دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للصف الأول من مرحلة التعليم الثانوي
الجزء الثاني

1441-1440 هـ
2019-2020 م

مقدمة

تركز سلسلة رياضيات التعليم الأساسي والثانوي على دمج مهارات التفكير. وتقانة المعلومات.والتربية الوطنية ضمن تعليم وتعلم الرياضيات. وتتكون السلسلة من ثلاثة كتب للشق الثاني من مرحلة التعليم الأساسي. وثلاثة كتب للصفوف الثلاثة من مرحلة التعليم الثانوي. وقد رتبت المادة ترتيباً تربوياً سليماً يدعم فيه التفكير المجرد بأمثلة ملموسة. تساعد الطلبة عى فهم الحلول التي تم التوصل إليها جبرياً بشكل أفضل.

وقد روعى تقديم المفاهيم الواحد تلو الأخر لكي يستوعبها الطلبة بسهولة. وعُزز فهم المفاهيم بالإستخدام الحكيم للأمثلة المحلولة والتدريبات متدرجة الصعوبة. تُركِّز كتب مرحلة التعليم الأساسي على إتقان وتطبيق المهارات الأساسية بحيث. يُكوِّن أساس سليم للدراسات التالية. وتتضمن المهارات الأساسية التقدير. والحسابات الذهنية. ومعالجة البيانات. وتُستخدم في كل جزء من السلسلة أنشطة لإرشاد الطلبة في كيفية استخدام مهارات التفكير مثل الاستقراء. ولاكتشاف القوانين والنظريات الرياضية بأنفسهم. وليتعرفوا كذلك على كيفية استخدام برامج الحاسوب في عدد من الأنشطة.

ويتم حث الطلبة من خلال نشاطات وأمثلة محلولة مناسبة على أستخدام استراتيجيات حل المشكلات. وتشجيع التعلم الذاتي مثل التقدير. وبناء النموذج. وإنشاء الجدول. وإعداد القائمة النظامية. والعمل إلي الخلف. واستخدام المعادلات. وتبسيط المشكلة. وتستخدم حيثما أمكن الاشكال البيانية لتذليل صعوبة المشكلات اللفظية وجعلها أكثر طواعيه للحل.

ولجعل الطلبة يألفون الكتب قبل استخدامها. نورد فيما يلي الملامح المميزة لهذه السلسلة.
يبدأ كل فصل "بمقدمة" قصيرة عن الموضوع. تليها قائمة بنواتج التعلم يمكن للطلبة استخدامها في تأكيد ما تعلموه بنهاية كل فصل من الكتاب.

ونأمل أن تساعد المادة المقدمة في السلسلة الطلبة على تقدير أهمية وقدرة الرياضيات في نشاطاتهم اليومية ، وربما في مهنتهم المستقبلية ، وأن يستمتعوا بأستخدام سلسلة الرياضيات اتلعليم الأساسي والثانوي.
يقدم للطلبة "أمثلة محلولة" لتعزيز فهم المفاهيم ولتعرفيهم بأنواع عديدة من المسائل.بما فيها التي تساعدهم على مراقبة تفكيرهم الذاتي.

تتضمن "التمرينات متدرجة الصعوبة" أسئلة مناسبة لمدى واسع من القدارات. وصممت الأسئلة بشكل يجعل الطلبة يستخدمون التفكير المنطقس الاستدلالي والاستقرائي لحل المشكلات الرياضية. (ويمكن أن يختار المعلمون مسائل مختلفة للطلبة من ذوي القدارات المختلفة).

"الرياضيات الممتعة" أو "استقصاء الرياصيات" والموجودة في نهاية كل فصل من الكتاب (فيما عدا فصول المراجعة) مخصصة لغرس وتنمية مهارات التفكير. وستعرض أيذاً هذه الأنشطة بعض القضايا الوطنية ذات الصلة على الطلبة. كما توجد ورقة للمراجعة في نهايةن كل فصل من الكتاب (فيما عدا فصول المراجعة) حتى يتمكن الطلبة من قياس مستوى كفايتهم باستمرار.

الرموز الرياضية

نظام الوحدات العالمية Si Units

يستخدم نظام الوحدات العالمية سبع وحدات أساسية وتشتق جميع الوحدات الأخرى من هذه الوحدات الأساسية بضرب أوقسمة وحدة في وحدة أخرى.

الكمية الفيزيائية	اسم الوحدة الأساسية	رمز الوحدة
الطول	متر	م
الكتلة	كيلو جرام	كجم
الزمن	الثانية	ث
التيار الكهربائي	أمبير	أم
درجات حرارة الترمومتر	كيلفن	ك
شدة الإضاءة	شمعة	□
كمية المادة	مول	مل

بعض جداول التحويل Some Conversion Tables

الطول:

10 ملليمتر (مم) = 1 سم

10 سنتيمتر (سم) = 1 ديسيمتر (دس)

10 ديسيمتر (دس) = 1 متر (م)

10 متر (دس) = 1 ديكامتر (دام)

10 ديكامتر (دام) = 1 هيكتومتر (هكم)

10 هيكتومتر (هكم) = 1 كيلومتر (كم)

الكتلة:

10 ملليجرام (مج) =1 سنتيجرام (سجم)

10 سنتيجرام (سجم) = 1 ديسيجرام(دس)

10 ديسيجرام = 1 جرام

10 جرام = 1 ديكاجرام

10 ديكاجرام = 1 هيكتوجرام

10 هيكتوجرام = 1 كيلوجرام

1000 كيلوجرام = 1 طن

المساحة:

1 هكتار =10000 م^2

100 هكتار = 1 كم^2

الحجم والسعة:

1000 مل = 1 لتر

1 مل = 1 س^3

الزمن:

الدقيقة (ق) = 60 ثانية (ث)

الساعة = 60 دقيقة (ث)

1 يوم = 24 ساعة

1 عام = 365 يوم

1 سنة كبيسة = 366 يوم

الرموز الرياضية

∈ تنتمي إلى

∉ لا تنتمي إلى

∅ مجموعة خالية

⊂ مجموعة جزئية فعلية

⊄ ليست مجموعة فعلية من

⊆ مجموعة جزئية من مجموعة أخرى

⊈ ليست مجموعة جزئية من

∪ اتحاد المجموعات

∩ تقاطع المجموعات

= يساوي

≠ لا يساوي

≡ يكافيء

≈ تقريبا

∝ يتناسب

< أصغر من

> أكبر من

≤ أصغر من أو يساوي

≥ أكبر من أو يساوي

ط = مجموعة الأعداد الطبيعية. = { 1 ، 2، 3 ، ... }

ك =مجموعة الأعداد الكلية. { 0، 1 ، 2 ، 3 ، .. }

ص = مجموعة الأعداد الصحيحة. { 0 ، ± 1 ، ± 2 ، ± 3 ، ... }

ن مجموعة الأعداد القياسية.

ح مجموعة الأعداد الحقيقية.

أ + ب وتعنى أ زائد ب

أ - ب وتعنى أ ناقص ب

أ × ب = أ. ب وتعني أ مضروبة في ب

$\frac{أ}{ب}$ وتعني أ مقسومة على ب

$\sqrt{أ}$ الجذرالتربيعي للعدد الحقيقي أ حيث: أ > الصفر

| أ | القيمة المطلقة للعدد الحقيقي أ

π وقيمتها 3.14 أو $\frac{22}{7}$

مساحة المربع= طول ضلع المربع × نفسه

محيط المربع = طول ضلع المربع × 4

مساحة المستطيل= الطول × العرض

محيط المستطيل = (الطول + العرض) × 2

مساحة المثلث= $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

محيط الدائرة=2 π نق.

مساحة الدائرة= π نق^2.

حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ π نق^3

مساحة سطح الكرة = 4 π نق^2

المساحة الكلية للأسطوانة = 2× نق× π (ع+نق).

حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{1}{3}$ π نق^2

حجم المكعب = ل^3 حيث ل طول حرف المكعب

المحتويات

5
الباب الخامس

6
الباب السادس

7
الباب السابع

5

الباب الخامس

التغير Variations

5 التغير Variations

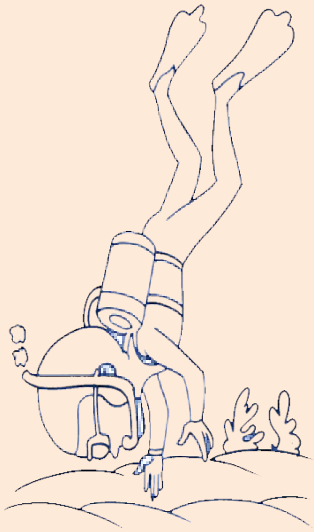
لربما وردت عليك عبارات في العلوم مثل:

يتناسب التيار (I) المار في موصل كهربائي مع الجهد (V) عبره.

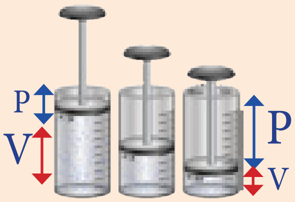
بالنسبة لكتلة محددة من الغاز فإن الحجم يتناسب عكسياً مع الضغط (بشرط ثبات درجةالحرارة).

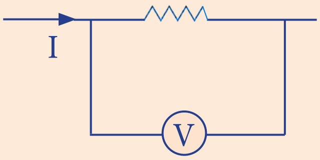
يزداد ضغط السائل بزيادة العُمق.

تبين كل هذه العبارات أهمية تطبيقات التغير في مجالات العلوم المتعددة.



انتبه لا تغوص إلى العمق أكثر من اللازم فالضغط يزداد بزيادة العمق.





وفي نهاية هذا الفصل سوف تمكن من:

- تكوين معادلة تربط عدة متغيرات.
- حل مسائل تتضمن التغير الطردي والعكسي.

5 - 1 التغير الطردي Direct Variation

يبين الجدول التالي تكلفة كميات معينة من الأرز:

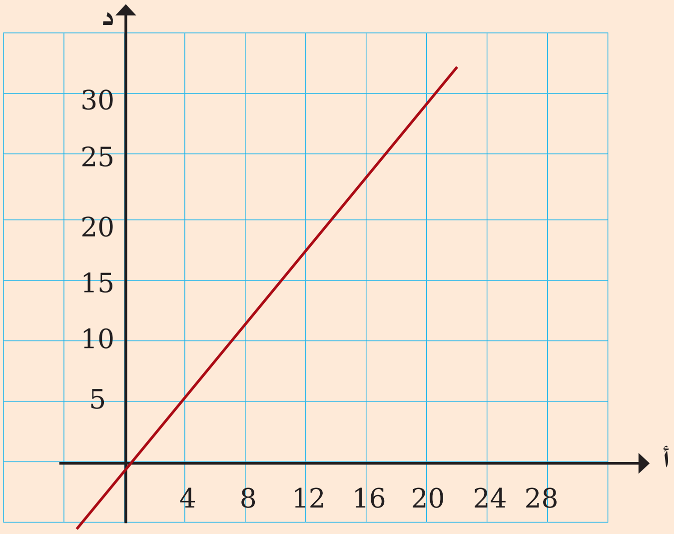
كمية الأرز بالكجم (أ)	4	8	12	16	20
التكلفة بالدينار (د)	6	12	18	24	30

تزداد تكلفة الأرز كلما زادت كميته كما أن نسبة التكلفة إلى كمية الأرز ثابتة لكل زوج من القيم الموجودة بالجدول بمعنى:

$$\frac{د}{أ} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{18}{12} = \frac{24}{16} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2} \text{ أو } 1.5$$

$$\therefore \text{د} = \frac{3}{2} \text{ أ}$$

ولهذا فإن كل كيلو جرام يتكلف 1.5 دينار، يمكن تمثيل هذه المعلومات في رسم بياني مثل الموجود في الصفحة التالية.



الشكل البياني هوخط مستقيم يمر بنقطة الأصل، يمكن رؤية أنه :

- إذا زادت كمية الأرز ثلاثة أضعاف، فإن التكلفة تتضاعف ثلاث مرات،
- وإذا إنخفضت كمية الارز إلى النصف انخفضت التكلفة إلى النصف،

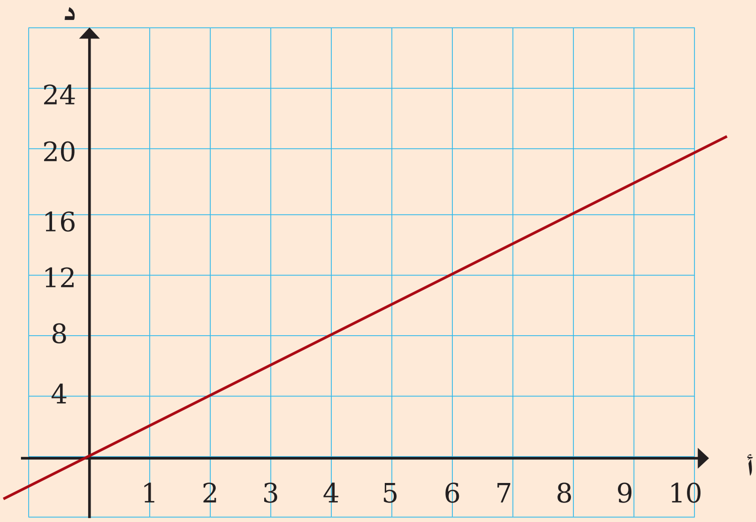
ولهذا فإن كلا من جـ ، أ متغيران حيث يأخذان قيم مختلفة.

تأمل الآن تكلفة كميات معينة من السكر مبينة في الجدول التالي:

كمية السكر بالكجم(أ)	2	4	6	8	10
التكلفة بالدينار (د)	4	8	12	16	20

$$\frac{د}{أ} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{12}{6} = \frac{16}{8} = \frac{20}{10} = 2$$

∴ د = 2 أ وعليه فإن كل كيلو جرام سكر يتكلف 2 دينار.



مرة أخرى الشكل البياني هو خط مستقيم يمر بنقطة الأصل، وفي مواقف مثل هذه حيث العلاقة بين المتغيرين ثابتة ، نقول أن أحد المتغيرين يتناسب طرديا مع الآخر ولهذا :

د تتغير طرديا بتغير أ .

أو د تتناسب طرديا مع أ .

تشير العلامة ($\propto$) إلى (يتناسب مع) أي أن د $\propto$ أ .

وإذا كان $\frac{د}{أ}$ = ك حيث ك ثابت فإن العلاقة بين د ، أ يمكن كتابتها كمعادلة على الصورة: د = ك أ حيث ك ثابت.

ملاحظات Notes

- ماذا تمثل ك في العلاقة السابقة

ص $\propto$ س تعني أن ص = ك س حيث ك ثابت .

مثال 1 :

بالنسبة لكل جدول حدد ما إذا ص تتغير طرديا بتغير س ثم أوجد المعادلة التي تربط بين س ، ص .

(أ)

س	2	4	7
ص	8	16	28

(ب)

س	1	3	4
ص	2-	6	4

الحل :

- الكمية الثابتة ك = 4 يجب مقارنة جميع النسب.

(أ) $\frac{ص}{س} = \frac{8}{2} = \frac{16}{4} = \frac{28}{7} = 4$

$\therefore$ ص تتغير طرديا بتغير س ، ص = 4 س .

(ب) $\frac{ص}{س} = \frac{-2}{1} = -2$

$\frac{ص}{س} = \frac{6}{3} = 2$

$\frac{ص}{س} = \frac{4}{4} = 1$

حيث $\frac{ص}{س}$ ليس ثابتا فإن ص لا تتغير طرديا بتغير س .

مثال 2 :

إذا كانت د تتغير طرديا بتغير (ت) وكانت د = 120 عندما ت = 2.

(أ) أوجد المعادلة التي تربط بين د ، ت

(ب) أوجد قيمة د عندما ت = 60

(جـ) أوجد قيمة ت عندما د = 60

الحل :

(أ) حيث د ∝ ت

لدينا د = ك ت عندما ك متغير ثابت.

بمعلومية د = 120 عندما ت = 2

120 = ك (2)

ك = 60

∴ المعادلة د = 60 ت

(ب) بالتعويض عن قيمة ت = 6 في د = 60 ت

نجد ان: د = 60 × 6 = 360

(جـ) بالتعويض عن قيمة د = 60 في د = 60 ت

نجد ان: 60 = 60 ت

ت = 1

ملحوظة Note

- عوض عند د ، ت لتجد ك .

مثال 3 :

بالنسبة للجدول التالي ب يتناسب طرديا مع أ

أ	1	2	3	
ب	7	14		49

(أ) أوجد المعادلة التي تربط بين أ ، ب

(ب) أوجد القيم المتروكة في الجدول

الحل :

(أ) حيث

$$\frac{ب}{أ} = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = 7$$

نجد أن: ب = 7 أ

(ب) بالتعويض عن: قيمة أ = 3 في ب = 7 أ

نجد ان: ب = 7 × 3= 21

التعويض عن: قيمة ب = 49 في ب = 7 أ

نجد ان: 7 أ= 49

أ = 7

تمرين 5 أ :

1- في كل جدول مما يأتي حدد إذا ما كانت ص تتغير طرديا مع س وإذا كانت كذلك أوجد المعادلة التي تربط ص ، س

(أ)

س	3	7	9
ص	9	21	27

(ب)

س	2	3	4
ص	3	4	5

2- ارسم الشكل البياني لكل من الجدوال في السؤال الأول.

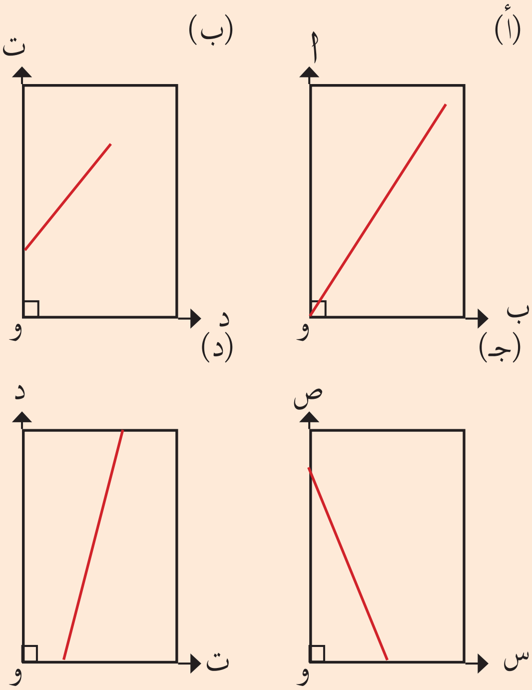
(أ) أي من الاشكال البيانية السابقة يعبر عن خط مستقيم ؟

(ب) اي من الاشكال البيانية السابقة يمر بنقطة الاصل ؟

(جـ) أي جدول من الجدوال يحتوى على متغيرات تتغير طرديا كل منها مع الاخر.

(د) ماذا تستنتج من الرسم البياني لشكلين بينهما تناسب طردي ؟

3- حدد وجود أو عدم وجود تغير طردي بين المتغيرين في كل مما يأتي.



4- أعد كتابة كل من البيانات التالية:

(أ)(i) باستخدام الرمز ($\propto$)

(ii) كمعادلة مع ك ثابت.

(االجزء الاول أجيب من أجلك)

(أ) أ تتغير طرديا بتغير ب

(i) أ $\propto$ ب

(ii) أ = ك ب حيث ك ثابت.

(ب) ص تتغير طرديا بتغير س .

(جـ) جـ تتناسب طرديا مع ى .

(د) ن تتناسب طرديا مع ت .

(هـ) د تتناسب طرديا مع ت .

5- اذا كان ص $\propto$ س وكانت ص = 2 عندما س = 4.

(أ) أوجد المعادلة التي تربط بين ص ،س.

(ب) أوجد قيمة ص عندما س = 6.

(جـ) أوجد قيمة س عندما ص = 4.

6- اذا كانت ل تتغير طرديا بتغير هـ وكانت ل = 25 عندما هـ = 2.5.

(أ) أوجد قيمة ل عندما هـ = 5.2.

(ب) أوجد قيمة هـ عندما ل = 100 .

7- اذا كانت ن تتغير طرديا بتغير ت ، انقل واكمل الجدول التالي:

ت	10	40	
ن		200	250

5 - 2 أشكال أخرى للتغير الطردي Other Forms of Direct Variation

افترض مكعبا طول ضلعه ت سم ، الجدول يوضح كيفية تغيير مساحة سطح المكعب أ سم^2 بدلالة ت .

ت سم	1	2	3	4	5
أ سم^2	6	24	54	96	150
$\frac{أ}{ت}$ سم	6	12	18	24	30

لاحظ $\frac{أ}{ت}$ ليست ثابتة ولذا فإن أ لاتتناسب طرديا مع ت ، ولكن إذا اعتبرنا النسبة $\frac{أ}{ت^2}$ سوف نحصل على:

$$\frac{أ}{ت^2} = \frac{6}{1} = \frac{24}{4} = \frac{54}{9} = \frac{96}{16} = \frac{150}{25} = 6 \text{ (ثابت)}$$

ولهذا فإن أ تتناسب طرديا مع ت^2 ، أي أن مساحة سطح المكعب تتغير طرديا بتغير مربع طول ضلعه، ومن ثم المعادلة هي أ = 6 ت^2

مثال 4 :

إذا كانت ص $\propto$ س^2، ص = 12 عندما س = 2 ، أوجد:

(أ) ص عندما س = 5 (ب) س عندما ص = 15

الحل :

(أ) إذا كانت ص $\propto$ س^2، ص = 12 عندما س = 2

ص = م س^2 حيث م مقدار ثابت.

بالتعويض عن قيمة كل من ص ،س نحصل على:

12 = 4 م

$\therefore$ م = $\frac{12}{4}$ = 3

ولذا ص = 3 س^2

(أ) عندما س = 5 فإن ص = 3(5)^2 = 3 × 25 = 75

(ب) عندما ص = 15 فإن 3 س^2 = 15

$\therefore$ س^2 = $\frac{15}{3}$ = 5

س = ± $\sqrt{5}$

ملاحظات Notes

- نبحث دائما عن قيمة ك أولا
- تذكر التعويض عن س^2 وليس س
- استخدم كلا من الجذرين التربيعين الموجب والسالب

مثال 5 :

إذا كانت ل = ك $\sqrt{أ}$ حيث ك مقدار ثابت، ل = 6 عندما أ =81 احسب:

(أ) قيمة ل عندما أ = 144 (ب) قيمة أ عندما ل = 10

Note ملحوظة

● $\sqrt{أ}$ يشير إلى جذر تربيعي موجب.

