^6 ص^5$

تمرين 2 ء:

(1) $2^1 = 2$ ، $2^3 = 8$ ، $2^4 = 16$ ، $2^5 = 32$ ،

$2^6 = 64$ ، $2^7 = 128$ ، $2^8 = 256$ ، $2^9 = 512$ ، $2^{10} = 1024$

(2) (أ) 16 (ب) 10^5 (جـ) 32

(د) $ن^5$ (هـ) 128 (و) $س^3$

تمرين 2 هـ:

(1) (أ) ص (ب) $أ^2 ص^4$ (جـ) $ن^3 هـ^6$

(د) هـ د (هـ) $ص^3 ع^{15}$

(2) (أ) 128 (ب) 243 (جـ) 512 (د) 64

(هـ) 2187 (و) 2 (ز) 3

(3) (أ) 1 (ب) $أ^3$ (جـ) $ت^4$ (د) $أ^3$ (هـ) 15ن

(و) $4س^5$ (ز) $ت^2$ (ح) $ن^7$ (ط) $جـ^7$

تمرين 2 هـ:

(1) 1 (2) 1 (3) 1 (4) 1 (5) -5 (6) -3

تمرين 2 ز:

(1) 3^8 (2) 5^{18} (3) 8^{20}

(4) $ع^{15}$ (5) $أ^{24}$ (6) $م^6$

تمرين 2 ح:

(1) (أ) $أ^8$ (ب) $م^{14}$ (جـ) $م^{13}$ (د) $ص^{14}$

(2) (أ) أ (ب) $ذ^5$ (جـ) $هـ^{38}$ (د) $ذ^6$

(هـ) $ص^{17}$ (و) 1

(3) (أ) $أ^{16}$ (ب) $ب^{19}$ (جـ) $م^{22}$ (د) $ل^{29}$

(هـ) $ص^{50}$ (و) هـ (ز) $ص^{24}$

تمرين 2 ط:

(1) (أ) $2^2 \times 5^2$ (ب) $6^4 \times 7^4$ (جـ) $أ^5 ب^5$

(د) $أ^6 ب^6$ (هـ) $9أ^2$ (و) 1

(ز) $216 جـ^3$ (ح) 1 (ط) $9أ^2 ب^2$

(ي) $أ^{-6} ب^{-6}$ (ك) $27أ^6 ب^9$ (ل) 1

تمرين 2 ي:

(1) (أ) $\frac{4^5}{5^5}$ (ب) $\frac{2^3}{7^3}$ (جـ) $\frac{أ^5}{ب^5}$ (د) $\frac{م^4}{ن^4}$

(هـ) $\frac{368}{ت^3}$ (و) $\frac{64}{س^4}$

(2) (أ) $\frac{س^4}{ص^2}$ (ب) $\frac{م^4}{ن^2}$ (جـ) $\frac{أ^4}{ب^2}$ (د) $\frac{ذ^9}{ت^3}$

تمرين 2 ك:

(1) (أ) $\frac{1}{أ^3}$ (ب) $\frac{1}{م^5}$ (جـ) $\frac{1}{أ^4}$

(د) $\frac{1}{(4س)^2}$ (هـ) $\frac{1}{5س^5 ص^7}$

(2) (أ) $\frac{1}{2^4}$ (ب) 2^3 (جـ) $\frac{1}{10^4}$ (د) $\frac{1}{8^7}$

(هـ) $\frac{6}{أ^5}$ (و) 1 (ز) $\frac{ب}{أ}$ (ح) $\frac{1}{س ص^3}$

(3) (أ) $\frac{1}{2^2}$ (ب) 3^5 (جـ) 7^2 (د) $\frac{1}{ذ^6}$

(هـ $ن^6$ (و) 3 د (ز) 4 د (ح) $\frac{4}{أ^{10}}$

(3) (أ) $\frac{1}{2^{12}}$ (ب) $\frac{1}{10^2}$ (جـ) 1 (د) 1 (هـ) 6^8

(و) $\frac{1}{ذ^6}$ (ز) $\frac{س^4}{س^8}$ (ح) $\frac{د^2}{ب^3}$

تمرين 2 ل:

(1) (أ) 2 (ب) 2 (جـ) 25 (د) 2 (هـ) 10

(و) $15^{\frac{1}{3}}$ (ز) $32^{\frac{1}{2}}$ (ح) 1000 (ط) 8 (ي) 9

(2) (أ) جـ$^{\frac{1}{3}}$ (ب) ء$^{\frac{1}{2}}$ (جـ) ط^{6} (د) أ^{4}

(3) (أ) س^{2} (ب) س^{3} (جـ) ذ^{2} (د) ت$^{\frac{3}{5}}$ (هـ) $2^{\frac{1}{2}}$ ي$^{\frac{1}{2}}$

(و) 2س ص^{2} (ز) 4ن^{2} هـ$^{\frac{5}{2}}$ (ح) $4\times5^{\frac{3}{2}}$ (ط) $\frac{3125}{1024}$

تمرين 2 م:

(1) (أ) 16 (ب) 7 (جـ) 4

(2) (أ) 6 (ب) 5 (جـ) 4 (د) -5 (هـ) -3 (و) $\frac{3}{2}$

(3) (أ) 6 (ب) 8 (4) (أ) 14 (ب) 11

(5) (أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (6) (أ) 7 (ب) 4

(7) (أ) أ=16 (ب) أ=27 (جـ) أ=32

(8) (أ) ر= $1\frac{1}{2}$ (ب) ر=$\frac{3}{4}$ (جـ) ر=-$\frac{2}{3}$

(9) (أ) ص=$\frac{1}{9}$ (10) س=1 (11) ص=1

(12) (أ) (i) م=3 (ii) ن=-4 (ب) 3

ورقة المراجعة 2: القسم أ

(1) (أ) أ^{2} (ب) 8 جـ^{6} ب^{3}

(2) (أ) 1.23×10^{4} (ب) 4.5×10^{-2}

(جـ) 6.789×10^{4} (د) 1.2×10^{3}

(3) (أ) $\frac{1}{أ^{2}}$ (ب) ب^{8} (جـ) جـ^{6} (د) $\frac{1}{ء^{6}}$

(4) (أ) $\frac{1}{4}$أ (ب) 1 (جـ) 16 (د) $\frac{125}{27}$

القسم ب:

(5) (أ) 512 (ب) 2^{5}، ن=5 (جـ) $\frac{6\,ص^{2}}{س^{6}}$ (د) 6

(6) (أ) د^{4} (ب) م$^{-12}$ (جـ) أ^{12}

(7) (أ) 2 (ب) -$\frac{3}{4}$

القسم جـ:

(8) (أ) ن=64 (ب) ن=$\frac{5}{4}$ (جـ) ن=-6 (د) ن= $\frac{1}{27}$

(9) (أ) (i) 32 (ii) 216 (ب) (i) 2 (ii) 0.1

(10) (أ) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 5 (ب) (i) -2 (ii) 5

(جـ) (i) 13 (ii) 0

تمرين 2 أ: الاعداد غير القياسية

(أ) $15\sqrt{15}$ (ب) $\sqrt[3]{14}$ (جـ) $-10\sqrt{س ص}$ (د) ع$^{+1}$

(هـ) $\frac{25}{6}$ (و) -2 (ز) $66-24\sqrt{6}$ (ح) 55

(ط) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$ (ي) 1

تمرين 2 ب:

(1) (أ) $\frac{15-5\sqrt{2}}{7}$ (ب) $\sqrt{س}+\sqrt{ص}$

(جـ) $\frac{5+\sqrt{21}}{-2}$ (د) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{ب}}{3-ب}$

(2) 96 (3) يترك للطالب (4) $10-13\sqrt{5}$

تمرين 2 جـ:

(1) (أ) $8\sqrt{3}-6\sqrt{5}$ (ب) $-3\sqrt{7}$ (جـ) $\frac{-7\sqrt{2}}{2}$

(2) المحيط ≅ 22.28 سم المساحة ≅ 31.46 سم^{2} (3) 12

تمرين 2 د:

(أ) س=±3 (ب) ص=3 (جـ) م=7

(د) ن=20 (هـ) ل=0 أو 1

تمرين 2 أ: اللوغاريتمات

(1) (أ) لو$_{3}$ 81=4 (ب) لو$_{5}$ 1=0

(جـ) لو$_{8}$ 2=$\frac{1}{3}$ (د) لو$_{ص}$ ق=س

(2) (أ) 10^{3}= 1000 (ب) 2^{3}= 8 (جـ) $9^{\frac{3}{2}}$=27 (د) أ^{ب}=ن

(3) (أ) 100 (ب) 7 (جـ) 4 (د) 216 (هـ) $\frac{1}{2}$ (و) 3

تمرين 2 ب:

(1) (أ) 4 (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) 3 (د) 10

(هـ) 0 (و) -3 (ز) $\frac{1}{2}$ (ح) -2

(ط) 5 (ي) -2 (ك) -3 (ل) 8

(م) 1 (ن) 2 (س) 2

(2) (أ) لو$\sqrt{\frac{أ}{ب}}$ (ب) لو$\frac{أ^{2}ب^{2}}{جـ}$ (جـ) لو $\frac{54}{25}$

(د) لو $\frac{1}{3}$ (هـ) لو أ (و) $\frac{3}{2}$ لوس

(3) (أ) 5 (ب) 9 (جـ) -1 (د) 14.11

تمرين 2 جـ:

(1) (أ) 3.907 (ب) 2.585 (جـ) 4.322

(د) 5.492 (هـ) 0.737 (و) 1.161

(ز) -1.585 (ح) -1.585 (ط) -1.737

(2) (أ) 5 (ب) لو$_{10}$ 5

رياضيات ممتعة:

(أ) $2^{0}\times5^{2}$ (ب) $-4+7^{2}$ (جـ) $(2^{3}+2+5)^{2}$

(د) 4.322 (هـ) $4^{3}+0^{3}+7^{3}$ (و) $5^{1}+9^{2}+8^{3}$

(ز) $7^{0}\times2^{0}\times9^{3}$ (ح) $2^{1}+4^{2}+2^{3}+7^{4}$

(ط) $8^{4}+2^{4}+0^{4}+8^{4}$ (ي) $9^{4}+4^{4}+7^{4}+4^{4}$

(ك)، (ل)، (م) ،(ن) .

ورقة المراجعة 3:

(1) لو$_{م}$ 100

(2) (أ) 2ص-س (ب) 3س+ص (جـ) 2ص -3س+ 2

(3) 1.2 (4) (أ) 0.2 (ب) 1

(5) (أ) ق= -5 (ب) 4.585

(6) (أ) ص-س (ب) 2ص+س (جـ) ص -3س+ 2

(7) 0.067

(8) (أ) -2.6 (ب) 2.4 (جـ) -19.1 (د) 1.58

(هـ) 0.69 (و) 2.46 (ز) 0.1 (ح) 0.54

(ط) 0.79

(9) (أ) 9 (ب) 1.5 (جـ) 3 (د) -3 (هـ) 1 (و) 0.5

(10) (أ) 4 (ب) -0.75

(11) (أ) 3 ق (ب) - ق (جـ) 1.4

(12) (أ) 5.4 (ب) 2.27

(13) (1) (أ) $\frac{3\sqrt{11}+9\sqrt{3}}{8}$ (ب) $م^{\frac{1}{2}} - ن^{\frac{1}{2}}$

(جـ) $ع^{ن-م} - ع^{م-ن}$ (د) ن

(2) 4

(14) يترك للطالب (15) يترك للطالب

الفصل الثالث:

(1) (أ) 13 سم (ب) 26 سم (جـ) 34 سم

(2) (أ) 2.828 سم (ب) 3.162 سم (جـ) 9.220 سم

(د) 5.532 سم (هـ) 9.816 سم (و) 3.902 سم

(3) (أ) ب= 15 (ب) ص=7 (جـ) هـ = 24 م

(4) (أ) س=17 (ب) س=10

(جـ) جـ=0.5 م (د) س=2.607م

تمرين 3 ب:

(1) (أ) د= 14.4 سم (ب) س=ص=26

(جـ) س= 8 سم ، ص=16 سم (د) س= 13 سم

(هـ) س= 15 سم

(2) (أ) س= 5 ، ص= 6.24

(ب) س= 17 ،ص= 13.7 (جـ) س= 4 ،ص= 2.83

(3) 10 م (4) 490 م (5) (أ) 24 كم (ب) 60 كم

(6) 1.5 م (7) 11.5 سم (8) 30 سم

(9) (أ) 3.9 م (ب) 8.02 م (10) 5 سم ، 13 سم.

تمرين 3 جـ:

(1) (أ) ✗ (ب) ✗ (جـ) نعم

(2) يترك للطالب

تمرين 3 د:

(1) يترك للطالب

(2)

	ii	iii	iv
أ	3.4 سم	0.340	0.342
ب	2.5 سم	0.500	0.500
جـ	2.3 سم	0.767	0.766

(3) (أ) 0.75 (ب) 0.75 (جـ) 1.86

(4) (أ) 0.839 (ب) 0.424 (جـ) 0.700 (د) 11.7

تمرين 3 هـ:

(1) مكرر في تمرين3 د.