الحل :

ل = ك $\sqrt{أ}$ ، ل = 6 عندما أ = 81

∴ ك $\sqrt{81}$ = 6

9 ك = 6

ك = $\frac{6}{9}$ = $\frac{2}{3}$

∴ المعادلة هي: ل = $\frac{2}{3}\sqrt{أ}$

(أ) عندما أ = 144

ل = $\frac{2}{3}\sqrt{144}$

ل = $\frac{2}{3}$ × 12 = 8

(ب) عندما ل = 10

10 = $\frac{2}{3}\sqrt{أ}$

$\sqrt{أ}$ = 10 × $\frac{3}{2}$ = 15

∴ أ = 15^2 = 225

مثال 6 :

إذا كانت كتلة الكرة تتغير طرديا بتغير مكعب طول نصف القطر، انقل وأكمل الجدول التالي:

الكتلة (م)	24		375
طول نصف القطر (نق)	2	3	

الحل :

م ∝ نق^3

∴ م = ك نق^3 عندما ت كون ك مقدار ثابت.

م = 24 عندما نق = 2 ∴ 24 = ك $(2)^3$

8 ك = 24 ⇦ ك = 3

∴ المعادلة هي : م = 3 نق^3

عندما نق = 3 فإن م = 3$(3)^3$ = 3 × 27 = 81

عندما م = 375 فإن 375 = 3 نق^3

نق^3 = $\frac{375}{3}$ = 125

∴ نق = $\sqrt[3]{125}$ = 5

∴ يمكن تكملة الجدول كالآتي:

الكتلة (م)	24	81	375
طول نصف القطر (نق)	2	3	5

تمرين 5 ب :

1- في كل جدول هل تتناسب ص طرديا مع $\sqrt{س}$ أو س أو $س^2$ أو $س^3$.

أوجد المعادلة التي تربط بين ص ، س في كل حالة

(أ)

س	1	3	5
ص	3	9	15

(ب)

س	2	3	4
ص	16	54	128

(جـ)

س	2	4	6
ص	2	8	18

(د)

س	1	4	9
ص	6	12	18

2- إذا كانت ص$\propto$س وكانت ص= - 5 عندما س = 10.
أوجد :
(أ) ص عندما س = - 15.
(ب) س عندما ص = 8 .

3- اذا كانت ص$\propto\sqrt{س}$
وكانت ص= 27 عندما س = 9. أوجد
(أ) ص عندما س = 16.
(ب) س عندما ص = 72 .

4- المسافة المقطوعة بواسطة سيارة تتحرك بسرعة ثابتة تتناسب طرديا مع الزمن المستغرق، فإذا قطعت السيارة 190 كيلومتر في 4 ساعات أوجد:
(أ) المسافة المقطوعة في 10 ساعات
(ب) الزمن المستغرق لقطع مسافة قدرها 285 كم .

5- أعد كتابة كل من البيانات التالية:
(i) مستخدما الرمز $\propto$
(ii) كمعادلة
(االجزء الاول أجيب من أجلك)
(أ) أ تتغير طرديا بتغير مربع (ر)
(i) أ $\propto$ $ر^2$
(ii) أ = ك $ر^2$ حيث ك ثابت.
(ب) ن تتغير بتغير مكعب ر .
(جـ) ر تتغير بتغير الجذر التربيعي لـ ف .
(د) ت تتغير بتغير الجذر التربيعي لـ ل .
(هـ) جـ تتغير بتغير مكعب س .
(و) ع تتغير بتغير مربع جـ .
(ز) ر تتغير بتغير الجذر التكعيبي لـ م .

6- سار رجل بسرعة منتظمة قاطعا مسافة تتغير طرديا مع الزمن، فإذا سار الرجل مسافة 32 كيلومتر في 5 ساعات ما المسافة التي يقطعها في 3 ساعات بنفس السرعة الثابتة؟

7- إذا كانت أ تتغير طرديا بتغير ب وكانت أ = 2.8 ، ب = 10 ، أوجد :
(أ) قيمة أ عندما ب = 16.
(ب) قيمة ب عندما أ = 4.2 .

8- إذا كانت ص تتغير طرديا بتغير $س^ن$ اكتب قيمة ن في كل من الحالات الاتية:
(أ) ص مساحة دائرة طول نصف قطرها س.
(ب) ص حجم اسطوانة مساحة قاعدتها معلومة وارتفاعها س.
(جـ) ص و س طولا ضلعي مستطيل معلوم المساحة.

5 - 3 التغير العكسي Inverse Variation

يبين الجدول التالي زمن الطيران لطائرات تسافر بسرعات مختلفة بين مطارين المسافة بينهما 3000 كم.

السرعة المتوسطة كم/ ساعة	الزمن بالساعات ت	$\frac{ر}{ت}$	$\frac{ر}{ت^2}$	ر×ت
200	15			
300	10			
400	$7\frac{1}{2}$			
500	6			
1000	3			
3000	1			

نشاط1 - إجراء لابتكار ورقة عمل باستخدام برامج معالجة البيانات Spread Sheet.

الخطوة	العمل
1	انقر على الأيقونة اخاصة ببرنامج Spread Sheet لفتح ورقة العمل
2	ادخل البيانات المعطاة بما في ذلك (العناوين) في العمود من A إلى E.
3	في العمود C وخلية الصف2 ، اكتب= $\frac{ر}{ت}$ ثم اضغط مفتاح Enter (سوف تظهر القيمة (200 ÷ 15) في هذه الخلية)
4	بإضاءة العمود C وخلية الصف 2 ، وبالنقر على الركن أسفل اليمين لهذه الخلية (a + Cursor appears) متجها إلى أسفل بالفأرة (drag + Cursor) حتى الصف الاخير من العينة (الصف 7) ا ثم اضغط مفتاح Enter .
5	في العمود D وخلية الصف 2 ، اكتب= $\frac{ر}{ت^2}$ ثم اضغط مفتاح Enter (القيمة (200 ÷ 215) سوف تظهر في هذه الخلية)
6	كرر الخطوة 4 ولكن بإضاءة العمود D وخلية الصف الثاني
7	في العمود E وخلية الصف2 ، اكتب= ر×ت ثم اضغط مفتاح Enter (القيمة (200 ÷ 15) يمكن رؤيتها في هذه الخلية)
8	كرر الخطوة 4 بإضاءة العمود E وخلية الصف 2.

استخدم النتائج للاجابة ما يأتي:

(أ) هل $ر \propto ت$ ؟ ولماذا ؟

(ب) هل $ر \propto ت^2$ ؟ ولماذا ؟

(جـ) هل $ر ت =$ مقدار ثابت ؟ ثم أوجد العلاقة بين ر ، ت ؟

2 - انقل واكمل الجدول التالي:

س	ت	$\frac{ر}{ت}$	$\frac{ر}{ت^2}$	$ر \times ت$
1	12			
2	6			
3	4			
4	3			

ملاحظات Notes

- استخدم الآلة الحاسبة أو الحساب الدهني.

بالنسبة لقيم ر ت الجدول السابق:

(أ) حدد إذا كانت $ر \propto ت$.

(ب) حدد إذا كانت $ر \propto ت^2$.

(جـ) أوجد العلاقة بين ر ، ت ؟

في النشاطين أعلاه يمكن ملاحظة نقصان كمية بازدياد الاخرى، كما أنه إذا تضاعفت كمية فإن الكمية الاخرى تنتصف قيمتها في الحقيقة بالنسبة لكل قيمتين متناظرتين يمكن الاستدلال على أن ناتج ر ، ت ثابت على سبيل المثال في النشاط 2.

$$1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 4\times3 = 12$$

أي أن $ر \times ت = 12$

- $ك = (\frac{1}{ت}) = ك \times \frac{1}{ت} = \frac{ك}{ت}$

ولهذا فإن مقدار ثابت وعند كتابته بالصورة العامة نحصل على

$ر \times ت = ك$ أو $ر = \frac{ك}{ت}$

أى أن : $ر = ك (\frac{1}{ت})$ حيث ك ثابت

تذكر أنه عندما ص س نحصل على ص = ك س

وإذا كان $ر = ك (\frac{1}{ت})$

نحصل على $ر \propto \frac{1}{ت}$

$\frac{1}{ت}$ تسمى مقلوب ت أو نقول بعبارة أخرى ان $\frac{1}{ت}$ هي المعكوس الضربي لـ ت وبناء عليه بالنسبة للمواقف التي تشبه $ر \propto \frac{1}{ت}$ يمكن أن القول أن:

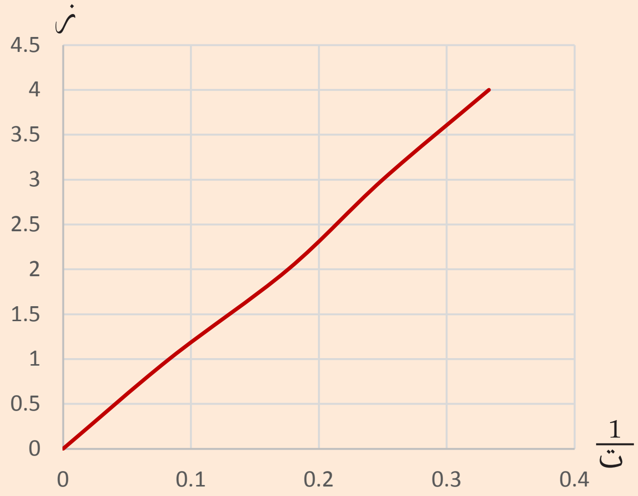
ر تتغير عكسيا مع ت أو ر تتناسب عكسيا مع ت.

$ن \propto \frac{1}{ت}$ تعني أن $ن = \frac{ك}{ت}$ أو

$ن ت = ك$ ، حيث ك ثابت

دعنا نرسم العلاقة النشاط (2) في السابقة الصفحة عن طريق تحديد نقط ن مقابل نقط $\frac{1}{ت}$. يكون أولا جدول القيم كمايلي:

ن	ت	$\frac{1}{ت}$
1	12	0.083
2	6	0.176
3	4	0.250
4	3	0.333



عندما ترسم نقط ن مقابل $\frac{1}{ت}$ سوف نحصل على خط مستقيم يمر بنقطة الأصل مما يشير إلى أن:

ن يتغير طرديا بتغير $\frac{1}{ت}$ أو بمعنى تتغير ن عكسيا مع ت.

مثال 7 :

إذا كانت د تتغير عكسيا بتغير ن وكانت د = 4 عندما ن = 2.

(أ) عبر عن د بدلالة ن.

(ب) احسب قيمة د عندما ن = 4.

(جـ) احسب قيمة ن عندما د = 6.

الحل :

(أ) $د \propto \frac{1}{ن}$

$\therefore$ $د = \frac{ك}{ن}$ حيث ك مقدار ثابت.

د = 4 عندما ن = 2

$\therefore 4 = \frac{ك}{2}$

$ك = 4 \times 2 = 8$

$\therefore$ المعادلة هي $د = \frac{8}{ن}$

(ب) عندما ن = 4

$د = \frac{8}{4} = 2$

(جـ) عندما د = 6

$6 = \frac{8}{ن}$

$6 ن = 8$

$\therefore ن = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

مثال 8 :

إذا كانت ص تتغير عكسيا بتغير مربع س وكانت ص = 9 عندما س = 2. أوجد.

(أ) قيمة ص عندما س = 4 . (ب) قيمة س عندما ص = 4 .

الحل :

(أ) نحتاج أولا إلى معادلة تربط بين ص ، س

ص $\propto \frac{1}{س^2}$ ∴ ص = $\frac{ك}{س^2}$ حيث ك مقدار ثابت.

ص = 9 عندما س = 2

∴ 9 = $\frac{ك}{2^2}$ = $\frac{ك}{4}$ أي ك= 9 × 4 = 36

∴ المعادلة هي ص = $\frac{36}{س^2}$

(أ) عندما س = 4

ص = $\frac{36}{(4)^2}$

= $\frac{36}{16}$ = $\frac{9}{4}$

= $2\frac{1}{4}$

(ب) عندما ص = 4

4 = $\frac{36}{س^2}$

أي: 4 س^2 = 36

∴ س^2 = $\frac{36}{4}$ = 9

∴ س = ± $\sqrt{9}$ = ± 3

مثال 9 :

إذا كان المتغيران س، ص تربطهما المعادلة التالية: ص$\sqrt{س}$ = ثابت

انقل الجدول التالي ثم اكمله .

س	4	16	
ص	4		16

Note ملحوظة

- نجد المقدار الثابت أولا .

الحل :

ص$\sqrt{س}$ = ك حيث ك مقدار ثابت.

ص = 4 عندما س = 4

∴ ك = 4$\sqrt{4}$ = 4 × 2= 8

∴ المعادلة هي: ص$\sqrt{س}$ = 8

عندما س = 16

8 = ص$\sqrt{16}$

4 ص = 8

∴ ص = 2

عندما ص = 16

8 = 16$\sqrt{س}$

$\sqrt{س}$ = $\frac{8}{16}$ = $\frac{1}{2}$

∴ س = $(\frac{1}{2})^2$ = $\frac{1}{4}$

الجدول الكامل هو :

س	4	16	$\frac{1}{4}$
ص	4	2	16

تمرين 5 جـ :

1- في كل جدول مما يأتي حدد إذا كانت ص تتغير عكسيا بتغير س ، ثم حدد المعادلة التي تربط بين س ، ص .

(أ)

س	1	2	4	5
ص	20	10	5	4

(ب)

س	2	3	4	5
ص	30	20	15	12

2- أعد كتابة كل من العبارات التالية:

(i) مستخدما الرمز $\propto$

(ii) كمعادلة

تم حل أول عبارة لك.

(أ) إذا كانت ص تتغير عكسيا بتغير س.

(i) ص $\propto \frac{1}{\text{س}}$

(ii) ص $= \frac{\text{ك}}{\text{س}}$ حيث ك ثابت.

(ب) د تتغير عكسيا مع ط.

(جـ) م تتغير عكسيا مع مربع ن .

(د) ر تتغير عكسيا مع مربع د .

(هـ) أ تتغير عكسيا مكعب ب .

(و) ب تتغير عكسيا مع الجذر التربيعي جـ .

3- المتغيران س ، ص يرتبطان بالمعادلة ص س^2 = ثابت انقل واكمل الجدول التالي

س	2	3	
ص	9		16

4- إذا كانت ص تتغير عكسيا بتغير س^2 ، ص = 16 عندما س= 2 أوجد:

(أ) ص عندما س= 4 .

(ب) س عندما ص= 4 .

5- الزمن المستغرق في قطع رحلة يتغير عكسياً مع سرعة الرحلة، فإذا احتجنا 5 ساعات لإكمال الرحلة عندما تكون السرعة 80 كم/ساعة، فما هو الزمن المطلوب إذا زادت السرعة إلى 100 كم/ساعة.

6- يرتبط المتغيران س ، ص بالمعادلة ص $\sqrt{\text{س}}$ = ك حيث ك ثابت ، القيم المتناظرة معطاة في الجدول الآتي:

س	4	9	ب
ص	12	أ	6

أوجد قيمة أ ، ب.

7- إذا كانت ص تتناسب عكسيا مع (س + 3) وكانت ص=4 وعندما س=2 ، عبر عن قيمة ص بدلالة س.

ملخص:

إذا كانت ص $\propto$ س فإن ص = ك س حيث ك ثابت.

إذا كانت ن $\propto \frac{1}{ر}$

فإن ن = $\frac{ك}{ر}$ حيث ك ثابت، أو ن ر = ك حيث ك ثابت.

استقصاء الرياضيات:

المزيد عن المربعات السحرية:

ابتكر العالم بنجامين فرانكلين (1706 - 1790) مربعا سحريا مليئا بالخصائص الشيقة، ولد هذا العالم في ولاية ماساشوستس وهو الطفل الخامس عشر والابن الأصغر في عائلة مكونة من سبعة عشر طفلا، وعاش حياة منتجة، وقام كعالم باستقصاء فيزياء الطائرة الورقية، وابتكر موقداً ونظارة ثنائية البؤرة، وكرجل سياسة شجع على إقامة الخدمات العامة مثل جهاز المطافئ والمكتبات العامة والاكاديمية (التي أصبحت فيما بعد جامعة بنسلفانيا)، بالإضافة إلى ذلك كان واحد من الموقعين على وثيقة الاستقلال الأمريكية.

وفي عام 1752 قام بإجراء تجربته الشهيرة حيث أطلق طائرة ورقية مصنوعة في المنزل في جو رعدي وأثبت أن البرق كهرباء، صعق البرق سلك الطائرة الورقية وسار فيه حتى وصل إلى مفتاح مربوط بطرفه حيث تسبب في شرارة. وقد تتبع ورسم حركة التيار الخليجي في المحيط الأطلسي مسجلا حرارته وسرعته وعمقه، كما أنه كون مربعا سحريا 16 × 16 له خصائص مميزة.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

(أ) احسب مجموع الصفوف الأفقية، والأعمدة الرأسية والقطران.

(ب) ما هو مجموع الأعداد الصحيحة في كل ربع ؟.

(جـ) ما هو مجموع الأرقام الصحيحة في الصناديق والتي تمر خلالها الأسهم المتقطعة (أربع صناديق أعلى ، وأربع صناديق أسفل).

(د) احسب مجموع الصناديق التي بالاركان الاربعة بالإضافة إلى الصناديق الأربعة التي بالمنتصف.

(هـ) أوجد مجموع أي أربعة صناديق شبه مربعة.

(و) احسب مجموع أي أربعة صناديق تبعد مسافات متساوية عن مركز المربع (على سبيل المثال 5 + 28 + 40 + 57) .

ورقة المراجعة 6 :

لاتستخدم الآلة الحاسبة في هذه الورقة

القسم أ :

1- أعد كتابة البيانات الآتية باستخدام الرمز ($\propto$) .

(أ) أ تتغير طرديا بتغير ب.

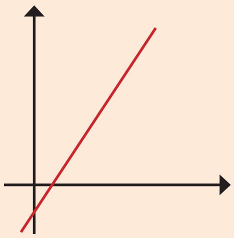
(ب) ب تتغير عكسيا بتغير جـ.

(جـ) جـ تتناسب طرديا مع الجذر التربيعي لـ ى .

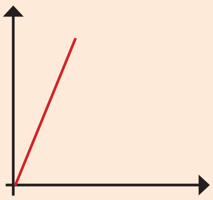
(د) ى تتناسب عكسيا مع مربع ع .

2- حدد أياً من الحالات الآتية تعبر عن تغير طردي.

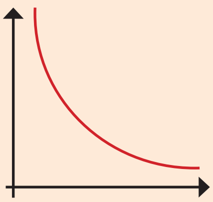
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

3- إذا كانت م تتغير طرديا بتغير ن وكانت م = 20 عندما ن = 5 .

(أ) أوجد المعادلة التي تربط بين م ، ن.

(ب) احسب قيمة م عندما ن = 4.

(جـ) احسب قيمة ن عندما م = 60.

القسم ب :

4- إذا كان أ = ك ن^2 حيث ك ثابت وكانت أ = 18 عندما ن = 6 فاحسب:

(أ) قيمة ك .

(ب) قيمة أ عندما ن = 2.

(جـ) قيمة ن عندما أ = 8.

5- إذا كانت ل تتغير طرديا بتغير الجذر التربيعي لـ ن وكانت ل = 1 عندما ن = 25 .

(أ) عبر عن ل بدلالة ن.

(ب) احسب قيمة ل عندما ن = 36.

(جـ) قيمة ن عندما ل = 2.

6- إذا كانت أ = ك ن^2 حيث ك ثابت وكانت ي = 18 عندما ن = 2 فاحسب:

(أ) قيمة ك .

(ب) قيمة ي عندما ن = 3.

(جـ) قيمة ن عندما ي = 112.

7- يرتبط المتغيران س ، ص يرتبطان بالمعادلة ص = ك $\sqrt{\text{س}}$ حيث ك ثابت ، القيم المتناظرة معطاة في الجدول الآتي:

س	4	9	ب
ص	12	أ	6

أوجد قيمة أ ، ب.

القسم جـ :

8- بالنسبة للجداول الآتية أوجد المعادلة التي تربط ص مع س.

(أ)

س	2	3	4
ص	12	8	6

(ب)

س	1	2	3
ص	36	9	4

(جـ)

س	4	9	16
ص	6	4	3

6

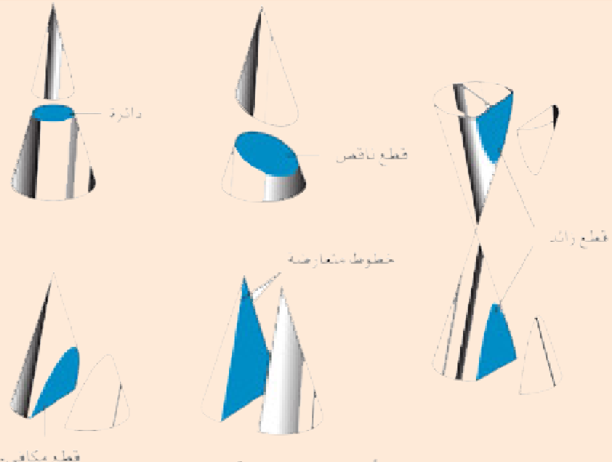
الباب السادس

الحلول البيانية

Graphical Solutions

6 الحلول البيانية Graphical Solutions

قبل حوالي 2000 سنة أسهم أبولونيس منافس وصديق أرشميدس في الرياضيات باستقصاء سلسلة من الأشكال المنحنية الجميلة التى قدم لها وصفا في كتابه "المخروطات" لقد تصورها على أنها مقاطع نتجت عن قطع المخروط بسطح مستوي، واعتمدت الأشكال الناتجة المتكونة على كيفية قطع المخروط- وتوضح الأشكال التالية بعضا من تلك المنحنيات.



مخروطات أبولونيس المقطعة

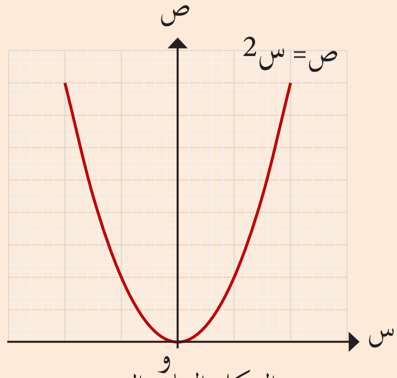
ولقد استقصى خواص هذه المنحنيات بقصد دراستها رياضياً، إلا أن تلك المخروطات تستخدم اليوم على نطاق واسع في العلوم لدراسة مسارات القذائف والأقمار الاصطناعية والكواكب.

في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادراً على أن:

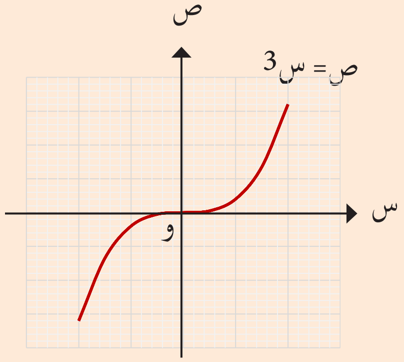
- تفرق بين المعادلات الخطية والمعادلات غير الخطية من أشكالها البيانية.
- تتعرف على الشكل البياني للدالة التربيعية والتكعيبية والمتماثلة حول نقطة الأصل ، والمتماثلة حول محور الصادات من معادلتها.
- ترسم أشكالاً بيانية غير خطية.
- تحل معادلات غير خطية بيانيا.
- تستخدم أشكالاً بيانية غير خطية في حل مشكلات فيزيائية.

1-6 الرسوم البيانية غير الخطية Non Linear Graphs

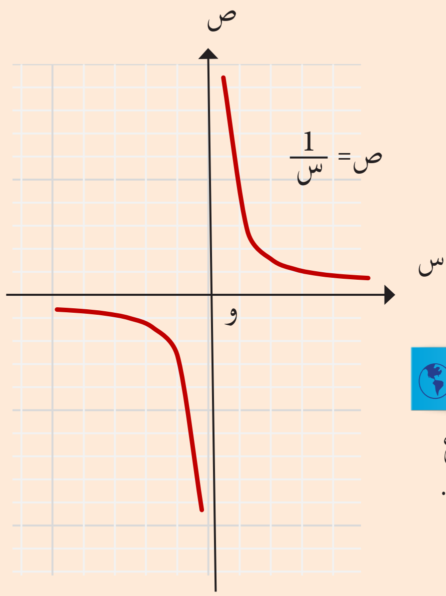
الأشكال الأربعة البيانية غير الخطية التي سوف نتعرض لها في هذا الكتاب هي كمايلي:



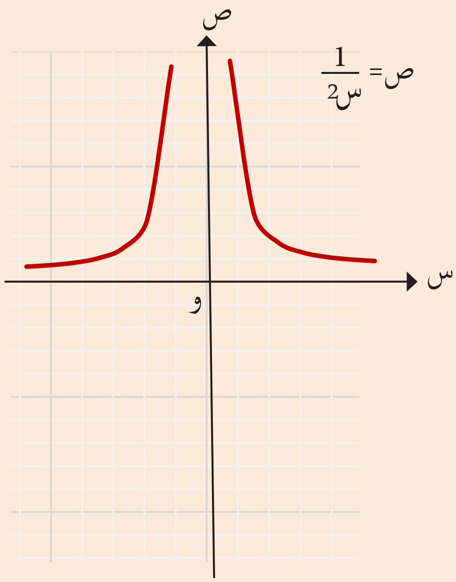
الشكل البياني التربيعي



الشكل البياني التكعيبي



الشكل البياني التقابلي



الشكل البياني التقابلي المربع

ملحوظة Note

- الرسم البياني التربيعي يعرف أيضا بالقطع المكافىء.
- و يعرف الرسم البياني التقابلي بالقطع الزائد.

Times equation Online

- قاموس مصور عن الانواع المختلفة للمنحنيات وخواصها.

2-6 الرسوم البيانية التربيعية Quadratic Graphs

الرسم البياني التربيعي يتخذ الصورة ص= أ$س^2$ + ب س + جـ حيث أ ، ب ، جـ ثوابت، أ ≠ صفر ، والشكل البياني التربيعي يسمى أيضا القطع المكافئ.

مثال 1 :

ارسم الشكل البياني ص = س^2 - 3 س + 2 حيث -2 $\leqslant$ س $\leqslant$ 5

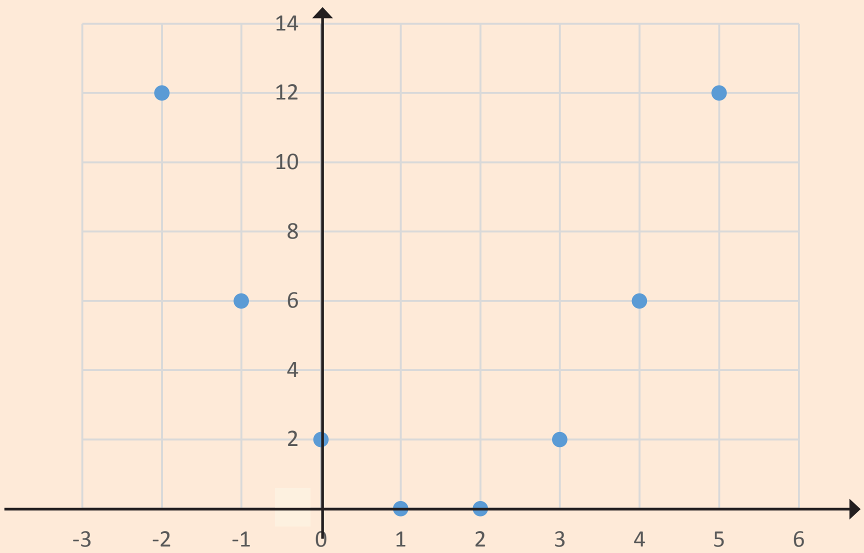
الحل :

أولا: كون جدول القيم كما يلي:

س	2-	1-	0	1	2	3	4	5
س^2	4	1	0	1	4	9	16	25
- 3 س	6	3	0	3-	6-	9-	12-	15-
+ 2	2	2	2	2	2	2	2	2
ص = س^2 - 3 س + 2	12	6	2	0	0	2	6	12

ثم ارسم الإحداثيات للنقاط (س ، ص) على ورقة الرسم البياني بمقياس رسم مناسب سواء بالنسبة لمحور السينات أو الصادات.

سوف نستخدم في هذا المثال مقياس رسم 1 سم لكل وحدة طول من محور السينات. 1 سم لكل وحدتين طول من محور الصادات.

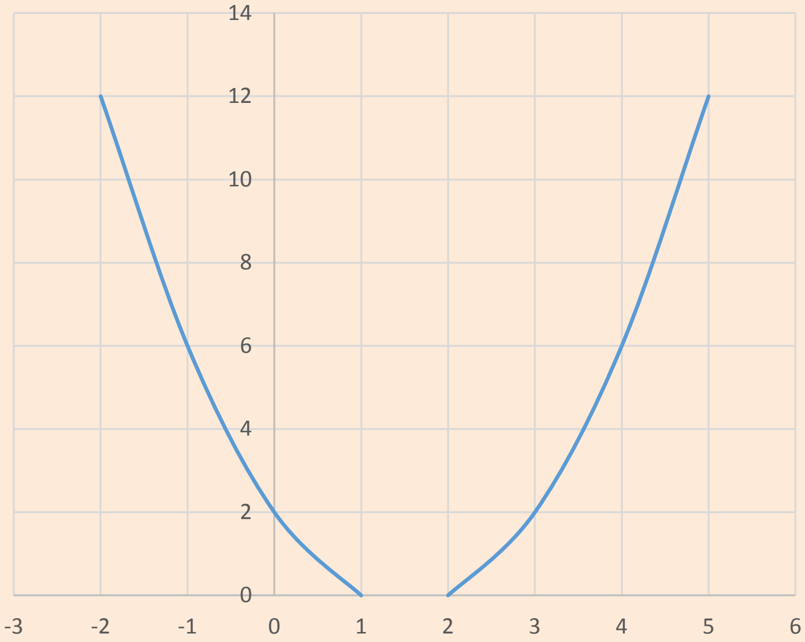


صل النقاط بعد ذلك.

تذكر عند توصيل النقاط:

- استخدام سن قلم رصاص حاد.
- محاولة رسم المنحنى بسهولة وانسيابيه (ليس به اعوجاج)
- جعل يدك داخل المنحنى عند رسمه.

هذا الشكل البياني خطأ لان المنحنى يجب أن يمر أسفل محور السينات عند 1 < س < 2.

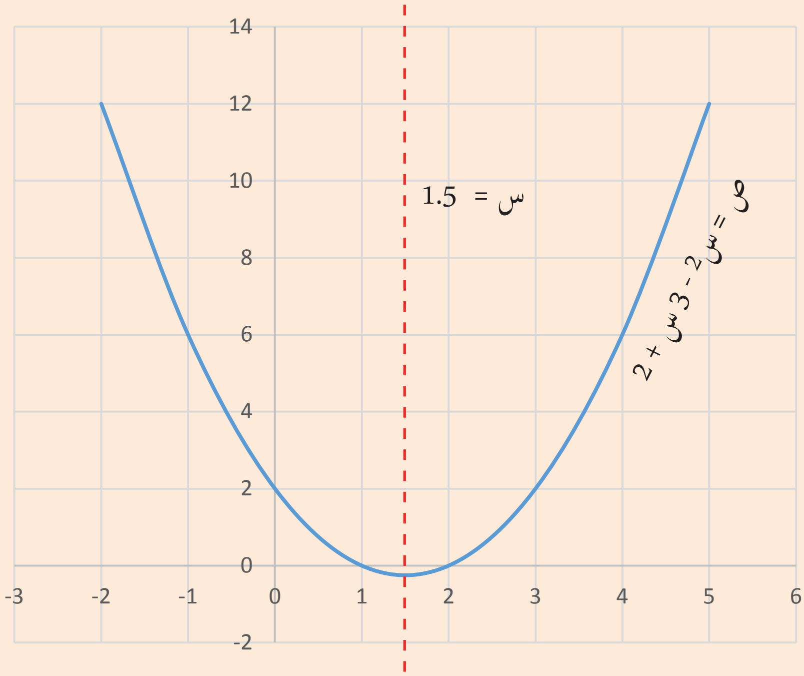


ملوحظة Note

- يمكن مراجعة ذلك عن طريق إيجاد قيمة ص عندما س = 1.5

س	1.5
$س^2$	2.25
- 3 س	- 4.5
+ 2	2
ص	- 0.25

∴ المنحنى يجب أن يكون هكذا.



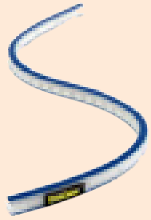
إن كنت في شك من شكل المنحنى بين أي نقطتين. أوجد قيمة ص عند نقطة وسيطة

لاحظ أن الشكل البياني ص= س^2 - 3 س + 2 متماثل حول الخط المستقيم س = 1.5 .

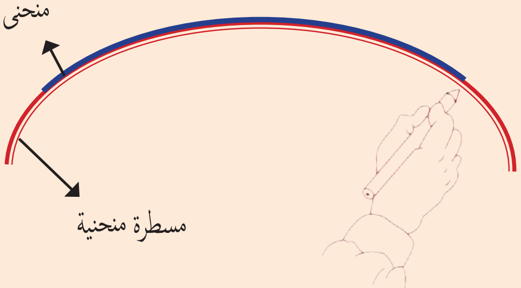
ملاحظات Notes

وفيما يلي بعض الإرشادات التي قد تساعدك على رسم المنحنى غير الخطي سواء استخدمت مسطرة منحنية أم لم تستخدم.

- مسطرة منحنية قابلة للضبط طولها 30 سم إلى 40 سم هي الأكثر ملائمة.



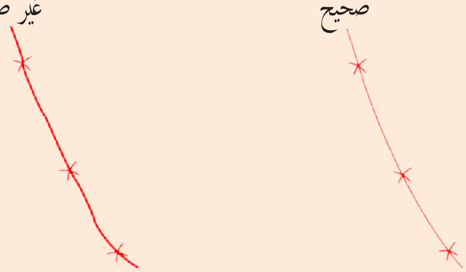
1- اجعل يدك داخل المنحنى حتى إذا كان ذلك يعني الدوران بالورقة.



- ارسم دائما منحنى انسيابيا ولا ترسم خطوطا مستقيمة.

2- لا تكون أي أركان في المنحنى (أي لا تجعله مضلعا)

3- استخدم قلم رصاص حاد السن وارسم المنحنى بانسيابية



مثال 2 :

انقل وأكمل الجدول الآتي للعلاقة : ص = $س^2$ - 2 س - 4

س	3-	2-	1-	0	1	2	3	4	5
ص	11		1-		5-		1-		11

مستخدما مقياس رسم 1 سم لكل وحدة طول من محور السينات، 2 سم لكل 5 وحدات طول من محور الصادات. ارسم العلاقة: ص = $س^2$ - 2 س - 4 حيث 3 - $\leqslant$ س $\leqslant$ 5

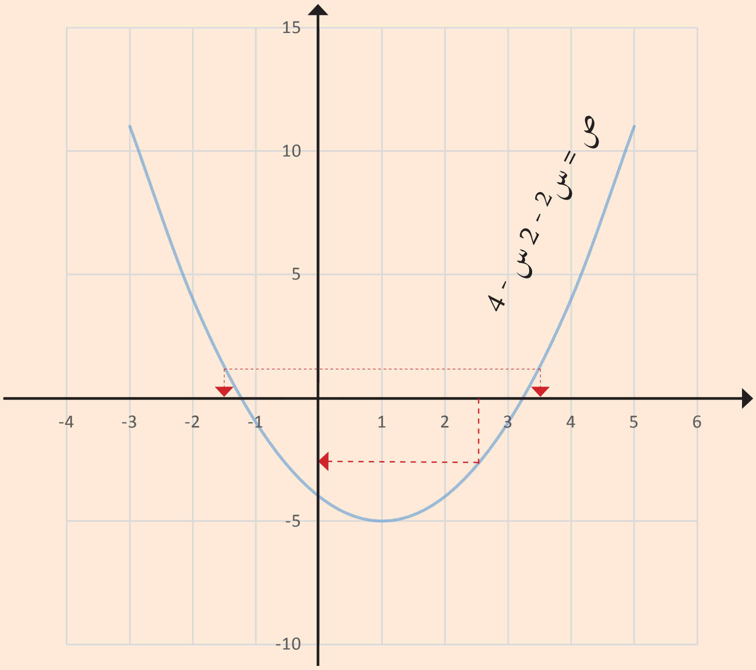
من الشكل البياني قدر قيم (قيمة) ما ياتي:

(أ) ص عندما س = 2.5   (ب) س عندما ص = 1

الحل :

الجدول للعلاقة ص = $س^2$ - 2 س - 4 كما يلي:

س	3-	2-	1-	0	1	2	3	4	5
ص	11	4	1-	4-	5-	4-	1-	4	11



ملاحظات Notes

- عندما س = 2-

ص= $س^2$ - 2 س - 4

= $(2-)^2$ - 2 (2-) - 4

= 4 + 4 - 4

= 4

حاول إيجاد القيم الثلاث الأخرى لـ ص

(أ) عندما س = 2.5   فإن ص= - 2.75

(ب) عندما ص = 1   فإن س= - 1.5 أو 3.5

- - 2.75 منتصف المسافة بين - 2.5 و - 3.

- 1.5 - منتصف المسافة بين - 1.6 و - 1.4 . بينما 3.5 منتصف المسافة 3.4 و 3.6

تمرين 6 أ :

1 - انقل وأكمل الجدول الآتي للعلاقة : ص = س^2 - 3 س + 1

س	-2	-1	0	1	2	3	4	5
س^2		1		1			16	
- 3 س		3		-3			-12	
+ 1	1	1	1				1	1
ص = س^2 - 3 س + 1		5		-1			5	

مستخدما 2 سم لتحل محل وحدة واحدة من محور السينات، 2 سم لتحل وحدتين من محورالصادات. ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص = س^2 - 3 س + 1 حيث $-2 \leqslant$ س $\leqslant 5$

2 - انقل وأكمل الجدول التالي للعلاقة : ص = 4 + 2 س - س^2

س	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
ص	-11	-4		4	5		1	-4	

مستخدما 1 سم لتحل محل وحدة واحدة من محور س، 2 سم لتحل 5 وحدات من محور ص. ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص = 4 + 2 س - س^2 حيث $-3 \leqslant$ س $\leqslant 5$

قدر من رسمك البياني قيمة:

(أ) ص عندما س = 2.5 .

(ب) س عندما ص = -1 .

3 - احسب قيمة كل من أ ، ب ، جـ في الجدول التالي للمعادلة : ص = - 12 + 7 س - س^2

س	0	1	2	3	4	5	6	7
ص	-12	أ	-2	ب	0	جـ	-6	-12

مستخدما 2 سم لتحل محل وحدة واحدة من محور س، 2 سم لتحل محل وحدتين من محور ص. ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص = -12 + 7 س - س^2 حيث $0 \leqslant$ س $\leqslant 7$

من رسمك البياني قيمة:

(أ) اكتب قيم س عندما يقطع المنحنى محور السينات .

3-6 الرسوم البيانية التكعيبية Cubic Graphs

الرسم البياني التكعيبي يكون على صورة العلاقة:

ص= أس^3 + ب س^2 + جـ س + ى   حيث أ، ب ، جـ ، ى ثوابت ، أ ≠ 0

مثال 3 :

انقل واكمل الجدول للعلاقة : ص = س^3 - 3

س	3-	2-	1-	0	1	2	3
ص	30-		4-		2-		24

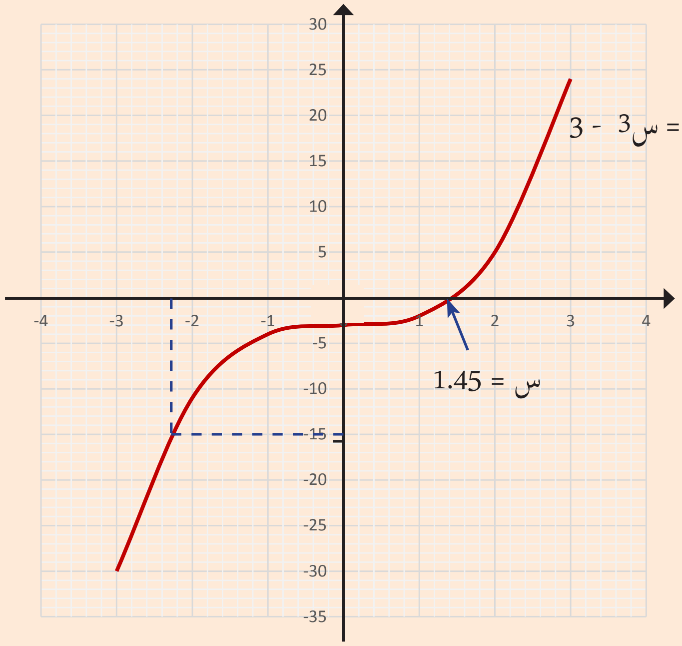
مستخدما 2 سم لتمثل وحدة واحدة من محور السينات، 2 سم لتمثل 10 وحدات من محور الصادات. ارسم الشكل البياني للعلاقة:

ص = س^3 - 3 عندما - 3 ⩽ س ⩽ 3   أوجد من الرسم البياني قيمة:

(أ) ص عندما س = 2.3   (ب) س عندما ص = 0

الحل : جدول المعادلة ص = س^3 - 3 هو كما يلي:

س	3-	2-	1-	0	1	2	3
ص	30-	11	4-	3-	2-	5	24



(أ) عندما س = - 2.3   فإن ص= - 15

(ب) عندما ص = 0   فإن س= - 1.45

مثال 4 :

احسب قيمة (أ) ،(ب) في جدول المعادلة الآتية : ص = س^3 - 12س + 3

س	4-	3-	2-	1-	0	1	2	3	4
ص	13-	أ	19	14	3	8-	13-	ب	19

مستخدما 1 سم لتمثل وحدة واحدة من المحورالسيني، 1 سم لتمثل خمس وحدات من المحور الصادي . ارسم الشكل البياني للعلاقة:

ص = س^3 - 12س + 3 عندما - 4 ⩽ س ⩽ 4

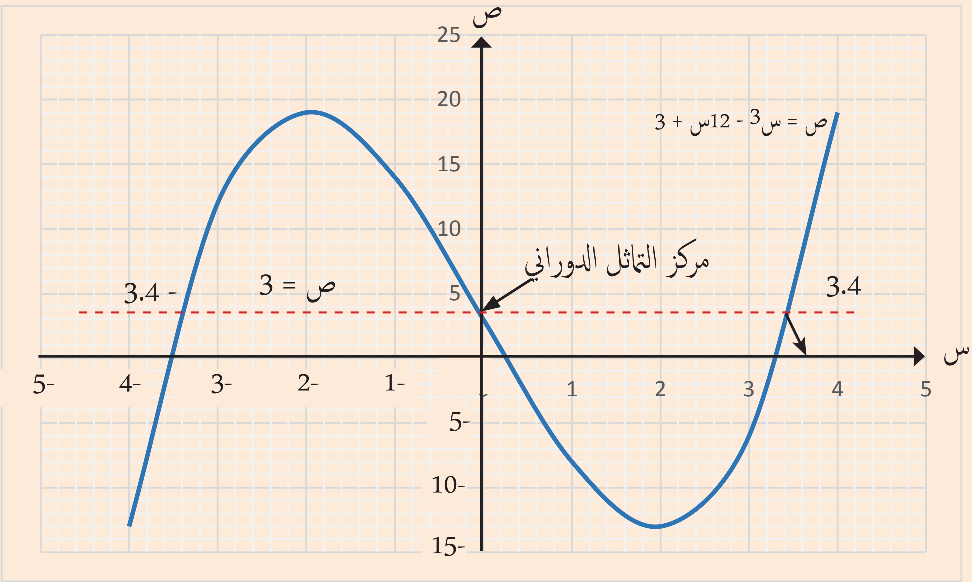
(أ) اوجد من الرسم البياني قيمة س عندما ص = 3

(ب) الشكل البياني له تماثل دوراني من الدرجة 2 ، حدد إحداثيات مركز التماثل الدوراني.

الحل :

عندما س = - 3 ، ص = أ ∴ أ = (-3)^3 - 12 (-3) + 3 = 12

عندما س = 3 ، ص = ب ∴ ب = 3^3 - 12 (3) + 3 = -6



(أ) عندما ص = 3 فإن س= - 3.4 ، 0 ، 3.4

(ب) مركز التماثل الدوراني عند (0 ، 3)

تمرين 6 ب :

1 - انقل واكمل الجدول الآتي للعلاقة : ص = $س^3$

س	-3	-2	-1	0	1	2	3
ص = $س^3$	-27	-8		3		8	

مستخدما 2 سم لتحل محل وحدة واحدة من المحورالسيني، 2 سم لتحل محل خمس وحدات من المحور الصادي . ارسم الشكل البياني للعلاقة:

ص = $س^3$ عندما - 3 ≤ س ≤ 3

استخدم رسمك لتقدير القيمة مقربا الناتج لأقرب رقم عشري واحد.

(أ) $(1.7)^3$ (ب) $(-2.4)^3$ (جـ) $\sqrt[3]{11}$ (د) $\sqrt[3]{-21}$

2 - أجب عن جميع عناصر هذا السؤال في ورقة رسم بياني وحيدة.