(2) (أ) 0.5 (ب) 0.606 (جـ) 0.732

(3) (أ) 0.838 (ب) 0.424 (جـ) 0.700

(د) 11.7 (هـ) 0.224 (و) 0

(4) (أ) 85° (ب) 76.6° (جـ) 0.1°

(د) 0° (هـ) 77.1° (و) 89.7°

تمرين 3 و:

(1) يترك للطالب

(2) (أ) 0.667 (ب) 0.8 (جـ) 0.439

(3) (أ) 0° (ب) 47.9° (جـ) 45° (د) 82.9°

(4) (أ) 0.766 (ب) 0.643 (جـ) 0.5 (د) 0.342

تمرين 3 و:

(1) (أ) 7.75 (ب) 15.6

(2) (أ) 6.72 (ب) 10

(3) (أ) 9.65 (ب) 4.17 (جـ) 15.7

(4) (أ) 6.09 (ب) 5.94

(5) (أ) 10 (ب) 7.14 (جـ) 16

تمرين 3 ح:

(1) 21.8^0 (2) 66.9^0 (3) 1.6م (4) 23.6^0

(5) 2.55 م (6) 1.5 م (7) 49 سم^2 (8) $1\frac{2}{3}$كم

تمرين 3 ط:

(1) (أ) $\frac{4}{3}\pi$ (ب) $\frac{\pi}{3}$ (جـ) $\frac{5}{4}\pi$

(5) (أ) 30^0 (ب) 45^0 (جـ) يترك للطالب

تمرين 3 ي:

(1) (أ) ✗ (ب) ✗ (جـ) ✓ (د) ✓

(2) يترك للطالب

(3) متممة أ=40^0 ، جتا50^0، جا40^0، ظا40^0 = $\frac{1}{ظا 50^0}$

(4) يترك للطالب (5) المقدار = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

تمرين 3 ك:

(1) جتا جـ = 0.987 ، قتا جـ = 0.159، ظتاجـ = $\frac{31}{5}$

(2) قيمة المقدار = 3

(3) المقدار = $\frac{1}{8}$ (4) يترك للطالب

(5) س^2 +ص^2 = $\frac{13}{4}$ ، (س،ص)^2 = $\frac{1}{4}$

تمرين 3 ل:

(1) 311 م (2) 70.0 م (3) 193 م (4) 58.4 سم

(5) 6.3^0 (6) 204 م (7) (أ) 137 م (ب) 79.7^0

ورقة المراجعة 3:

القسم أ:

(1) (أ) 10 (ب) 5 (2) (أ) 5 (ب) 17

(3) (أ) 6 (ب) 24

القسم ب :

(4) (أ) 8.63 سم (ب) 10 سم

(5) (أ) 7.39 سم (ب) 24.2 سم^2

(6) (أ) 2.83 (ب) 4.02

القسم جـ :

(7) (أ) 24.4 سم (ب) 1.15 م (جـ) 3.46 م

(8) (أ) 17.3 م (ب) 20 م

الفصل الرابع:

تمرين 4 أ:

(1) يترك للطالب (2) يترك للطالب (3) يترك للطالب

(4) (أ) م= 3 (ب) م= 3 (جـ) م= -1 (د) م= $\frac{4}{7}$

(5) م= $\sqrt{3}$ (6) $\theta = 45^0$

تمرين 4 ب:

(1) (أ) خط أفقي، 0 (ب) خط رأسي غيرمحدد(لا نهائي)

(2) (أ) 0 (ب) لا نهائي (جـ) 0 (د) لا نهائي

(هـ) 0 (و) 0 (ز) لا نهائي (ح) لا نهائي

تمرين 4 جـ:

(1) (أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 1 (جـ) -$\frac{1}{2}$ (د) -1

(2) (أ)

تمرين 3 د:

(1) يترك للطالب

(2) (أ)

المعادلة	الميل	قيمة ص
ص= س+ 2	1	2
ص= س	1	0
ص= س- 2	1	-2

(ب)

المعادلة	الميل	قيمة ص
ص= -2 س+ 1	-2	1
ص= -2 س- 1	-2	-1
ص= -2 س+ 3	-2	3

(3) (أ) نعم ، نعم (ب) نعم ، نعم

تمرين 4 د:

(1) (أ) 2، -4 (ب) $\frac{1}{3}$ ، -2 (جـ) 4، -6 (د) -2، $\frac{8}{3}$

(2) (أ) ص= 2 س+ 5 (ب) ص= 8 س- 5

(جـ) ص= -5 س- $\frac{1}{2}$ (د) ص= $\frac{1}{2}$ س+ 4

(3) (أ) ص= س+ 2 (ب) ص= $\frac{1}{2}$ س- 4

(جـ) ص= -$\frac{2}{3}$ س+ $\frac{1}{3}$

(4) (أ) ص= س+ 5 (ب) ص= -$\frac{1}{6}$ س- 3

(جـ) ص= 3 س+$\frac{1}{2}$

تمرين 4 هـ:

(1) (أ) ص = 3 ، ص = 3 (ب) ص = 1 ، ص = 1

(جـ) ص = -1 ، ص = -1 ، ص = ك

(2) (أ) س = -3 ، س = -3 (ب) س = -1 ، س = -1

(جـ) س = 2 ، س = 2 ، س = هـ

(3) (أ) ص = 2 (ب) س = 4

(جـ) ص = -1 (د) س = $-2\frac{1}{2}$

تمرين 4 و:

(1) (أ) -1 (ب) 5 (جـ) -5 (د) 1

(2) جـ = -4

(3) (أ) -2 (ب) ك = -6

(4) ص = 3س + 7

(5) (أ) ص = س + 1 (ب) ص = -2س + 2

(جـ) ص = $\frac{1}{3}$س + 2 (د) ص = 2 (هـ) س = 5

(6) ص = -4س + 17

(7) (أ) ص = -2س + 4 (ب) ص = -$\frac{2}{3}$س - 1

(جـ) ص = 2س + (د) ص = -2س + 2

(8) (أ) ص = 3س (ب) ص = 3س - 1

(9) م = 3، جـ = -1

(10) ص = -2س + 6

(11) (أ) ص = س - 4 (ب) ص = س - 1

(جـ) ص = 2س - 6 (د) ص = -2س + 2

(12) ص = $\frac{2}{9}$ س + $\frac{29}{9}$

تمرين 4 ح:

(1) (أ) 5 (ب) 10 (جـ) 5

(2) (أ) 2.24 وحدة (ب) 12.5 وحدة (جـ) 14.3 وحدة

(3) (أ) 5 (ب) 106

(4) (أ) 15 وحدة (ب) 25 وحدة (جـ) 20 وحدة

(د) 60 وحدة

(5) 37.9 وحدة

(6) (أ) 52 (ب) $-\frac{1}{4}$ (جـ) ص = 3س - 26

(7) (أ) (7 ، 4) (ب) 5 (جـ) (12 ، 0)

(8) (أ) (0 ، 2) (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\sqrt{20}$ وحدة (د) 16 وحدة^2

تمرين 4 ط:

(1) (أ) (2 ، 3) (ب) (1 ، -1) (جـ) (0 ، 1)

(د) (2 ، 0) (هـ) (-2 ، $-1\frac{1}{2}$)

(2) (أ) (-1 ، 0) (ب) (-7 ، -5)

(3) (أ) $-\frac{4}{5}$ (ب) (9، 2)

(4) (2، 6)

(5) (أ) (0 ، 4) (ب) 12.65 وحدة

(جـ) (i) $\frac{1}{3}$ (ii) ص = $\frac{1}{3}$ س + 4

ورقة المراجعة 5:

(1) (أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{1}{2}$

(2) (أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $-\frac{1}{2}$

(3) (أ) (i) 0 (ii) ص = -2

(ب) (i) لانهائي (ii) س = 1

(4) (أ) ( ) -2 (ii) 4

(جـ) (i) $\frac{3}{2}$ (ii) -3

(5) (أ) (i) ص = -2س + 5 (ii) ص = $\frac{1}{4}$ س - 3

(ب) ص = $\frac{1}{2}$ س + 1

(6) (أ) ص = -5س + 13 (ب) س = 1

(7) ص = - $\frac{2}{3}$ س + 9

(8) (أ) 5 وحدات (ب) ص = -$\frac{4}{3}$ س + $\frac{1}{3}$، أو 3ص = -4س + 1

(9) يترك للطالب

(10) أولا: ص = $\frac{2}{5}$ س - $\frac{19}{5}$

ثانيا: ص = - $\frac{5}{2}$ س + 2

ثالثا: ص = -3