س	-2	-1	0	1	2	3	4
ص	أ	4	0	2	4	0	-16

جدول القيم المعطى هو العلاقة: ص = 3 $س^2$ - $س^3$

(أ) احسب قيمة أ .

(ب) ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص = 3 $س^2$ - $س^3$ عندما - 2 ≤ س ≤ 4

استخدم مقياس رسم 2 سم لتمثيل وحدة واحدة للمحور السيني ، 2 سم لتمثيل 5 وحدات من المحور الصادي.

(جـ) استخدم رسمك لإيجاد قيمة س عندما ص = 3

4-6 الرسوم البيانية التبادلية، والتبادلية المربعة

Reciprocal and Square -reciprocal Graph

تكون معادلة المنحنى البياني التبادلي على الصورة:

$ص = \frac{ك}{س}$ حيث ك ثابت ، ك ≠ صفر ، وهو معروف أيضا باسم القطع الزائد.

الشكل البياني التبادلي المربع يكون على الصورة:

$ص = \frac{ك}{س^2}$ حيث ك ثابت ، ك ≠ صفر .

مثال 5 :

جدول القيم المعطى هو للعلاقة: $ص = \frac{6}{س}$

س	4-	3-	2-	1-	0.5-	0.3-	0.3	0.5	1	2	3	4
ص	1.5-	2-	3-	6-	12-	20-	20	أ	6	3	2	1.5

(أ) احسب قيمة أ .

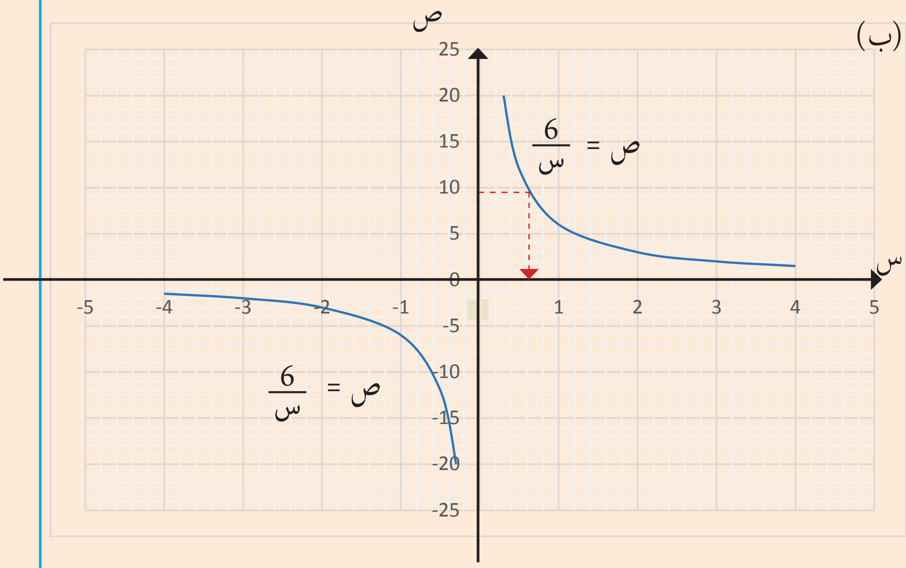
(ب) مستخدما 1 سم لتمثل وحدة واحدة من المحورالسيني، 1 سم لتمثل 5 وحدات على المحور الصادي . أوجد الرسم البياني للعلاقة: $ص = \frac{6}{س}$ حيث $4- \geqslant س \geqslant 4$

(جـ) من الرسم قدر قيمة س عندما ص = 9.5.

الحل :

(أ) عندما س = 0.5 ، ص = أ $\therefore$ أ $= \frac{6}{0.5} = 12$

(ب)



(جـ) عندما ص = 9.5 فإن س = 0.6

ملوحظة Note

1 - على الرغم من أن الشكل البياني يتكون من جزءين منفصلين إلا انه يجب اعتباره جزءا واحدا.

2 - عندما س =0 ، ص= $\frac{6}{0}$ لا تكون معرفة هذا يشير إلى وجود انفصال (تباعد) عند س = 0 .

3 - إذا زادت قيمة س الموجبة فإن قيمة ص تتناقص والمنحنى يقترب جدا من محور السينات ولكن لا يلمسه أما اذا اقتربت قيمة س من الصفر فإن قيمة ص تزداد بإطراد ويصبح المنحنى مقتربا جدا من محور الصادات ولكن لا يلمسه أبدا.

الخطان المستقيمان (في هذه الحالة محوري س ، ص) يعرفا باسم خطى التقارب.

مثال 6 :

الجدول المعطى للقيم عندما ص $= \frac{9}{س^2}$

س	3-	2-	1-	0.5-	0.5	1	2	3
ص	1	أ	9	36	36	9	2.25	1

(أ) احسب قيمة أ .

(ب) مستخدما 2 سم لتمثل وحدة واحدة من المحورالسيني، 2 سم لتمثل 10 وحدات على المحور الصادي . ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص $= \frac{9}{س^2}$ عندما $-3 \leqslant$ س $\leqslant 3$

(جـ) قدر من الرسم البياني قيمة س عندما ص = 5.

ملوحظة Note

1 - رغم أن الرسم البياني يتكون من جزءين منفصلين يجب اعتباره رسما بيانيا واحدا.

2 - يقع المنحنى كله فوق محورالسينات لان قيم ص دائما موجبة .

3 - لا يُعرَّف المنحنى بـ س =0.

4 - يكون المنحنى متماثلا حول محور الصادات.

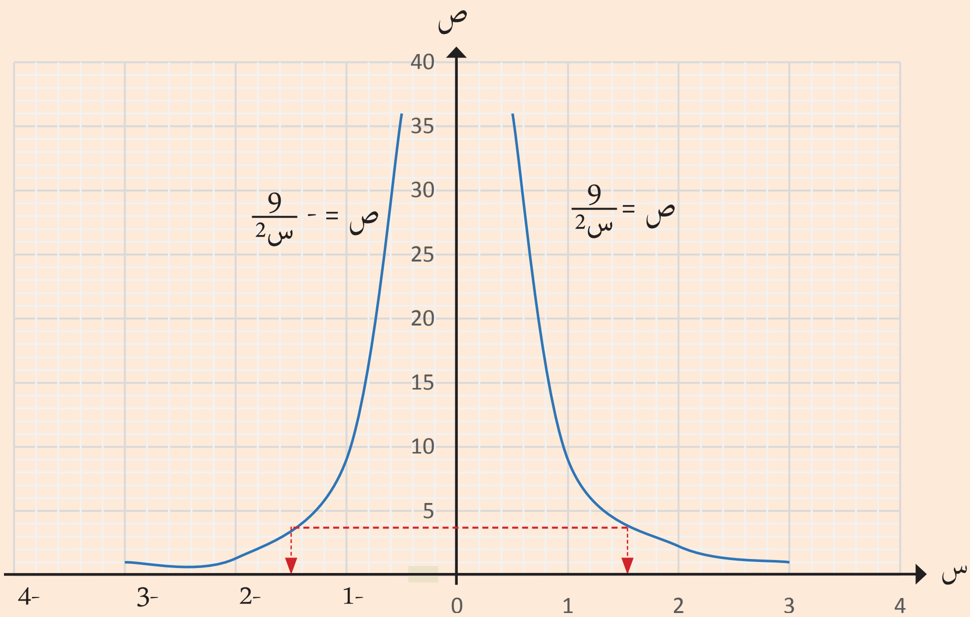
الحل :

(أ) عندما س = -2 ، ص = أ

$\therefore$ أ $= \frac{9}{(-2)^2} = \frac{9}{4} = 2.25$

(جـ) عندما ص = 5 فإن س = -1.3 ، 1.3

(ب)



تمرين 6 جـ :

1 - انقل وأكمل الجدول التالي للعلاقة : ص = $\frac{1}{س}$

س	-4	-2	-1	-0.5	-0.25	0.25	0.5	1	2	4
ص	-0.25	-0.5	-1		-4	4	2	1	0.5	

(أ) مستخدما 2 سم لتمثل وحدة واحدة للمحورين . ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص = $\frac{1}{س}$ عندما - 4 ≤ س ≤ 4

(ب) حدد معادلتي التماثل للمنحنى.

2 - انقل وأكمل الجدول التالي للعلاقة : ص = س^3

س	-3	-2	-1	-0.5	-0.25	0.25	0.5	1	2	3
ص	-1	-1.5	-3	-6	-12	أ	6	3	1.5	1

(أ) احسب قيمة أ .

(ب) مستخدما 2 سم لتمثل وحدة واحدة من المحورالسيني، 2 سم لكل 4 وحدات من المحور الصادي . ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص = $\frac{3}{س}$ عندما - 3 ≤ س ≤ 3.

(جـ) استخدم الرسم في تقدير قيمة ص عندما س = 2.3 .

3 - مستخدما نفس مقياس الرسم ونفس القيم لـ س كما في السؤال رقم (2) . ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص = - $\frac{3}{س}$ حيث - 3 ≤ س ≤ 3

ما هي علاقة هذا المنحنى بالمنحنى ص = $\frac{3}{س}$ ؟

4 - جدول القيم المعطى هو العلاقة : ص = $\frac{4}{س^2}$

س	-3	-2	-1	-0.5	-0.25	0.25	0.5	1	2	3
ص	0.44	1	أ	16	64	64	ب	4	1	0.44

(أ) احسب قيمة أ، ب.

(ب) مستخدما 2 سم لتمثل وحدة واحدة من المحورالسيني، 2 سم لتمثل 10 وحدات على المحور الصادي . ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص = $\frac{4}{س^2}$ حيث - 3 ≤ س ≤ 3.

(جـ) حدد معادلة خط التماثل.

(د) استخدم رسمك البياني لتقدير قيم س عندما ص = 2 .

5 - مستخدما نفس مقياس الرسم ونفس القيم لـ س كما في السؤال رقم (4) . ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص = - $\frac{4}{س}$ حيث - 3 ≤ س ≤ 3 ، ما هي علاقة المنحنى بالمنحنى ص = $\frac{4}{س^2}$

6-5 الحلول البيانية للمعادلات التربيعية

Graphical Solutions of Quadratic Equations

تأمل المعادلة : س^2 - 5 س + 6 = 0

أكبر أس فيها للمجهول س هو 2 ، وتسمى مثل هذه المعادلة معادلة تربيعية ولهذا فإن أي معادلة على الصورة :

أس^2 + ب س + جـ = 0 حيث أ، ب ، جـ ثوابت ، أ $\neq$ 0 تسمى معادلة تربيعية.

تعلمنا في الصف التاسع الأساسي حل المعادلة التربيعية بواسطة التحليل على سبيل المثال:

س^2 - 5 س + 6 = 0

(س - 3) (س - 2) = 0

$\therefore$ س - 3 = 0 أو س - 2 = 0

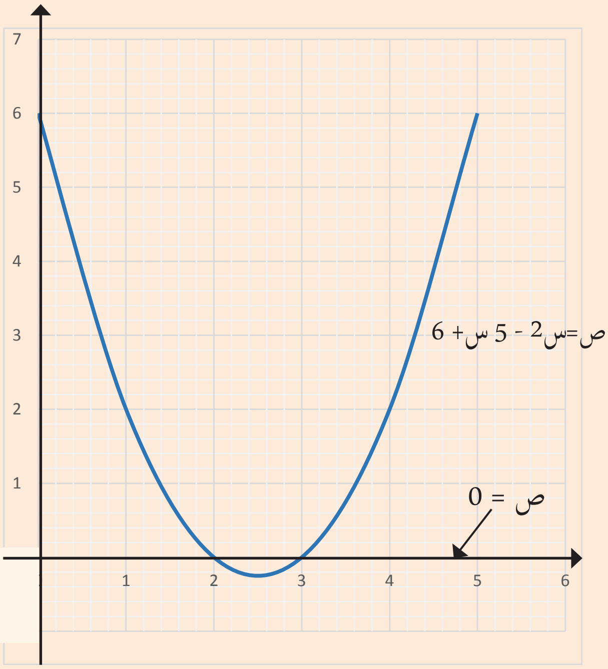
$\therefore$ س = 3 أو س = 2

طريقة أخرى لحل المعادلة التربيعية تكون برسم المعادلة التربيعية بيانياً.

ولحل المعادلة : س^2 - 5 س + 6 = 0 سوف نحتاج لرسم ص= س^2 - 5 س + 6 ويتضمن الجدول التالي قيم العلاقة:

ص= س^2 - 5 س + 6

س	0	1	2	3	4	5
ص	6	2	0	0	2	6



يرسم بعد ذلك الشكل البياني : ص = س^2 - 5 س + 6 مستخدما مقياس رسم 1 سم لكل وحدة واحدة على محور السينات ومحور الصادات.

المنحنى المرسوم للعلاقة: ص= س^2 - 5 س + 6 ⟵ (1)

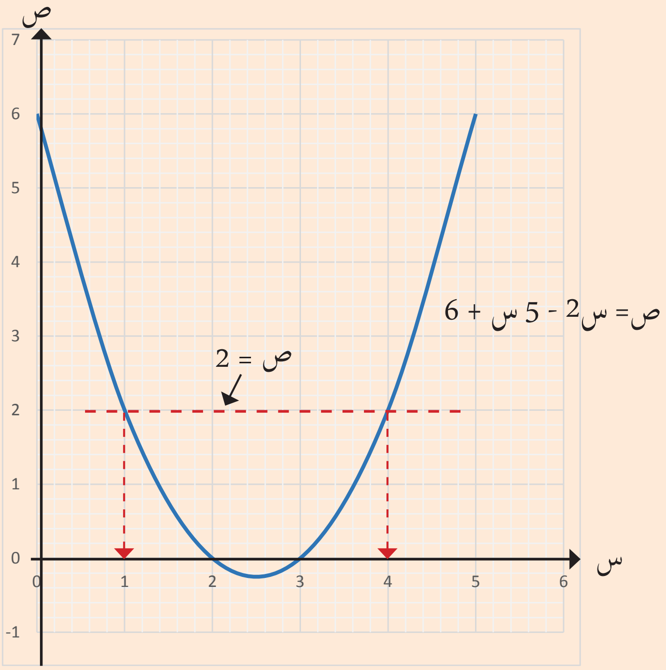
للتحول إلى المعادلة: س^2 - 5 س + 6 = 0

ضع ص = 0 ⟵ (2)

تذكر أن الحل البياني للمعادلتين الخطيتين الآنيتين يعطي بنقطة تقاطع المستقيمين.

وبطريقة مشابهة يمكننا حل المعادلتين الآنيتين (1) ، (2) بإيجاد النقطة أو النقط التي يقطع فيها المنحنى (1) والخط المستقيم (2)

نجد من الرسم البياني أن ص = 0 يقطع المنحنى ص= $س^2$ - 5 س + 6
في النقط س = 2 ، س = 3 ولهذا فإن الحل للمعادلة: $س^2$ - 5 س + 6 = 0
هو س = 2 ، س = 3 ،
أيضا س = 2 ، س = 3 يعرفا باسم جذري المعادلة التربيعية: $س^2$ - 5 س + 6 = 0
وبطريقة مشابهة لحل المعادلة: $س^2$ - 5 س + 6 = 2 يجب إيجاد الإحداثي السيني للنقطة أو النقط التي تقطع المنحنى ص= $س^2$ - 5 س + 6 والخط المستقيم ص = 2 .



ومن الرسم البياني: ص = 2 يقطع ص= $س^2$ - 5 س + 6 في النقط حيث س = 1 ، س = 4 ولهذا فإن حل المعادلة: $س^2$ - 5 س + 6 = 2 هو س = 1 ، س = 4 ،
ويمكن مراجعة هذا الحل عن طريق التحليل كما يلي:

$س^2$ - 5 س + 6 = 2

∴ $س^2$ - 5 س + 6 - 2 = 0

$س^2$ - 5 س + 4 = 0

(س - 4) (س - 1) = 0

∴ س - 4 = 0 أو س - 1 = 0

∴ س = 4 أو س = 1

الحل البياني للمعادلة التربيعية في س يُعطي بواسطة إحداثيات س للنقطة (النقاط) التي يقطع فيها المنحنى الخط المستقيم.

ملحوظة Notes

- يمكن الحصول على نفس الحل عن طريق التحليل إلى عوامل.

ملحوظة Notes

- تذكر أن لحل المعادلة التربيعية عن طريق التحليل يجب أن يكون الطرف الايسر = صفر.

مثال 7 :

س	3-	2-	1-	0	1	2	3	4	5
ص	11-	4-	1	4	5	4	1	4-	11-

الجدول المعطى هو للعلاقة : ص = 4 + 2س - س^2

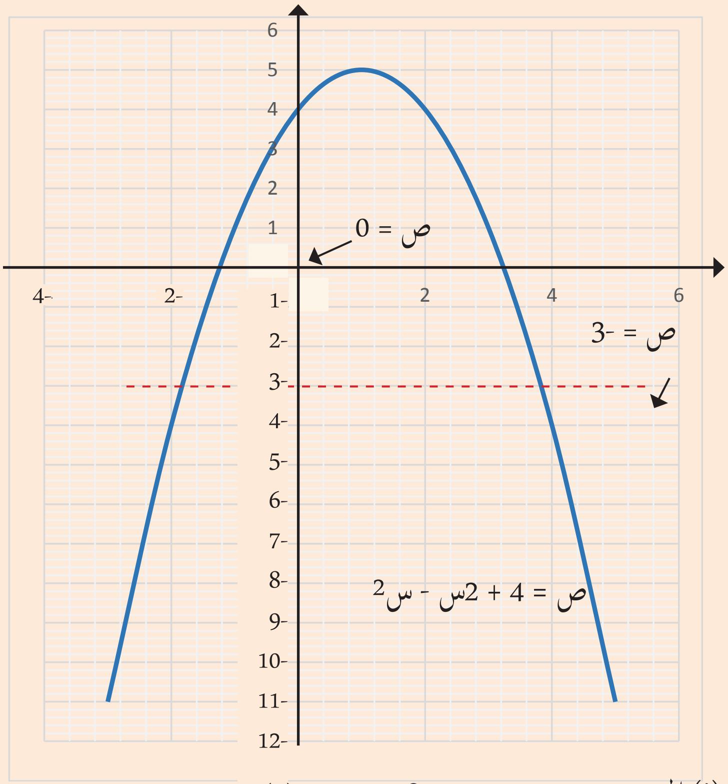
(أ) مستخدما مقياس رسم 1 سم لتمثل وحدة واحدة لمحور السينات، 2 سم لكل 5 وحدات لمحور الصادات . ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص = 4 + 2س - س^2 حيث -3 ⩽ س ⩽ 5

(ب) استخدم رسمك البياني لحل ما يلي:

(i) 4 + 2س - س^2 = 0 (ii) 4 + 2س - س^2 = -3

الحل :

(أ)



(ب) (i) المنحنى ص = 4 + 2س - س^2 .... (1)

حيث 4 + 2س - س^2 = 0

نحصل على ص = 0 .... (2)

(1) ، (2) يتقاطعا في النقاط حيث س = -1.2 أو س = 3.2

∴ حل المعادلة: 4 + 2س - س^2 = 0 يكون س = -1.2 أو س = 3.2

(ii) حيث 4 + 2س - س^2 = -3 نحصل على ص = -3 .... (3)

يتقاطع (1) ، (3) في النقاط حيث س = -1.8 أو س = 3.8

∴ حل المعادلة: 4 + 2س - س^2 = -3 يكون س = -1.8 أو س = 3.8

إذا لم يكن الحل عددا صحيحا حاول إعطاء إجابتك لأقرب رقم عشري واحد.

تمرين 6 د :

1 - الجدول التالي هو للعلاقة : ص= $س^2$ - س - 3

س	3-	2-	1-	0	1	2	3	4
ص	9	3	1-	3-	3-	1-	3	9

(أ) مستخدما 2 سم لتمثيل وحدة واحدة من المحور السيني . 1 سم لكل وحدة واحدة من المحور الصادي ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص = $س^2$ - س - 3 عندما - 3 ⩽ س ⩽ 3

(ب) استخدم رسمك لحل ما يلي:

(i) $س^2$ - س - 3 = 0

(ii) $س^2$ - س - 3 = 6

2 - احسب قيمة كل هـ ، ك، م من في جدول القيم التالي للعلاقة: ص = $س^2$ - 7 س + 12

س	0	1	2	3	4	5	6	7
ص	12	هـ	2	ك	0	م	6	12

(أ) مستخدما 2 سم لتمثيل وحدة واحدة من المحور السيني . 1 سم لكل وحدة واحدة من المحور الصادي ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص = $س^2$ - 7 س + 12 حيث 0 ⩽ س ⩽ 7 .

(ب) استخدم رسمك لحل ما يلي:

(i) $س^2$ - 7 س + 12 = 0

(ii) $س^2$ - 7 س + 12 = 4

3 -

س	0	1	2	3	4	5
ص	5	1	1-	1-	1	5

جدول القيم المعطي هو العلاقة : ص = $س^2$ - 5 س + 5

(أ) احسب قيمة $س^2$ - 5 س + 5 حيث س = $2\frac{1}{2}$.

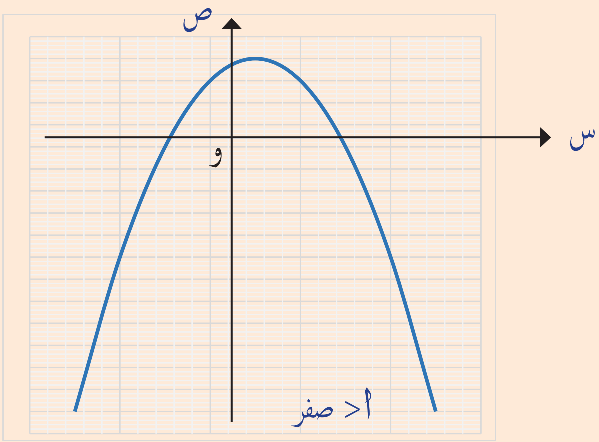
(ب) مستخدما 2 سم لتمثل وحدة واحدة من المحورين س، ص . ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص = $س^2$ - 5 س+ 5 عندما 0 ⩽ س ⩽ 5.

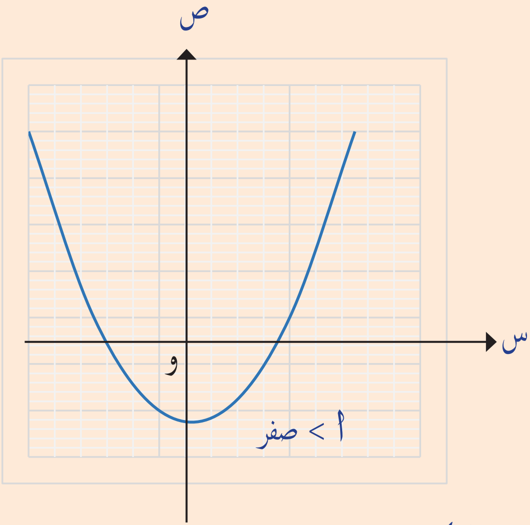
(جـ) استخدم رسمك لحل المعادلة $س^2$ - 5 س + 5 =0.

ملخص:

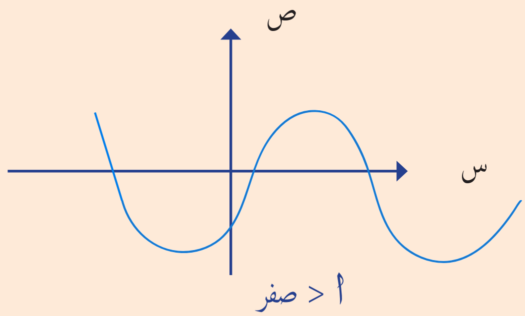
1 - الرسومات البيانية الأساسية الأربعة هي:

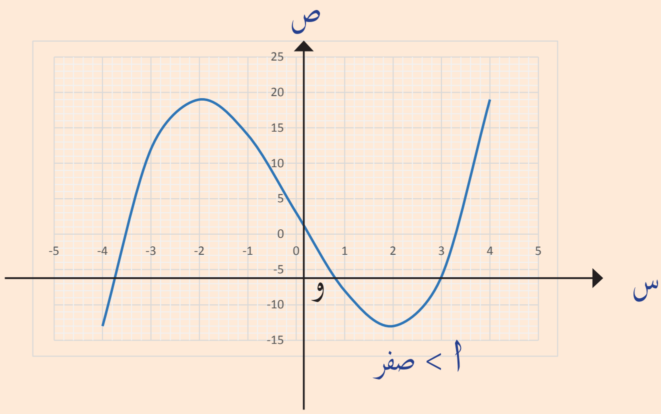
(أ) الرسوم البيانية التربيعية ص = أس^2 + ب س + جـ



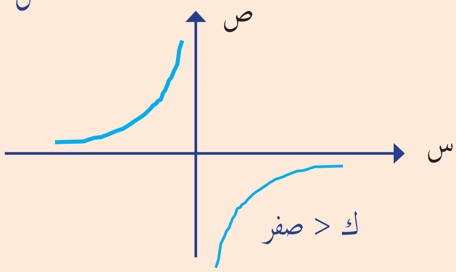


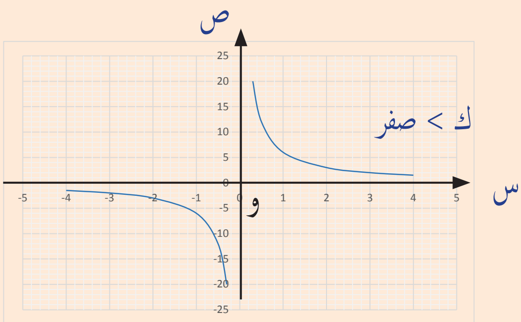
(ب) الرسومات البيانية التكعيبية: ص = أس^3 + ب س^2 + جـ س + ى



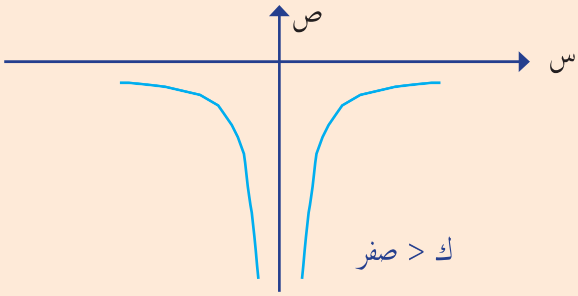


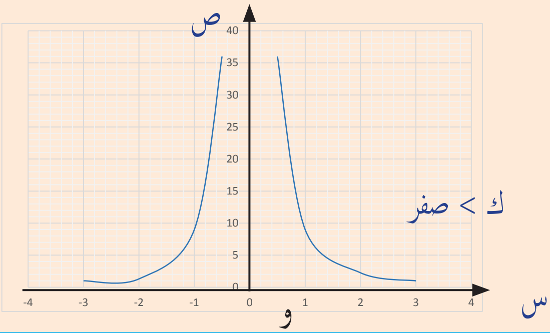
(جـ) الرسومات البيانية التبادلية : ص = $\frac{ك}{س}$





(د) الرسومات البيانية التبادلية المربعة : ص = $\frac{ك}{س^2}$

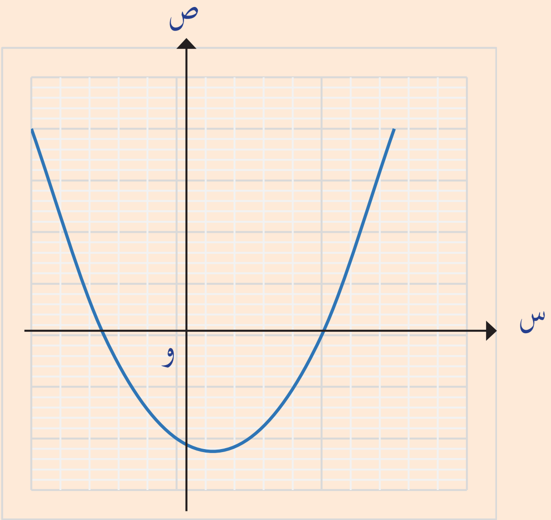




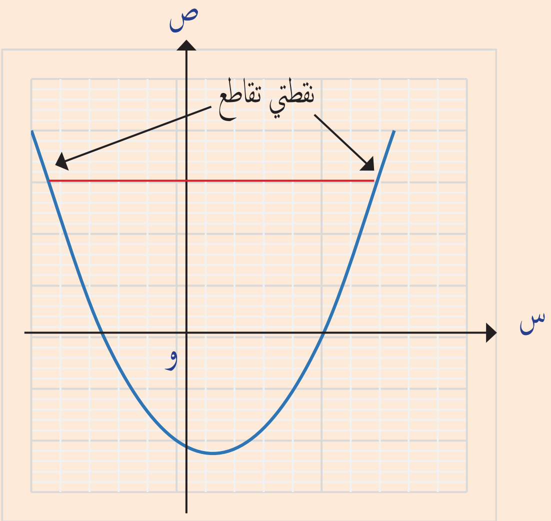
2 - يمكن الحصول على حل المعادلة التربيعية أس^2 + ب س + جـ = 0

من الرسم البياني التربيعي ص = أس^2 + ب س + جـ حيث يقطع محور السينات (أ، ب ، جـ ثوابت أ $\neq$ 0)

الرسم البياني التربيعي



3 - بصفة عامة الحل البياني للمعادلة التربيعية بدلالة س يعطي بإحداثيات س نقط (نقطة) تقاطع المنحنى مع مستقيم أحيانا لا يقطع المستقيم المنحنى وفي هذه الحالة المعادلة التربيعية ليس لها حل.



استقصاء الرياضيات:

شريط موبيوس هل 1+1 = 1 ؟

الطوبولوجي Topology هو فرع حديث نوعاً ما من أفرع الرياضيات ويتناول بصفة عامة الفراغات والأسطح والمجسمات المصمتة والمناطق، والشبكات و هو علم مليئ بالمتناقضات وضروب المستحيل، ويمكن أن نطلق على علم الطوبولوجي فن تحليل الخصائص الدائمة والثابتة في الشكل الهندسي. لا تتأثر تلك الخصائص ولا يطرأ عليها أي تغيير حتى بعد أن يتقلص الشكل أو يمتد أو يلتوي أو يُعوج أو يَبرز من الداخل (بشرط ألا يتمزق أو ينكسر).

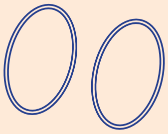
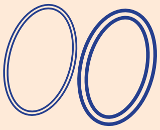
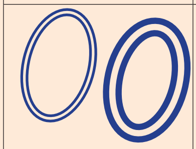
اكتشف العالم الرياضى الفلكي أغسطس فرديناد موبيوس (1790-1868 م) "شريط موبيوس" وهو مثال رائع لعلم الطوبولوجي. ولفهم ما يحدث عند تقطيع شريط موبيوس من الضرورى إجراء تجارب عملية بنفسك وتسجيل النتائج في جدول من الصعب التكهن بالمخرجات (النتائج) .

اقطع ثمانية شرائط من الورق طول كل منها 300 مم تقريبا وعرضها 30 مم .

الخطوة الأولى	خذ أحد الشرائط والصق حافتيه مستخدما الصمغ أو الشريط اللاصق وتأكد من عدم وجود التواءات. ما هو عدد الاضلاع والحواف التي لديك؟ إذا قطع إحداها عند منتصفه... ما هو الشكل المكون؟ وما هي خواص هذين النصفين؟
الخطوة الثانية	خذ شريطا آخر ثم قم بعمل نصف إنحناءة (180^0) عند أحد النهايات قبل ضم النهايتين كما حدث من قبل سوف تحصل على شريط موبيوس. الأن ارسم بالقلم الرصاص خطاً بطول مركز الشريط مستمرا إلى حيث ما بدأت. اقطع بطول هذا الخط ... ماذا تلاحظ ؟... كم عدد أنصاف الإنحناءات الموجودة في النموذج الآن؟
الخطوة الثالثة	خذ شريط موبيوس آخر واقطع بطوله موازياً لحافته وعلى بعد ثلث المسافة من الحافة ... استمر بالقطع حتى تصل إلى حيث بدأت. ما هي النتيجة في هذه المرة ؟ ما هي الابعاد (الطول ، العرض) لهذا الشريط ؟
الخطوة الرابعة	قم بعمل العملية السابقة مرة ثانية، قاطعاً الشريط ربع المسافة من الحافة. في أي أوجه تشبه أو تختلف هذه النتيجة عن سابقتها؟

هل يمكنك تخمين النتيجة إذا عملت مقطعا دائرياً في الشريط عل بعد خمس المسافات من حافته؟.

كرر الخطوات 2 ، 4 على شرائط لها نصفا التوائين (360^0) ، ثلاثة أنصاف التواءات (540^0) ، أربعة أنصاف التواءات (720^0) ، ملخصا الطريقة في الجدول التالي:

عدد أنصاف الإلتواءات	المقطع المركزي يكون	وصف في كلمات	رسم كروكي	ثلث مقطع يكون	ربع مقطع يكون
صفر	شريطان منفصلان	$\frac{1}{2}$ عرض ونفس طول الشريط الأساسي			
1 سطح واحد حافة واحدة	شريط واحد	$\frac{1}{2}$ العرض وضعف الطول			
2 ضلعان حافتان					
3					
4					

Note ملوحظة

- رغم ان ذلك نشاط ممتع فتوجد تطبيقات في الحياة الحقيقية لاشرطة من نوع موبيوس فعلى سبيل المثال. كثير من الاشرطة الخاصة بطابعة الحاسوب هي أشرطة موبيوس حتى يمكن استخدام الناحيتين.

ماهي النتيجة لو أخذناشريطا له 20 نصف التواء وقمنا بقطعه بطول المركز ؟ يمكن تكوين بعض القواعد من هذه التجارب.

لو كان لدينا (ن) (عدد الإلتواءات) حيث ن عدد زوجي فإنه يوجد شريطان يشبهان الأصلي، مرتبطان بنفس طريقة انحنائة الحد.

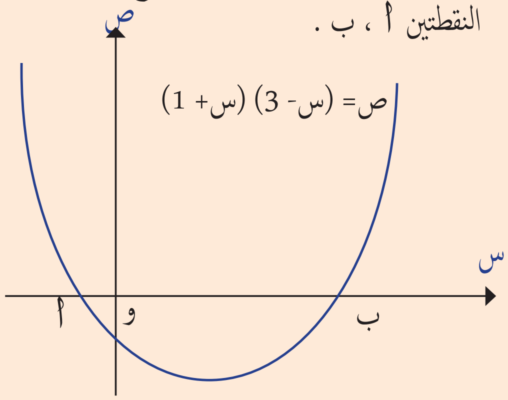
إذا كانت (ن) عددا فرديا تكون النتيجة شريطا واحد يشبه انحناء الحد.

لو أن ن ⩾ 3 يتم عقدها وسوف يكون لدينا عدد 2ن+2 أنصاف التواءات وبزيادة مقدارها 2 عند فتح اللفات واذا قطع الشريط إلى ثلاث قطع سوف تجد أن مركز الشريط يتماثل مع الأصل ولكن الشريطين الخارجيين سيكونا فردي أو زوجي (كنتيجة للتصنيف) وسوف يرتبطان بالحلقة المركزية.

ورقة المراجعة 7 :

القسم أ :

1- المنحنى ص= (س- 3) (س+ 1) يقطع محور السينات في النقطتين أ ، ب .



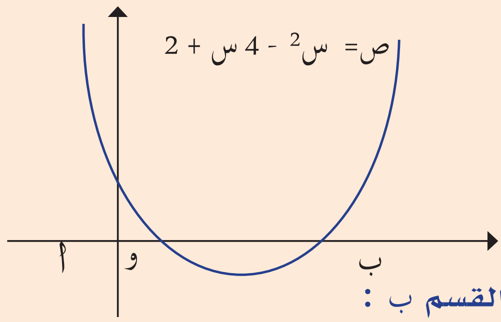
(أ) حدد الإحداثي السيني للنقطتين أ ، ب .

(ب) حدد معادلة خط التماثل للمنحنى.

2- الرسم البياني للمنحنى ص = س^2 - 4 س + 2

حيث -1⩽ س⩽ 5 ، استخدم الرسم البياني في إيجاد حل المعادلتين مقربا الناتج لأقرب رقم عشري واحد .

(أ) س^2 - 4 س + 2 = 0 . (ب) س^2 - 4 س - 2 = 0 .



القسم ب :

1- الجدول التالي لقيم العلاقة: ص = 2س^2 - 10 س + 5

س	1-	0	1	2	3	4	5	6
ص	17	5	3-	7-	7-	3-	5	17

(أ) احسب قيمة ص عندما س= $2\frac{1}{2}$.

(ب) مستخدما مقياس رسم 2 سم لكل وحدة على محور السينات، ومقياس رسم 2 سم لكل 5 وحدات على محور الصادات، ارسم بيانيا المنحنى ص = 2س^2 - 10 س + 5 .

حيث -1 ⩽س⩽ 6

(جـ) برسم خط مستقيم مناسب، حل المعادلة التالية:

2س^2 - 10 س + 13 = 0

4- الجدول التالي لقيم العلاقة: ص = 2س^2 - 5 س - 7

س	2-	1-	0	1	2	3	4	$4\frac{1}{2}$
ص	11	0	7-	10-	9-	4-	5	أ

(أ) احسب قيمة أ.

(ب) مستخدما مقياس رسم 2 سم لكل وحدة على محور السينات 25 سم لكل وحدتين على محور الصادات ارسم منحنى العلاقة

ص = 2س^2 - 5 س - 7 حيث -2⩽س⩽ $4\frac{1}{2}$.

(جـ) أوجد قيم س عندما ص= 5

5- الجدول التالي لقيم العلاقة: ص = $\frac{24}{س}$

س	2	3	4	6	8	12
ص	12	8	6	4	3	2

(أ) مستخدما مقياس رسم 1 سم لكل وحدة على كلا المحورين، ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص = $\frac{24}{س}$

حيث 0 ⩽س⩽ 12

(ب) استخدم رسمك البياني في تقدير قيمة:

(i) ص عندما س= 2.3

(ii) س عندما ص= 5.8

6- انقل وأكمل الجدول الآتي للعلاقة: ص=(س+ 2) (4 - س)

س	2-	1-	0	1	2	3	4
س+ 2	0		2		4		6
4 - س	6		4		2		0
ص	0		8		8		0

مستخدما مقياس رسم 2 سم لكل وحدة على محور السينات، 1 سم لكل وحدة على محور الصادات ارسم الشكل البياني للعلاقة

ص = (س+ 2) (4 - س) ومن رسمك البياني

(أ) أوجد معادلة خط تماثل المنحنى.

القسم جـ :

7- انقل وأكمل الجدول التالي لقيم العلاقة: ص = 8 س - س^2

س	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ص	0	7		15	16		12		0

7

الباب السابع

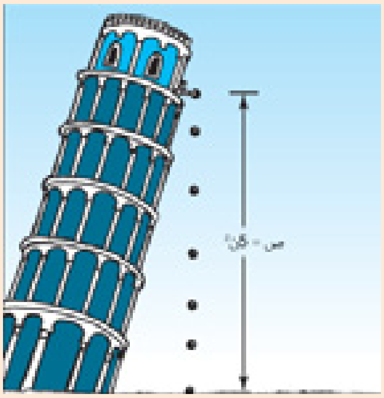
المعادلات التربيعية

Quadratic Equations

7 المعادلات التربيعية Quadratic Equations

وفقا للأسطورة قام الفيزيائي جاليليو جاليلي في عام 1585 بالقاء قذائف مدفع صغيرة من بين أعمدة برج بيزا المائل وقادت نتائج تلك التجربة فيما بعد إلى المعادلة التربيعية للسقوط الحر أو بالتحديد معادلة الحركة ص = 5ن^{2} حيث ص مسافة السقوط (بالمتر) ن الزمن المستغرق (بالثانية) لوصول الجسم إلى الأرض من وضع السكون.

وحين نحل المعادلة التربيعية قد نتوصل إلى نتيجة عبارة عن عدد سالب، نلاحظ على سبيل المثال أن س^{2}= 4 لها حلان هما س= + 2 ، س= - 2 حيث 2 × 2=4 أو - 2× -2=4 .



" ليوناردو دا بيزا" والذي اشتهر باسم فيبوناتشي وعاش من حوالي 1170 إلى 1230 م كان أحد أوائل الرياضيين الذين أولو الأعداد السالبة اهتماما، وفي إحدى المرات وأثناء محاولة حل مسألة مالية، أيقن أن المسألة لا يمكن حلها إلا بدلالة عدد سالب والذي مثل في نظره خسارة مالية.

وفي نهاية هذ الفصل سوف تكون قادراً على:

- تحل معادلة تربيعية عن طريق التحليل إلى عوامل.
- تتعرف على المقادير الرياضية التي على صورة المربع الكامل.
- تحل المعادلة التربيعية باستخدام الصيغ الرياضية.
- يعين محور التماثل ورأس منحنى الدالة التربيعية.
- يكون المعادلة التربيعية إذا عُلم جذراها.
- تحل مسائل لفظية تتضمن صياغة معادلات تربيعية.

7-1 حل المعادلات التربيعية عن طريق التحليل إلى عوامل

Solving Quadratic Equations by Factorisation

المعادلة التربيعية على الصورة:

$$أس^2 + ب س + جـ = 0$$

حيث: أ، ب ، جـ ثوابت مع $أ \neq 0$

تعلمنا في الفصل السادس كيفية حل المعادلة التربيعية بيانيا، أبسط طريقة لحل المعادلة التربيعية هي التحليل، والتي تم تغطيتها في كتاب الفصل التاسع الأساسي.

.

مثال:

$$س^2 - 5 س + 6 = 0$$

$$(س - 3) (س - 2) = 0$$

س - 3 = 0 أو س - 2 = 0

∴ س = 3 أو 2

تذكر عند حل المعادلة التربيعية عن طريق التحليل أن الطرف الأيسر يجب دائما أن يساوي صفراَ.

مثال 1: حل المعادلات الآتية بالتحليل:

(أ) $س^2 - 3 س - 18 = 0$ (ب) $أ^2 = 7 أ$ (جـ) م (م + 2) = 0

الحل:

(أ) $س^2 - 3 س - 18 = 0$

(س - 6) (س + 3) = 0

س - 6 = 0 أو س + 3 = 0

∴ س = 6 أو -3

(ب) $أ^2 = 7 أ$

$أ^2 - 7 أ = 0$

أ (أ - 7) = 0

أ = 0 أو أ - 7 = 0

∴ أ = 0 أو 7

(جـ) م (م + 2) = 0

م = 0 أو م + 2 = 0

∴ م = 0 أو -2

ملوحظة Note

يجب أن يكون الطرف الأيسر صفراَ، والعامل المشترك هو أ .

مثال2: حل المعادلة الآتية:

(أ) 6 س^2 + 5 س - 4 = 0 (ب) ص^2 = 9

الحل:

(أ) 6 س^2 + 5 س - 4 = 0

(2س - 1) (3س + 4) = 0

2س - 1 = 0 أو 3س + 4 = 0

2س = 1 أو 3س = - 4

∴ س = $\frac{1}{2}$ أو - $\frac{4}{3}$

ملوحظة Note

(ب) ص^2 = 9

ص^2 - 9 = 0

فرق مربعين .

(ص - 3) (ص + 3) = 0

ص - 3 = 0 أو ص + 3 = 0

∴ ص = 3 أو - 3

يمكن كتابة ذلك كما يلي: ص = ± 3

تذكر استخدام الجذور التربيعية الموجبة والسالبة

طريقة حل أبسط... ص^2 = 9

ص = ± $\sqrt{9}$

ص = ± 3

تمرين 7 أ:

(1) حل المعادلات الآتية:

(أ) س^2 + 4 س + 3 = 0 (ب) س^2 - 5 س + 6 = 0

(جـ) س^2 + 4 س = 77 (د) أ^2 - 4 أ= 32

(2) حل المعادلات الآتية:

(أ) س^2 = 6 س (ب) 2 ص = 3 ص^2

(جـ) س^2 = 64 (د) 7 ص^2 = 28

(هـ) 4س^2 - 48 = 16

(3) حل المعادلات الآتية:

(أ) 2 أ^2 + 3 أ - 2 = 0 (ب) 12س^2 - 25 س + 12 = 0

(جـ) م (م - 5) = 0 (د) 6 س (2 س + 3) = 0

(هـ) (2 أ - 3) (أ + 4) = 0

(4) حل المعادلات الآتية:

(أ) (س - 3) (س + 5) = 0 (ب) (ر^2 + 6 ر) = 0

(جـ) (س - 4) (2س + 3) = 0

2-7 المربعات الكاملة Perfect Squares

بما أن: $1^2 = 1$ ، $2^2 = 4$ ، $3^2 = 9$ ، $4^2 = 16$ ، $5^2 = 25$ الخ

فإن الأعداد 1 ، 4 ، 9 ، 16 ، 25 يطلق على كل منها المربع الكامل

(لأن كلها تربيع لأعداد صحيحة).

وبالمثل في الجبر :

س^2 ، $(\text{س} + \text{أ})^2$ ، $(\text{س} - 1)^2$ ، $(2\text{س} + 3)^2$ هي بعض الأمثلة على المربع الكامل.

لاحظ أن : $(\text{س} + \text{أ})^2 = (\text{س} + \text{أ})(\text{س} + \text{أ})$

$= \text{س}^2 + 2\text{أ}\,\text{س} + \text{أ}^2$

ولهذا $\text{س}^2 + 2\text{أ}\,\text{س} + \text{أ}^2$ هي على صورة مربع كامل (لم يتم تحليله)

في $\text{س}^2 + 2\text{أ}\,\text{س} + \text{أ}^2$ تلحظ أن:

معامل $\text{س}^2 = 1$

معامل $\text{س} = 2\text{أ}$

الحد الثابت $= \text{أ}^2$

لاحظ أن الحد الثابت هو مربع $\frac{1}{2}$ معامل س أي $\text{أ}^2 = \left[\frac{2\text{أ}}{2}\right]^2$

مثال3: اكمل كلا من المقادير الآتية بإضافة حد ثابت إلى كل منها بجعلها على صورة مربع كامل، عبر عن إجابتك على الصورة حيث $(\text{س} + \text{أ})^2$ حيث أ عدد .

(أ) $\text{س}^2 + 4\text{س}$ (ب) $\text{س}^2 - 4\text{س}$

(جـ) $\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س}$ (د) $\text{س}^2 - \frac{1}{4}\text{س}$

الحل:

(أ) $\text{س}^2 + 4\text{س} + \left[\frac{4}{2}\right]^2 = \left[\text{س} + \frac{4}{2}\right]^2 = (\text{س} + 2)^2$

(ب) $\text{س}^2 - 4\text{س} + \left[\frac{-4}{2}\right]^2 = \left[\text{س} - \frac{4}{2}\right]^2 = (\text{س} - 2)^2$

(جـ) $\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \left[\frac{\text{ب}}{2}\right]^2 = \left[\text{س} + \frac{\text{ب}}{2}\right]^2$

(د) $\text{س}^2 - \frac{1}{4}\text{س} + \left[\frac{-\frac{1}{4}}{2}\right]^2 = \left[\text{س} - \frac{\frac{1}{4}}{2}\right]^2 = \left(\text{س} - \frac{1}{8}\right)^2$

(أ) $\frac{1}{2}$ معامل $\text{س} = \frac{4}{2}$

(ب) $\frac{1}{2}$ معامل $\text{س} = \frac{-4}{2}$

(جـ) $\frac{1}{2}$ معامل $\text{س} = \frac{\text{ب}}{2}$

(د) $\frac{1}{2}$ معامل $\text{س} = \frac{-\frac{1}{4}}{2}$

عملية إضافة الحد الثابت إلى المقادير الجبرية لتحويلها إلى مربع كامل يطلق عليها "اكمال المربع".

تمرين 7 ب:

(1) أوجد مفكوك المربع الكامل في كل مما يأتي:

(أ) $(\text{أ} + 1)^2$ (ب) $(\text{س} - 1)^2$

(جـ) $(\text{س} - 3)^2$ (د) $(\text{ص} + 4)^2$

(هـ) $(\text{أ} + \text{ب})^2$ (و) $(\text{س} - \text{ص})^2$

(ز) $\left[\text{ص} - \frac{1}{2}\right]^2$ (ح) $\left[\text{س} + \frac{1}{3}\right]^2$

(2) انقل وأكمل ما يأتي لتجعل كلاً منها على صورة مربع كامل:

(أ) $\text{أ}^2 + 2\,\text{أ} + \left[\frac{\square}{2}\right]^2$

$= \left[\text{أ} + \frac{\square}{2}\right]^2$

$= \left[\text{أ} + \square\right]^2$

(ب) $\text{س}^2 - 2\,\text{س} + \left[\frac{\square}{2}\right]^2$

$= \left[\text{س} + \frac{\square}{2}\right]^2$

$= \left[\text{س} + \square\right]^2$

(جـ) $\text{جـ}^2 - \frac{2}{3}\,\text{جـ} + \left[\frac{\square}{2}\right]^2$

$= \left[\text{جـ} + \frac{\square}{2}\right]^2$

$= \left[\text{جـ} + \square\right]^2$

(د) $\text{ص}^2 + 8\,\text{ص} + \left[\frac{\square}{2}\right]^2$

$= \left[\text{ص} + \frac{\square}{2}\right]^2$

$= \left[\text{ص} + \square\right]^2$

(هـ) $\text{ص}^2 - \text{ص} + \left[\frac{\square}{2}\right]^2$

$= \left[\text{ص} + \frac{\square}{2}\right]^2$

$= \left[\text{ص} - \square\right]^2$

(3) اكمل كلا من المقادير الآتية لجعلها على صورة مربع كامل معطيا إجابتك على صورة $(\text{س} + \text{أ})^2$ حيث أ عدد:

(أ) $\text{س}^2 + 10\,\text{س}$ (ب) $\text{س}^2 - 8\,\text{س}$

(جـ) $\text{س}^2 - 9\,\text{س}$ (د) $\text{س}^2 + 7\,\text{س}$

(هـ) $\text{س}^2 + \frac{2}{3}\,\text{س}$ (و) $\text{س}^2 - \frac{4}{5}\,\text{س}$

(ز) $\text{س}^2 - \text{ب}\,\text{س}$ (ح) $\text{س}^2 + 2\,\text{ب}\,\text{س}$

3-7 حل المعادلات التربيعية باستخدام صيغة أو بإكمال المربع

Solving Quadratic Equations by the use of Formula or Completing the Sequae

يمكننا استخدام "اكمال المربع" كطريقة لحل المعادلة التربيعية على سبيل المثال يمكننا حل:

$\text{س}^2 - 4\,\text{س} - 3 = 0$ كالاتي:

ملوحظة Note

الخطوة (1): $\text{س}^2 - 4\,\text{س} - 3 = 0$

$\text{س}^2 - 4\,\text{س} = 3$

ضع الحد الثابت مع الطرف الأيسر

الخطوة (2): $\text{س}^2 - 4\,\text{س} + \left[-\frac{4}{2}\right]^2 = 3 + \left[-\frac{4}{2}\right]^2$

$= \left[\text{س} - \frac{4}{2}\right]^2 = 3 + (-2)^2$

$= (\text{س} - 2)^2 = 3 + 4 = 7$

اكمال المربع في الطرف الأيمن بإضافة مقدار ثابت مناسب للطرفين.

الخطوة (3): $\text{س} - 2 = \pm\sqrt{7}$

$\therefore \text{س} = 2 \pm \sqrt{7}$

$= 2 \pm 2.65$

$= 4.65$ أو -0.65 (لأقرب رقمين عشريين)

سوف نستخدم الآن طريقة "اكمال المربع" للتوصل إلى صيغة يشيع استخدامها في حل المعادلة التربيعية التي يكون حلها ليس تاما.

اعتبر الصورة العامة للمعادلة التربيعية $\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = 0$

الخطوة (1): $\text{س}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\,\text{س} + \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = 0$

الخطوة (2): $\text{س}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\,\text{س} = -\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

الخطوة (3): $\text{س}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\,\text{س} + \left[\frac{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}}{2}\right]^2 = -\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \left[\frac{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}}{2}\right]^2$

$\left[\text{س} + \frac{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}}{2}\right]^2 = -\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \left[\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right]^2$

$\left[\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right]^2 = -\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \frac{\text{ب}^2}{4\text{أ}^2}$

$\left[\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right]^2 = \frac{-4\text{أ}\text{جـ} + \text{ب}^2}{4\text{أ}^2}$

الخطوة (4): $\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}} = \pm\sqrt{\frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{جـ}}{4\text{أ}^2}}$

$\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}} = \pm\frac{\sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{جـ}}}{2\text{أ}}$

$\text{س} = \frac{-\text{ب}}{2\text{أ}} \pm \frac{\sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{جـ}}}{2\text{أ}}$

$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{جـ}}}{2\text{أ}}$

حل أي معادلة تربيعية $\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = 0$ هو:

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{جـ}}}{2\text{أ}}$$

مثال4: حل المعادلة الآتية: $س^2 - 2س - 15 = 0$

الحل:

بمقارنة $س^2 - 2س - 15 = 0$

مع $أس^2 + ب س + جـ = 0$

نجد أن :

$أ = 1$ ، $ب = -2$ ، $جـ = -15$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ}$$

نجد أن : $$س = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$$

$$س = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$س = \frac{2 + 8}{2} \quad \text{أو} \quad س = \frac{2 - 8}{2}$$

$\therefore$ $س = 5$ أو $س = -3$

مثال5:

حل المعادلة الآتية: $3س^2 + 6س - 1 = 0$

الحل:

بمقارنة $3س^2 + 6س - 1 = 0$

مع $أس^2 + ب س + جـ = 0$

نجد أن :

$أ = 3$ ، $ب = 6$ ، $جـ = -1$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ}$$

$$س = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(3)(-1)}}{2\times3}$$

$$س = \frac{-6 \pm 4\sqrt{48}}{6} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{3}}{6}$$

$\therefore$ $س = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}$ أو $س = \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3}$

مثال6:

حل المعادلة الآتية: $س^2 + 4س + 2 = 0$ مقربا لأقرب رقمين عشريين

الحل:

بمقارنة $س^2 + 4س + 2 = 0$

مع $أس^2 + ب س + جـ = 0$

نجد أن : أ = 1 ، ب = 4 ، جـ = 2

وبتطبيق القانون: $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ}$

نجد أن: $س = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\times1\times1}}{2\times1}$

$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2}$

$= \frac{-4 - 2.828}{2} = \frac{-6.828}{2} = -3.414$

$= \frac{-4 + 2.828}{2} = \frac{-1.172}{2} = -0.586$

س = - 3.414 أو - 0.59 (لأقرب رقمين عشريين)

ملحوظة Note

تعامل مع 3 قيم مكانية عشرية في الخطوات الوسطى أي : 1 مكان لأكثر من المطلوب.

مثال7:

حل المعادلة الآتية: $س^2 - 4س - 3 = 0$ مقربا الإجابة لأقرب رقمين عشريين

الحل:

بمقارنة $س^2 - 4س - 3 = 0$

مع $أس^2 + ب س + جـ = 0$

نجد أن : أ = 1 ، ب = -4 ، جـ = -3

وبتطبيق $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ}$

نجد أن: $س = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\times1\times(-3)}}{2\times1}$

$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{4 \pm 5.292}{2}$

$= \frac{4 + 5.292}{2}$ أو $\frac{4 - 5.292}{2}$

$س = \frac{9.292}{2}$ أو $\frac{-1.292}{2}$

س = 4.646 أو - 0.646

∴ س = 4.65 أو - 0.65 (لأقرب رقمين عشريين)

النتائج هي نفسها تماما التي حصلت عليها سابقا باستخدام طريقة إكمال المربع.

ملحوظة Note

$(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$

تعامل مع 3 قيم مكانية عشرية.

مثال 8:

حل المعادلة الآتية: 2س^2 + 3 س = 4 مقربا الإجابة لأقرب رقمين عشريين

الحل:

2س^2 + 3 س = 4

بمقارنة 2س^2 + 3 س - 4 = 0

مع أس^2 + ب س + جـ = 0

نجد أن : أ = 2 ، ب = 3 ، جـ = -4

وبتطبيق القانون س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ}$

س = $\frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4\times2\times(-4)}}{2\times2}$

= $\frac{-3 \pm \sqrt{9 + 32}}{4}$

= $\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$ = $\frac{-3 \pm 6.403}{4}$

س = $\frac{3.403}{4}$ أو $\frac{-6.403}{4}$

∴ س = 0.85 أو -2.35 (لأقرب رقمين عشريين)

ملاحظة:

1- حل كلما أمكن المعادلة التربيعية بالتحليل حيث تعتبر أبسط طريقة.

2- المعادلة التربيعية التي يمكن حلها بواسطة التحليل يكون لها حلول تامة (أو على صورة عدد نسبي)

7-4 المصطلحات المرتبطة بالمعادلة أس^2 + ب س + جـ = 0 ، أ ≠ 0

7-4-1 المقطع الصادي

نحصل على المقطع الصادي من تعويض عن س بالقيمة صفر فإذا كانت س = 0 فإن ص= 0 + 0 + جـ
ومن ذلك نجد أن المقطع الصادي للشكل ص= أس^2 + ب س + جـ يساوي الحد المطلق جـ .

مثال 9:

أوجد المقطع الصادي لكل مما يأتي:

(أ) ص= 2س^2 - 3 س- 1 (ب) ص= 4 - 3 س- س^2 (جـ) ص= 5س^2

الحل:

(أ) بوضع س= 0 في المعادلة ص= 2س^2 - 3 س- 1 نحصل على ص = -1 وهي قيمة المقطع الصادي.

(ب) نحصل على قيمة جـ من تعويض عن س بالقيمة صفر ∴ جـ= 4

(جـ) ∵ المعادلة تمر بنقطة الأصل ∴ جـ = 0

7-4-2 تعيين محور التماثل ورأس المنحنى لمنحنى المعادلة:

ص= أس^2 + ب س + جـ ، أ $\neq$ 0

يمكن إيجاد محور التماثل ورأس المنحنى لمنحنى الدالة، وذلك بإجراء عملية إكمال المربع لـ س.

$$ص = أ\,(س^2 + \frac{ب}{أ}\,س\,) + جـ$$

$$ص = أ\,(س^2 + \frac{ب}{أ}\,س + \frac{ب^2}{4أ^2}) + جـ - \frac{ب^2}{4أ}$$

$$ص = أ\,(س + \frac{ب}{2أ})^2 - \left(\frac{ب^2 - 4أجـ}{4أ}\right)$$

$$ص + \frac{ب^2 - 4أجـ}{4أ} = أ\,(س + \frac{ب}{2أ})^2$$

يمكن كتابة المعادلة على الصورة: (ص-ك) = أ (س-ر)^2 ، رأس المنحنى (ر ، ك)

حيث ر = $\frac{-ب}{2أ}$ ، ك = - $\frac{ب^2 - 4أجـ}{4أ}$

∴ رأس المنحنى الدالة ص= أس^2 + ب س + جـ ، أ $\neq$ 0 النقطة ($\frac{-ب}{2أ}$ ، $-\frac{(ب^2 - 4أجـ)}{4أ}$)

أما معادلة المحور هو المستقيم س = $\frac{-ب}{2أ}$ أو 2 أ س + ب = 0

تعريف: محور التماثل

هو مستقيم ينصف أي قطعة مستقيمة عمودية عليه وتقع نهايتها على المنحنى وتسمى نقطة الرجوع للمعادلة:
ص= أس^2 + ب س + جـ ، أ $\neq$ 0 حيث يتغير المنحنى عندها من التزايد إلى التناقص أو العكس.

مثال 10: أوجد نقطة الرجوع ومعادلة التماثل لمنحنى الدالة: ص= - س^2 + 2 س - 4

الحل:

أ = - 1 ، ب = 2 ، جـ = - 4 وذلك بالمقارنة بالمعادلة ص= أس^2 + ب س + جـ

قيمة س عند نقطة الرجوع = $\frac{-ب}{2أ}$ = $\frac{-2}{-2}$ = 1

قيمة ص عند نقطة الرجوع = - $\frac{ب^2}{4أ}$ + جـ = - 3

∴ نقطة الرجوع هي النقطة (1 ، -3)

، معادلة محور التماثل 2 أ س + ب = 0 ⇐ 2 (-1) + 2 = 0 ⇐ س - 1 = 0

مثال 11: أوجد نقطة الرجوع ومعادلة التماثل لمنحنى الدالة: ص= 4 - 5 س^2

الحل:

أ = -5 ، ب = 0 ، جـ = 4

قيمة س عند نقطة الرجوع = 0

، قيمة ص عند نقطة الرجوع = - $\frac{ب^2}{4أ}$ + جـ = 4

∴ نقطة الرجوع هي النقطة (0، 4)

، معادلة محور التماثل 2 أ س + ب = 0 ∴ س = 0 محور الصادات

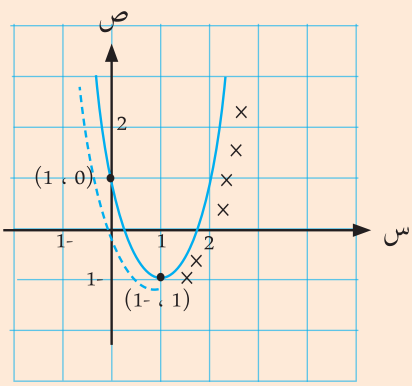
7-4-3 النهايتان العظمى والصغرى Great and Minor extremes

تكون فتحة منحنى الدالة ص= أس^2 ± ب س + جـ ، إلى أعلى إذا كانت أ> 0 في هذه الحالة تكون لمنحنى الدالة نهاية صغرى عند النقطة:($\frac{-\text{ب}}{2\text{أ}}$ ، - $\frac{\text{ب}^2 - 4\text{أجـ}}{4\text{أ}}$) مقعر لأعلى ويأخذ الشكل ( ).

إذا كانت أ< 0 في هذه الحالة تكون لمنحنى الدالة نهاية عظمى عند النقطة: ($\frac{-\text{ب}}{2\text{أ}}$ ، - $\frac{\text{ب}^2 - 4\text{أجـ}}{4\text{أ}}$)

مقعر لأسفل ويأخذ الشكل ( ).

مثال12: بين ما إذا كانت للدالة المعرفة بالمعادلة: ص= 2س^2 - 4 س + 1 نهاية صغرى أو عظمى ، ثم أوجد قيمتها إن وجدت



الحل:

حيث معامل س^2 موجب بمعنى 1 > 0

يكون لمنحنى الدالة نهاية صغرى عند النقطة

$\left(-\frac{(-4)}{2(2)} ، -\frac{(-4)^2 - 4(2)(1)}{4(2)}\right) = (1 ، -1)$

قيمتها -1 والمنحنى مقعر لأعلى (مفتوحا لأعلى).

ملحوظة Note

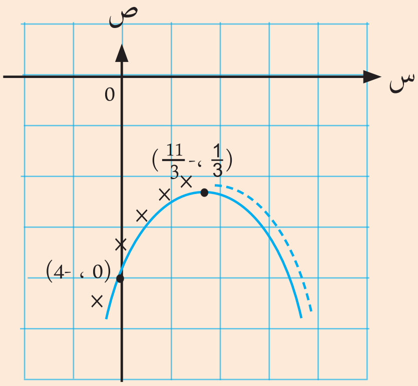
1 - إذا زادت قيمة ص كلما زادت قيمة س فإن الدالة تزادية.

2 - إذا زادت قيمة ص كلما نقصت قيمة س أو العكس فإن الدالة تناقصية.

مثال13: أوجد الفترة التي تكون عليها الدالة المعرفة بالمعادلة: ص= - 3 س^2 + 2 س - 4 تزايدية والفترة التي تكون فيها تناقصية ثم حدد ما إذا ما كانت للدالة نهاية عظمى أو صغرى مع رسم منحنى الدالة.

الحل:

∵ أ< 0 (أ سالبة) فإن المنحنى يفتح إلى أسفل ويكون رأس المنحنى.



$\left(\frac{(-2)}{2(-3)} ، \frac{-(2)^2 + 4(-3)(-4)}{4(-3)}\right) = \left(\frac{1}{3} ، \frac{-11}{3}\right)$

عليه تكون الدالة تزايدية عند الفترة $(-\infty ، \frac{1}{3})$،

وتكون تناقصية في الفترة $(\frac{1}{3} ، \infty)$.

وللدالة نهاية عظمى طالما أ< 0 قيمتها $\frac{-11}{3}$.

س	3	2	1	0	-1	-2	-3
ص	-25	-12	-5	-4	-9	-20	-37

تمرين 7 جـ:

(1) عين محور التماثل ورأس المنحنى لكل من الدوال الآتية:

(أ) ص= $س^2$ - 1

(ب) ص= - $2س^2$

(جـ) ص= 5 $(س + 3)^2$ - 4

(2) بين ما إذا كانت الدوال المعرفة بالمعادلات الآتية نهاية عظمى أو صغرى:

(أ) ص= $3س^2$ - 2

(ب) ص= - $2س^2$ - 2س+ 3

(جـ) ص= $3س^2$ - 4س

(3) أوجد في التمرين (2) كلا من:

(أ) رأس منحنى الدالة.

(ب) معادلة محور التماثل.

(جـ) الفترات التزايدية والفترات التناقصية

(د) ارسم الشكل العام لكل دالة.

5-7 تكوين المعادلة التربيعية إذا علم جذراها:

ملحوظة Note

لاحظ الرمز $\Leftrightarrow$ يشير إلى التكافؤ ويستخدم للتعبير عن تبادل صحة شيئين.

بفرض أن جذرا المعادلة هما 4 ، -2 $\Leftarrow$

س = 4 ، س = -2 هذا يكافئ

س- 4 = 0 ، س+ 2 = 0 $\Leftrightarrow$

(س- 4) (س+ 2) = 0 $\Leftrightarrow$ $س^2$ - 2س -8= 0

فإذا قلنا إن س = 2 أو س = -5 فإن هذا يعني (س- 2) (س+ 5) = 0

$\Leftrightarrow$ $س^2$ + 3س - 10 = 0

فالمعادلة $س^2$ - 2س -8= 0 جذراها هما 4 ، -2

المعادلة $س^2$ + 3س - 10 = 0 جذراها هما 2 ، -5

بصفة عامة إذا كانت م ، ل جذري المعادلة نضع س= م أو س= ل

س - م = 0 أو س - ل= 0

ونكتب (س - م) (س - ل) = 0 لنحصل على

$س^2$ - (م+ل) س + م ل= 0

$س^2$ - (مجموع الجدرين) × س + حاصل ضرب الجدرين-= 0

مثال14:

أوجد المعادلة التي جذراها -4 ، $\frac{5}{2}$

الحل:

مجموع الجذرين= -4 + $\frac{5}{2}$ = - $\frac{3}{2}$

حاصل ضرب الجذرين =-4 × $\frac{5}{2}$ = -10

المعادلة المطلوبة هي:

س ^{2} - (مجموع الجدرين) × س + حاصل ضرب الجدرين= 0

س ^{2} + $\frac{3}{2}$ س - 10 = 0

2 س ^{2} + 3 س - 20 = 0

تمرين 7 ؤ:

(1) حل المعادلات الآتية وحقق النتائج عن طريق مجموع الجذرين وحاصل ضربهما:

(أ) س ^{2} + 6 س + 9 = 0

(ب) 2 س ^{2} - 5 س + 3 = 0

(جـ) س ^{2} - 3س - 10 = 0

(2) إذا كان أحد الجذرين في المعادلة 5 س ^{2} + 20 س - جـ = 0 يساوي 1 فما قيمة جـ ، ثم أوجد الجذر الآخر.

7-6 نوع جذري المعادلة التربيعية :

عرفنا فيما سبق أن للمعادلة التربيعية ص= أس ^{2} ± ب س + جـ ، أ ≠ 0 جذرين هما:

$$س = \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ} \quad أو \quad س = \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ}$$

أنواع الجذور لهذه المعادلة يتحدد من خلال قيمة المقدار ب ^{2} - 4أجـ والذي نسميه المميز:

1- إذا كان ب ^{2} - 4أجـ > 0 (موجبا). ∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان.

2- إذا كان ب ^{2} - 4أجـ = 0 يكون س $_1$ =س $_2$ وهما جذرا المعادلة التربيعية.

∴ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان كل منهما يساوي - $\frac{ب}{2أ}$.

3- إذا كان ب ^{2} - 4أجـ < 0 (سالباً) يكون جذري المعادلة تخيليان.

مثال 15:

بين نوع جذري المعادلات الآتية:

(أ) $س^2 - 3 س + 2 = 0$

(ب) $4 س^2 - 12 س + 9 = 0$

(جـ) $س^2 - س + 1 = 0$

الحل:

(أ) أ = 1 ، ب = - 3 ، جـ = 2

$ب^2 - 4أجـ = (-3)^2 - 4 (1) (2) = 9 - 8 = 1$

$ب^2 - 4أجـ > 0$ الجذران حقيقيان مختلفان

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ}$$

$$س = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 (1)} \qquad \therefore س = \frac{3 \pm 1}{2}$$

س = 2 أو س = 1

(ب) أ = 4 ، ب = - 12 ، جـ = 9

$ب^2 - 4أجـ = (-12)^2 - 4 (4) (9) = 144 - 144 = 0$

∴ الجذران حقيقيان متساويان

$$\therefore س = \frac{-ب}{2أ} = \frac{3}{2}$$

$$س_1 = س_2 = \frac{3}{2}$$

(جـ) أ = 1 ، ب = - 1 ، جـ = 1

$ب^2 - 4أجـ = (-1)^2 - 4 (1) (1)$

المميز = - 3

∴ $ب^2 - 4أجـ < 0$ (سالب)

∴ الجذران تخيليان (غير حقيقيين)

ويمكن تلخيص الحالات السابقة كما يلي:

المعادلة	المميز $ب^2 - 4أجـ$	نوعه	نوع الجذرين
$س^2 - 3 س + 2 = 0$	1	عدد حقيقي	حقيقيان قياسيان (مختلفان)
$4 س^2 - 12 س + 9 = 0$	0	مربع كامل	حقيقيان متساويان
$س^2 - س + 1 = 0$	3-	سالب	تخيليان (غير حقيقيين)

تمرين 7 هـ:

(1) حل المعادلات الآتية مقربا إجابتك لأقرب رقمين عشريين:

(أ) س^2 + 7 س + 3 = 0

(ب) س^2 - 5 س + 2 = 0

(جـ) س^2 + 6 س - 1 = 0

(د) س^2 - 3 س - 5 = 0

(2) حل المعادلات الآتية:

(أ) س^2 + 5 س - 6 = 0

(ب) س^2 - 5 س - 6 = 0

(جـ) 2 س^2 + 3 س - 2 = 0

(د) 3س^2 + 4 س - 4 = 0

(3) حل المعادلات الآتية مقربا إجابتك لأقرب رقمين عشريين:

(أ) 2 س^2 - 4 س - 5 = 0

(ب) 2 س^2 + 4 س - 1 = 0

(جـ) 3 س^2 + 6 س - 2 = 0

(3) حل المعادلات الآتية في كل حالة ثم احسب قيمة المميز وقارن بينه وبين جذري المعادلة

(أ) س^2 - 2 س - 15 = 0

(ب) س^2 - 4 س + 4 = 0

(جـ) س^2 - 4 س + 6 = 0

(د) س^2 + 9 = 0

(هـ) س^2 - 9 = 0

7-7 حل المشكلات باستخدام المعادلات التربيعية :

يمكن حل العديد من المشكلات العملية باستخدام المعادلات التربيعية، يجب أولا ترجمة تلك المشكلات إلى معادلات رياضية، ومن ثم حل كل معادلة جبرياً ويُترجم الحل مرة أخرى إلى كلمات.

وبما أن المعادلات التربيعية قد يكون لها حلان، وقد يكون أحد الحلين غير مقبول كأن يكون سالباً أو كسراً أو أعداد صغيرة جدا أو كبيرة جدا بحيث لا تكون حلا حقيقيا لبعض المشكلات.

وقد يكون المدخل الموضح أدناه مفيداً لحل تلك المشكلات.

(أ) ما هو المجهول ؟ اجعل س (أو أي حرف آخر مطلوب في السؤال) هي الكمية.

(ب) ما هي المعلومات المعطاة لك ،

ارسم شكلا إذا كان ذلك ضروريا. اكتب معادلة في س (أو أي حرف آخر) من المعلومات التي لديك.

(جـ) حل المعادلة في س (أو أي حرف آخر).

(د) تأكد أن الحل معقول (المسافة على سبيل المثال لا يمكن أن تكون سالبة القيمة).

(هـ) اكتب الإجابة أو الإجابات بالكلمات مع ذكر الوحدات أينما لزم.

مثال16:

مربع طول ضلعه (س+ 3) سم له نفس مساحة مستطيل طوله (2س+ 3) سم وعرضه (3س- 5) ، كون المعادلة في س والتي تبسط إلى 5 س^2 - 7 س - 24 = 0 ، حل هذه المعادلة وعندها أوجد مساحة المربع.

الحل:

مساحة مستطيل = مساحة المربع

∴ (2س+ 3) (3س- 5) = (س+ 3) (س+ 3)

6 س^2 - س - 15 = س^2 + 6 س + 9

5 س^2 - 7 س - 24 = 0

∴ (س - 3) (5 س + 8) = 0

س - 3 = 0 أو 5 س + 8 = 0

س = 3 أو 5 س = - 8 ⇦ س = - $\frac{8}{5}$

عندما س = - $\frac{8}{5}$ عرض المستطيل

= 3س- 5 = 3 (- $\frac{8}{5}$) - 5 = - 4 $\frac{4}{5}$ - 5 = - 9 $\frac{4}{5}$

س = - $\frac{8}{5}$ هي إجابة مرفوضة لأن العرض لا يكون سالباً.

ولهذا فإن الحل هو س =3

مساحة المربع = 6 × 6 = 36 سم^2

ملحوظة Note

تأكد دائما ما إذا كانت الحلول جميعها مقبولة ، طول الضلع (3 + 3 = 6 سم)

للتحقق من الإجابة : مساحة المستطيل = (2س+ 3) (3س- 5) = (6 + 3) (9 - 5) = 9 × 4 = 36 سم^2 = مساحة المربع.

مثال 17:

قرر أعضاء جمعية زراعة الحدائق إنفاق 36 دينارا لشراء الأدوات الزراعية. ثمن الشوكة والجاروف معا يساوي 7 دنانير، وإذا انفقوا كل المال على شراء الشوك يمكنهم شراء 3 أدوات زيادة عما كانوا يستطيعون شراءه لو أنفقوا ما معهم من مال في شراء الجراف فقط، فإذا كانت تكلفة الشوكة (ف) دينار، اكتب المقادير بدلالة (ف) لمايلي :

(أ) تكلفة الجاروف.

(ب) عدد الجراف التي يستطيعون شراءها بمبلغ 36 ديناراً.

(جـ) عدد الشوك التي يستطيعون شراءها بمبلغ 36 دينارا.

اكتب المعادلة التي تحقق (ف) ثم وضح أنها تختصر إلى:

ف^2 + 17 ف - 84 = 0

حل المعادلة السابقة ثم حدد تكلفة الشوكة.

الحل:

(أ) تكلفة الجاروف= 7 دنانير - تكلفة الشوكة

= (7 - ف).

(ب) عدد الجراف= $\frac{36}{(7 - \text{ف})}$

(جـ) عدد الشوك= $\frac{36}{\text{ف}}$

Note ملحوظة

عدد الجراف - عدد الشوك = 3

م.م. أ = ف (7 - ف)

$\therefore$ $\frac{36}{(7 - \text{ف})} - \frac{36}{\text{ف}} = 3$

$\frac{\text{36 ف - 36 (7 - ف)}}{\text{ف(7 - ف)}} = 3$

اضرب الحدود بالتبادل

36 ف - 252 + 36 ف = 3 ف (7 - ف)

72 ف - 252 = 21 ف - 3 ف^2

3 ف^2 + 51 ف - 252 = 0

3 (ف^2 + 17 ف - 84) = 0

اقسم الطرفين على 3

ف^2 + 17 ف - 84 = 0

(ف - 4) (ف + 21) = 0

ف = 4 أو - 21

ف= - 21 مرفوضة لأن ف أكبر من صفر

$\therefore$ تكلفة الشوكة 4 دنانير

مثال18:

د ط ر ز مستطيل طوله (2 س - 1) سم ، وعرضه (س + 2) سم، فإذا قطع منه مربع طول ضلعه 6 سم من الركن د ، وضح أن المساحة المظللة تعطى بالعلاقة (2 س^2 + 3 س - 38) سم^2. وإذا كانت مساحة المنطقة المظللة = 100 سم^2 ، كون معادلة في س. وبين أنها تعطي بالمعادلة 2 س^2 + 3 س - 138 = 0 ، حل في س مقربا لأقرب رقمين عشريين.

الحل:

مساحة المنطقة المظللة = مساحة المستطيل - مساحة المربع

= (2 س - 1) (س + 2) - 6 × 6 = 2 س^2 + 3 س - 2 - 36 = (2 س^2 + 3 س - 38) سم^2.

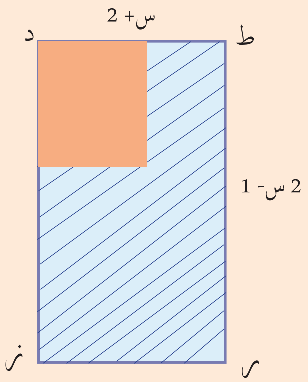
بمعلومية: مساحة المنطقة المظللة = 100 سم^2.

2 س^2 + 3 س - 38 = 100

2 س^2 + 3 س - 138 = 0

قارن بالقانون : أ س^2 + ب س + جـ = 0

نجد أن أ = 2 ، ب = 3 ، جـ = - 138



بتطبيق القانون س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ}$

نجد أن س = $\frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-138)}}{2 \times 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1104}}{4}$

س = 7.59 أو - 9.09 (لأقرب رقمين عشريين)

إذا كانت س = - 9.09 يكون عرض المستطيل = س + 2 = - 9.09 + 2 = - 7.09

ولما كان العرض لا يمكن أن يكون سالبا س = - 9.09 مرفوض ∴ س = 7.59 هو الحل الوحيد.

مثال19:

خزان اسطواني مفتوح من احد طرفيه ومساحته السطحية 100 π سم^2، فإذا كان ارتفاعه 10 سم ، أوجد طول نصف قطره الخارجي مقربا لأقرب رقمين عشريين.

الحل:

اعتبر طول نصف القطر **نو** سم، الارتفاع ع سم المساحة السطحية = 100 π

2 π **نو** ع + π **نو**^{2} = 100 π

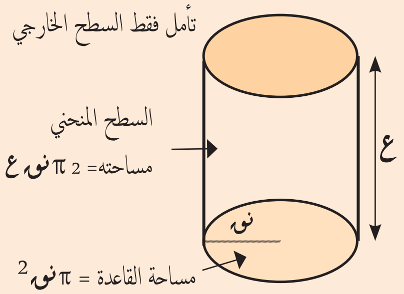
∴ 2 **نو** ع + **نو**^{2} = 100

2 **نو** × 10 + **نو**^{2} = 100

نو^2 + 20 **نو** - 100 = 0

بالمقارنة مع القانون: أ **نو**^{2} + ب **نو** + جـ = 0

نجد أن: أ = 1 ، ب = 20 ، جـ = - 100



بتطبيق القانون **نو** = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ}$

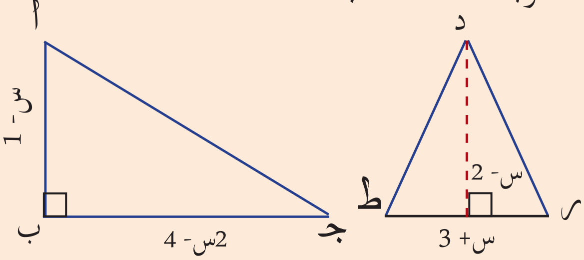
نجد أن: **نو** = $\frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times 1 \times (-100)}}{2 \times 1} = \frac{-20 \pm \sqrt{800}}{2}$

∴ **نو** = 4.14 أو - 24.14 (لأقرب رقمين عشريين).

ولما كان طول نصف القطر يجب أن يكون موجبا. ∴ **نو** = - 24.14 مرفوض ∴ **نو** = 4.14 سم

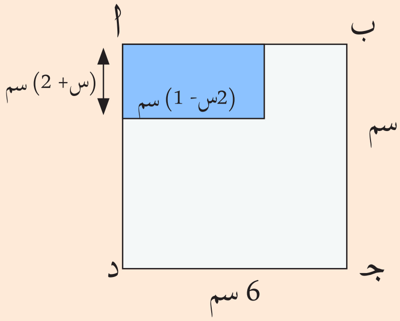
تمرين 7 و:

(1) إذا كانت مساحة Δ أ ب جـ، مساحة Δ د ط ر متساويتان كون معادلة في س ووضح أنه يمكن اختزالها إلى س^2 - 7 س + 10 = 0. حل هذه المعادلة ومن ثم أوجد مساحة Δ أ ب جـ.



(2) دفعت إحدى الشركات مبلغ 1200 دينار في شراء س نباتات متشابهة، أكتب بدلالة س التعبير الذي يدل على سعر النبات الواحد. نظرا للعدد الكبير من النباتات المشتراة، مُنح تخفيض قدره (20) ديناراً ، لكل نبات وقد قررت الشركة شراء 2 نبات زيادة بنفس المبلغ المحدد مسبقاً، كون معادلة في س ووضح أنه يمكن اختزالها إلى س^2 + 2 س - 120 = 0 ، حل هذه المعادلة ثم حدد عدد النباتات التي اشترتها الشركة قبل التخفيض.

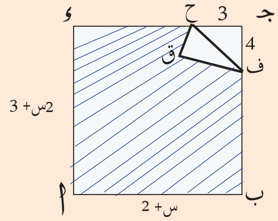
(3) أ ب جـ د مربع طول ضلعه 6 سم، فإذا اقتطع من الركن أ مستطيلا طوله (2س - 1) سم وعرضه (س + 2) سم وضح أن المساحة المظللة هي (38 - 3 س - 2س^2) سم^2.



إذا كانت مساحة المنطقة المظللة 10 سم^2 كون معادلة في س ووضح أنه يمكن اختزالها إلى 2 س^2 + 3 س - 28 = 0
حل هذه المعادلة معطيا إجابتك لأقرب رقمين عشريين.

(4) المساحة السطحية لمسقط اسطواني هي 100 π سم^2،فإذا كان ارتفاعه 10 سم أوجد طول نصف قطره مقربا لأقرب رقمين عشريين

(5) يوضح الشكل المرسوم قطعة مستطيلة من الورق أ ب جـ د ثنيت بطول الخط ح ف بحيث تحركت النقطة جـ إلى ق .



إذا كان ح جـ = 3 سم، ف جـ = 4 سم. أ ب = س + 2 سم ، أ د = (2س + 3) سم ،

(أ) احسب مساحة ح جـ ف.

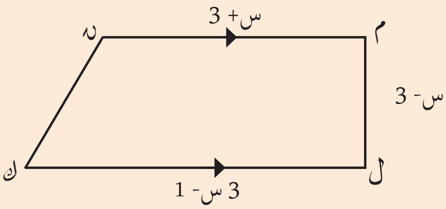
(ب) عبر عن مساحة المنطقة المظللة أ ب ف ق جـ د.

وإذا كانت مساحة المنطقة المظللة 34 سم^2، كون معادلة في س ووضح انه يمكن اختزالها إلى: 2س^2 + 7س - 40 = 0 ، وبحل هذه المعادلة أوجد طول الضلع أ ب مقربا إجابتك لاقرب رقمين عشريين.

(6) ك ل م ن شبه منحرف فيه ك ل // م ن ، $\measuredangle$ ك ل م = 90^0

(أ) إذا كان ك ل = (3س - 1) سم، م ن=(س + 3) سم ، ل م = (س - 3) سم ، أوجد بدلالة س مقدارا لمساحة شبه المنحرف.

(ب) إذا كانت مساحة شبه المنحرف= 15 سم^2 ، كون معادلة في س ووضح أنها تختزل إلى: 2س^2 - 5س - 18 = 0

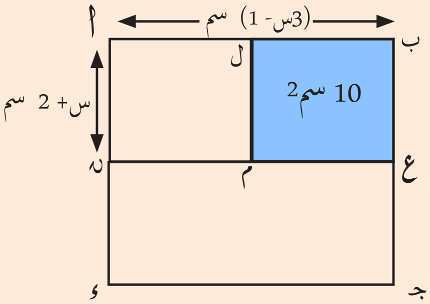


7- في الشكل المرسوم أ ب جـ د ، أ ل م ن مربعان ،
الضلع أ ب = (3س - 1) سم، الضلع أ ن = (س + 2) سم،
مساحة المستطيل ل ب ع م = 10 سم^2.

(أ) أكتب طول ل ب بدلالة س .

(ب) كون معادلة في س وبين انها تختزل إلى: 2س^2 +س - 16 = 0

(جـ) حل هذه المعادلة في س ثم احسب محيط الشكل ل ب ع م مقربا إجابتك لأقرب ملليمتر.



الملخص:

1- يمكن حل المعادلة التربيعية بواسطة:

(أ) التحليل (إذا كان الحلان تامين أوعددين نسبيين).

(ب) بإكمال المربع (يستخدم فقط عندما يكون متضمناً مربعاً كاملاً).

(جـ) استخدم الصيغة الرياضية (عادة عندما يكون الحل غير تام أو أعداد نسبية) .

2- لحل المعادلة التربيعية عن طريق التحليل يجب ان يكون الطرف الايسر دائما = صفر.

3- حل أي معادلة أس^2 + ب س + جـ = 0 يعطي بالقانون س = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أجـ}}}{2\text{أ}}$

4- إذا كان ب^2 - 4أجـ > 0 فإن الجذران حقيقيان مختلفان.

5- إذا كان ب^2 - 4أجـ = 0 فإن الجذران حقيقيان متساويان.

6- إذا كان ب^2 - 4أجـ < 0 فإن الجذران تخيليان.

ورقة المراجعة 8:

القسم أ: لا تستخدم الآلة الحاسبة

(1) حل المعادلات الآتية:

(أ) س^2 = 9 (ب) س^2 = 9 س

(2) حل المعادلات الأتية:

(أ) ص^2 - 4 ص + 4 = 0 (ب) ص^2 - 4 ص - 5 = 0

(3) حل المعادلات الآتية:

(أ) 6أ^2 - أ - 12 = 0

(ب) (ب + 2)^2 = 4

(4) حل المعادلة الأتية: 2ر - 1 = $\frac{6}{\text{ر}}$

القسم ب:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة في تقييم الإجابات غير التامة

(5) حل المعادلات الأتية:

(أ) $\frac{3\text{م}}{(\text{م}-2)^2}$ = 2 (ب) $\frac{1}{\text{ن}-1}$ + $\frac{3}{\text{ن}+1}$ = 2

(6) حل المعادلة الأتية: 4 س^2 - 3 س - 2 = 0 ، مقربا لأقرب رقمين عشريين

(7) أوجد جذري المعادلة: ص^2 = 3 ص + 5 ، مقربا لأقرب رقمين عشريين.

(8) من المعادلة: $\frac{1}{\text{س}-2}$ $\frac{1}{\text{س}-1}$ $\frac{1}{\text{س}}$

هل يمكن استنتاج أن: س^2 - 4 س+ 2 = 0

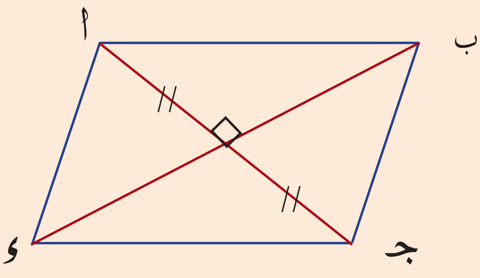
ومن ثم حل المعادلة في س مقربا لأقرب رقمين عشريين.

(9) في الشكل المرسوم أب جـ ء معين طولا قطريه:

أجـ = (4س -س) سم ،ب ء = (2س + 3) سم

اكتب بدلالة س التعبير الذي يدل على:

(أ) أ م نقطة تنصف أجـ.



(ب) مساحة Δ أ ب ء

إذا كانت مساحة المعين تساوي 20 سم^2، كون معادلة في س وبين أنها تختزل إلى 2 س^2 + س - 13 = 0، حل المعادلة ومن ثم أوجد طول أجـ مقربا لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

8

الباب الثامن

التماثل وخواص الزوايا في الدوائر

Symmetry and Angle Properties of Circles

8 التماثل وخواص الزوايا في الدوائر

Symmetry and Angle Properties of Circles

حازت دائما الدوائر والأقواس بإعجاب الإنسان من الناحية الجمالية فألهمت على سبيل المثال الاشكال الهندسية للقمر الكثيرَ من الشعراء والفنانين والموسيقيين، كما يمكن تَبَيُن اعجاب الثقافة العربية بها من التصميمات المعمارية منها على سبيل المثالِ الاطراف المنحنية الموجودة في أسقف المباني وقِبَب المساجد وأقواس عديدة من المباني الاخرى القديم منها والحديث.

إن استخدام لوحة جيومتر سيعزز دراسة التماثل وخواص الزاويا في الدوائر.

يشعر العرب بأن الأقواس الدائرية تخلق شعوراً بوجود مساحة شاسعة.

وفي نهاية هذ الفصل سوف تكون قادراً على:

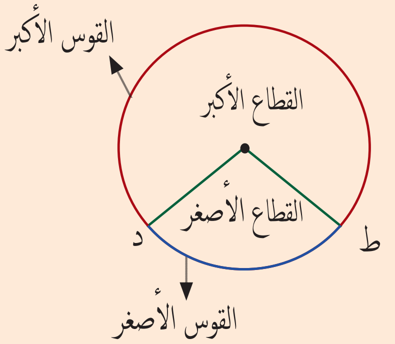
- تعين الاوتار والقطع الدائرية والاقواس والقطاعات الدائرية.
- تطبق خواص التماثل في الدوائر لحل المشكلات.
- تطبق خواص المماسات للدائرة لحل المشكلات.
- تحل المشكلات باستخدام الخواص التالية للدائرة.
- قياس الزاوية المركزية ضف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس.
- الزوايا المرسومة في نصف دائرة هي زاويا قائمة
  - الزوايا المرسومة في نفس القطعة الدائرية متساوية في القياس (الزاويا المحيطية المشتركة في القوس متساوية)
  - الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي الدائري متكاملتان
  - قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري تساوي قياس الزاوية المقابلة المجاورة لها.
  - الزوايا المشتركة في قطعة دائرية واحدة متساوية في القياس (اختياري)

1-8 الأوتار والقطع الدائرية والأقواس والقطاعات الدائرية : Chords, Segment, Arcs and Sectors

الوتر هو قطعة مستقيمة تصل بين أي نقطتين على محيط الدائرة ولا تمر بالمركز. المنطقة المحصورة بواسطة الوتر (أ ب على سبيل المثال) والمحيط تسمى قطعة دائرية. المنطقة الأكبر تسمى القطعة الدائرية الكبرى (ملونة) والمنطقة الأصغر تسمى القطعة الدائرية الصغرى (مظللة).

أي جزء من محيط الدائرة يسمى قوساً. وإذا قسم محيط الدائرة إلى جزئين غير متساويين فإن الجزء الأكبر يسمى القوس الأكبر بينما الجزء الأصغر يسمى القوس الأصغر.

المنطقة المحصورة بين نصفي قطرين وقوس من الدائرة تسمى القطاع الدائري . المنطقة الكبرى تسمى القطاع الأكبر أما المنطقة الصغرى فتسمى القطاع الأصغر.



2-8 خواص الأوتار: Properties of Chords

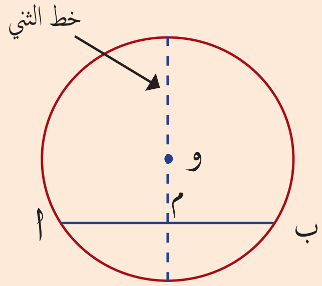
أنشطة:

1- (أ) ارسم دائرة مركزها و، طول نصف قطرها 5 سم.

(ب) ارسم أي وتر وليكن ص.

(جـ) اقطع الدائرة ثم اثنيها بحيث تنطبق النقطة أ على النقطة ب.

(د) أعد خط الثني إلى وضعه الطبيعي سوف تلاحظ أن خط الثني يمر بنقطة المركز (و).



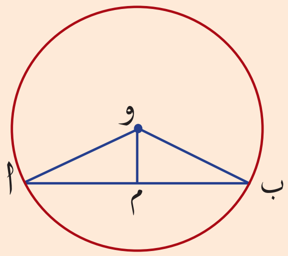
سوف تلاحظ أيضا أن "خط الثني" يقطع الوتر أ ب عموديا في نقطة ولتكن م .
تحقق من ذلك بقياس ∡ وم أ، ∡ وم ب ،
ثم قس بعد ذلك طول أم، بم. هل يتساويان؟
هل توافق على ان م هي منتصف الوتر أب ؟
هل توافق على أن الخط وم هي ينصف أب ؟
سوف نجد أن "خط الثني" هو خط تماثل الشكل.

التعميم بالاستنباط:
في الانشطة 1 ، 2 ، 3 نستخدم مهارة التفكير هذه لعمل استنتاجات.

بما أن الخط وم عموديا على وينصف الوتر أب سوف نسميه العمود المنصف للوتر أب ويمكن تعميم نتائج النشاط (1) كما يلي:

1- الخط المستقيم المار بمركز الدائرة عموديا على أي وتر وينصف هذا الوتر.
2- القطعة المستقيمة الواصلة من مركز الدائرة إلى منتصف الوتر تكون العمود المنصف للوتر.
3- العمود المنصف للوتر يمر بمركز الدائرة.

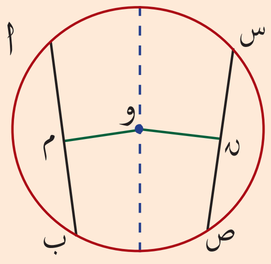
2- (أ) ارسم دائرة مركزها و ونصف قطرها طوله 3 سم.
(ب) ارسم الوتر أب.
(جـ) حدد نقطة منتصف الوتر أ ولتكن م.
(د) صل النقطة (و) بالنقطة أ ، م ، ب.
(هـ) لماذا وأ = وب ؟ هل مأ = م ب.
بناء عليه هل ينطبق Δ وأم على Δ وبم؟ ما نوع المثلث وأب ؟
(و) هل قياس $\measuredangle$ وأم = قياس $\measuredangle$ وبم ؟
هل قياس $\measuredangle$ أوم = قياس $\measuredangle$ بوم ؟
هل قياس $\measuredangle$ أم و= قياس $\measuredangle$ بم و = 90^0؟



يمكن تعميم نتائج النشاط الثاني كما يلي:

في الدائرة التي مركزها و ووترها أ ب.
1- Δ وأب مثلث متساوي الساقين.
2- Δ وأم $\equiv$ Δ وبم حيث وم هو العمود المنصف للوتر أ ب.

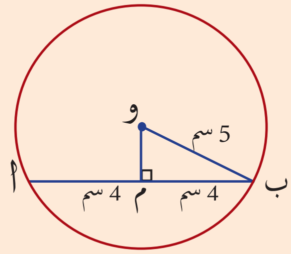
3- (أ) ارسم دائرة مركزها و ونصف قطرها طوله 4 سم.
(ب) ارسم الوترين المتساويين في الدائرة أب، س ص (وتران متساويان في الطول).
(جـ) صل النقطة و بالنقطة م . منتصف الوتر أب ، ثم صل النقطة و بالنقطة ن ، منتصف الوتر س ص .
(د) اقطع الدائرة بطول الخط المنقط ثم قم بثنيها بحيث يقع أب على س ص تماماً.
(هـ) هل الخط وم يقع تماماً على الخط ون ؟
(و) هل توافق على أن وم =ون ؟



يمكن تعميم نتائج النشاط الثالث كما يلي:
الأوتار المتساوية في الدائرة تبعد بأبعاد متساوية عن مركزها.
والعكس صحيح
الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز الدائرة تكون متساوية في الطول.

بامكانك استخدام لوحة جيومتر لأداء الأنشطة 2 ، 3 .

مثال 1: دائرة طول نصف قطرها 5 سم لها وتر طوله 8 سم، أوجد المسافة العمودية من المركز إلى الوتر.



الحل :

في الشكل المرسوم، و مركز الدائرة، م نقطة تنصيف الوتر أ ب .

∴ أ م = م ب = 4 سم.

في Δ و ب م :

(و م)^2 + (4)^2 = (5)^2 (نظرية فيثاغورث)

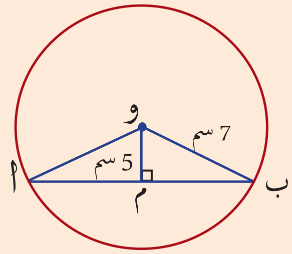
(و م)^2 + 16 = 25

(و م)^2 = 25 - 16 = 9

∴ و م = $\sqrt{9}$ = 3 سم (ارفض الجذر التربيعي السالب لأن الطول لا يكون سالبا)

∴ طول العمود و م الساقط من مركز الدائرة إلى منتصف الوتر = 3 سم.

مثال 2: إذا كانت و مركز الدائرة أوجد طول الوتر أ ب (مقربا لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).



الحل :

في Δ و ب م :

5^2 + (م ب)^2 = 7^2 (نظرية فيثاغورث)

25 + (م ب)^2 = 49

(م ب)^2 = 49 - 25 = 24

∴ م ب = $\sqrt{24}$ = 4.899 سم

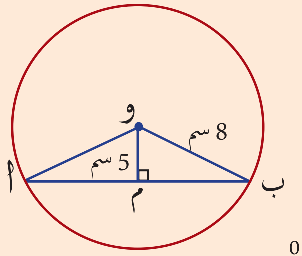
∴ طول الوتر أ ب = 4.899 × 2 = 9.80 سم (مقربا لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

> قرب لأقرب أربعة أرقام معنوية في الخطوات الوسطى أما الإجابة النهائية فقربها لاقرب ثلاثة أرقام معنوية.
>
> (أ) قرب لأقرب رقمين عشريين بالنسبة للزوايا ولأربعة أرقام معنوية في الخطوات الوسطى، بالنسبة للاطوال (أعط إجابتك النهائية بالنسبة للزوايا لاقرب رقم عشري واحد ولثلاثة أرقام معنوية بالنسبة للطول.
>
> (ب) طول القوس = $\frac{\theta}{360^0}$ × 2 π نق

مثال 3: في الشكل المرسوم دائرة مركزها و أوجد:

(أ) قياس الزاوية أ و ب.

(ب) طول القوس الأصغر (π = 3.142)



الحل :

(أ) جتا ∠ ب و م = $\frac{5}{8}$.

∴ قياس ∠ أ و ب = 51.32^0

∴ قياس ∠ أ و ب = 2 × 51.32^0 = 102.6^0

(ب) طول القوس أ ب

= $\frac{102.6^0}{360^0}$ × 2 π نق

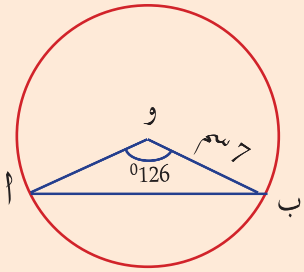
= $\frac{102.6^0}{360^0}$ × 2 × 3.142 × 8

= 14.3 سم (مقربا لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

مثال 4: في الشكل المرسوم، الوتر أ ب يقابل زاوية قياسها 126^0 عند المركز أوجد،

(أ) طول الوتر أ ب.

(ب) مساحة القطاع الأصغر أ و ب. ($\pi = \frac{22}{7}$)



الحل :

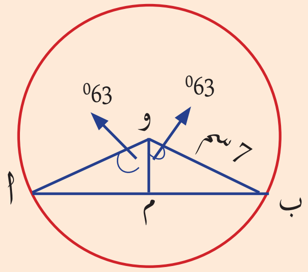
(أ) ليكن وم هو العمود المنصف الوتر أ ب .

قياس ∠ م و ب = $\frac{1}{2}(126^0) = 63^0$

جا $63^0 = \frac{م ب}{7}$

∴ م ب = 7 جا 63^0 = 6.237 سم.

طول الوتر = 2 × 6.237 = 12.5 سم (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)



(ب) مساحة القطاع الأصغر أ و ب = $\frac{126^0}{360^0} \times \pi$ نق^2

$= \frac{102.6^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

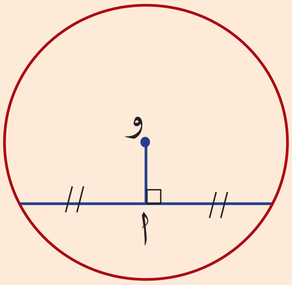
= 53.9 سم^2 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

مساحة القطاع = $\frac{\theta}{360^0} \times \pi$ نق^2

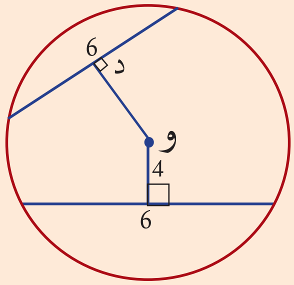
تمرين 8 أ:

(1) في كل من الأشكال الآتية، و مركز الدائرة أوجد الأطوال و الزوايا المجهولة والمشار إليها في كل حالة (جميع الأطوال بالسنتيمتر).

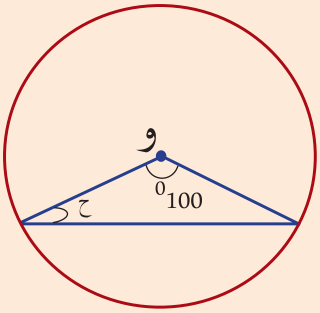
(أ)



(ب)



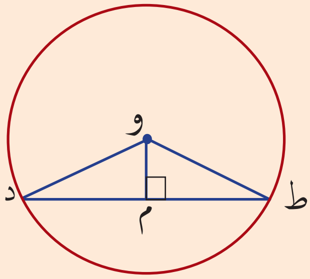
(جـ)



(2) إذا كانت و مركز الدائرة، أوجد طول الوتر د ط في حالة:

(أ) طول نصف القطر = 5 سم ، وم = 4 سم.

(ب) طول نصف القطر = 7 سم ، وم = 2.1 سم.

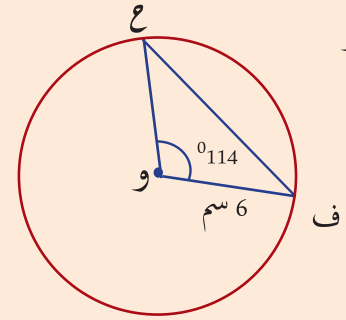


(3) في الشكل المرسوم، ع ف يقابل الزاوية 114^0 في الدائرة التي مركزها و أوجد.

(أ) طول القوس الأصغر ع ف .

(ب) طول الوتر ع ف.

(جـ) مساحة القطاع الأصغر ع و ف. ($\pi = 3.142$)

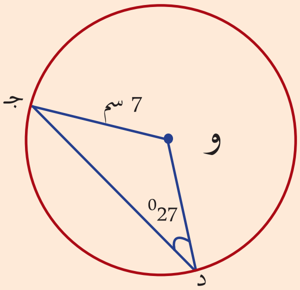


(4) إذا كانت و مركز الدائرة، أوجد:

(أ) قياس جـ و د .

(ب) قياس الزاوية المنعكسة جـ و د .

(جـ) طول القوس الاكبر جـ د. ($\pi = \frac{22}{7}$)



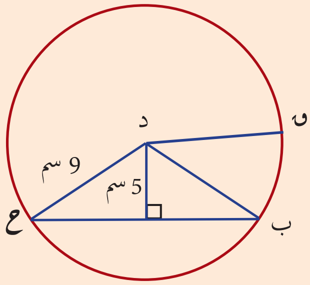
(5) ن، ف، ع ثلاث نقط على محيط الدائرة التي مركزها د،

طول نع = 9 سم أوجد:

(أ) طول ع ف إذا كان الوتر ع ف يبعد عن المركز 5 سم.

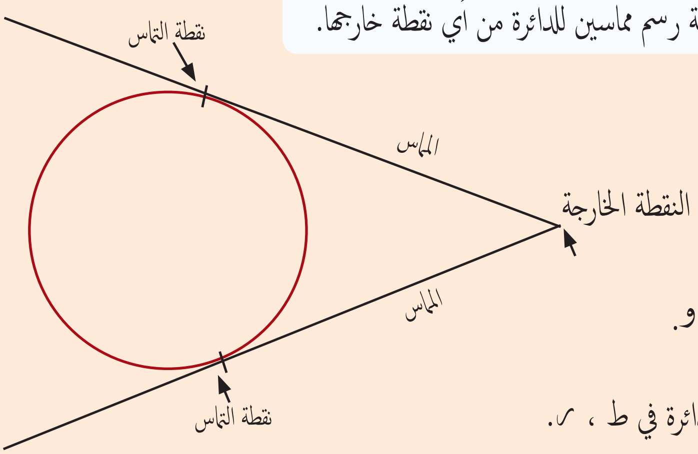
(ب) طول القوس الأصغر ف ن= 6.28 سم، أوجد قياس زاوية ن د ف

علما $\pi = 3.14$.



3-8 المماسات وخواصها: Tangents and thier Properties

مماس الدائرة هو الخط المستقيم المرسوم من نقطة معلومة خارج الدائرة، بحيث يمس الدائرة في نقطة واحدة فقط،تسمى نقطة التماس ، لاحظ إمكانية رسم مماسين للدائرة من أي نقطة خارجها.



نشاط:

الخطوات:

1- (أ) ارسم دائرة طول نصف قطرها 3 سم ومركزها و.

(ب) حدد نقطة د خارج الدائرة.

(جـ) ارسم مماسين للدائرة من النقطة د بحيث يمسا الدائرة في ط ، م.

(د) صل و د، و ط، و م،

(هـ) قس كلا مما يأتي:

(ii) ط د، د م (i) ∠و ط د ، ∠و م د

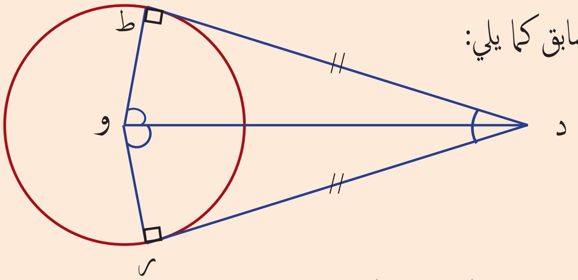
(iii) ∠و د ط ، ∠ و د م (iv) ∠ د و ط ، ∠ و م د

(و) ماذا تلاحظ من نتائج الجزء (هـ)؟

(ز) صل ط م ، ما نوع المثلث د ط م ؟

2- كرر الخطوة الأولى مستخدما دوائر أخرى ذات أنصاف أقطار مختلفة الطول.

تعميم: يمكن تعميم نتائج النشاط السابق كما يلي:



1- مماس الدائرة عمودي على نصف القطر عند نقطة التماس .

أي أن قياس ∠و ط د = قياس ∠ و م د = 90^0.

2- المماسان المرسومان لأي دائرة من نقطة خارجها متساويان في الطول

أي أن د ط = د م.

3- الخط الواصل من نقطة تقاطع المماسين إلى مركز الدائرة ينصف:

(أ) الزاوية بين المماسين

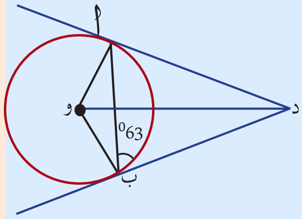
أى أن قياس ∠و د ط = قياس ∠ و د م .

(ب) الزاوية بين نصفي القطر

أى أن قياس ∠ د و ط = قياس ∠ د و م .

مثال 5:

في الشكل المرسوم و مركز الدائرة. أ د ، ب د، مماسان للدائرة إذا كان قياس ∠ أ ب د= 63^0
احسب قياس الزاوية أ و د .



الحل :

قياس ∠ و ب د = 90^0 (نصف قطر ⊥ خط التماس)

قياس ∠ أ ب و = $90^0 - 63^0 = 27^0$

قياس ∠ أ و د = $180^0 - 27^0 - 27^0$ (لأن المثلث أ و ب متساوي الساقين)

$= 126^0$

∴ قياس ∠ أ و د = $\frac{1}{2}\ 126^0$ (لأن و د ينصف الزاوية أ و ب).

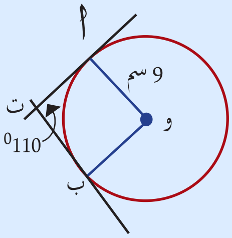
قياس ∠ أ و د = 63^0

مثال 6:

ت أ ،ت ب مماسان للدائرة التي مركزها و إذا كان **نو** = و أ = 9 سم
قياس ∠ أ ت ب = 110^0 احسب ،

(أ) قياس ∠ أ و ب.

(ب) مساحة القطاع الأصغر أ و ب. (علما بأن $\pi = \frac{22}{7}$)



الحل :

(أ) قياس ∠ و ب ت = قياس ∠ و أ ت = 90^0 (نصف القطر عمودي على خط التماس)

∴ قياس ∠ أ و ب = $360^0 - 110^0 - 90^0 - 90^0 = 70^0$

(ب) مساحة القطاع الأصغر أ و ب = $\frac{70}{360} \times \pi$ **نو**^{2}

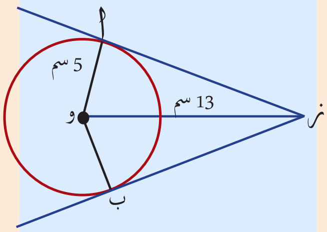
$= \frac{70}{360} \times \frac{22}{7} \times 9 \times 9 = 49.5$ سم (لأقرب 3 أرقام معنوية)

مثال 7:

خطا تماس من نقطة ز خارجة عن الدائرة يمسان الدائرة في أ ،ب إذا كان نصف القطر = 5 سم،
ز و= 13 سم احسب.

(أ) طول خط التماس .

(ب) مساحة المضلع أ ز ب و.



الحل :

قياس ∠ و أ ز = 90^0 (نصف القطر عمودي على خط التماس)

∴ $(5)^2 + ($أ ز$)^2 = (13)^2$ (نظرية فيثاغورث).

أي $25 + ($أ ز$)^2 = 169$

∴ $($أ ز$)^2 = 169 - 25 = 144$

∴ أ ز = $\sqrt{144} = 12$ سم

طول خط التماس = 12 سم

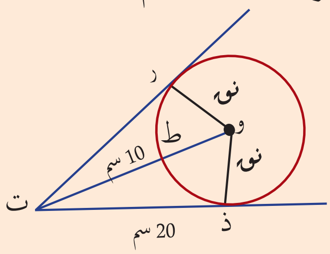
(ب) مساحة المضلع أ ز ب و = 2 مساحة Δ و أ ز

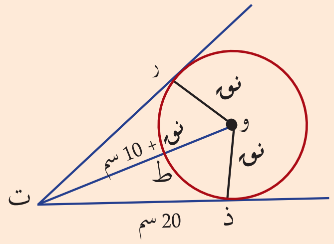
$= 2 \times \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 60$ سم^2

إن لدى Δ أ ون ، Δب وز نفس المساحة.

مثال 8:

ذ ت ، ر ت قطعتان مماستان طول منهما 20 سم لدائرة مركزها و، إذا كان ت و يقطع الدائرةعند ط، احسب طول نصف قطر الدائرة إذا كان طول ت ط = 10 سم.





الحل :

نفرض أن طول نصف قطر = نق

قياس ∠و ذ ت = 90° (نصف قطر ⊥ خط التماس)

∴ $($ و ت $)^2 = ($ت ذ$)^2 + ($و ذ$)^2$ (فيثاغورث).

$($10 + نق$)^2 = 20^2 +$ نق^2

100 + 20 نق + نق^2 = 400 + نق^2

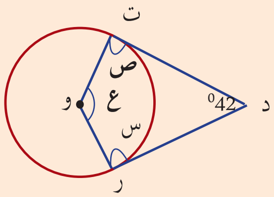
400 - 100 = 20 نق

∴ نق = $\frac{300}{20}$ = 15 سم

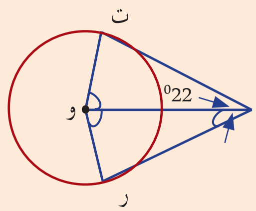
تمرين 8 ب :

1- في كل من الآتي د ت، ذ ز، مماسان لدائرة مركزها و، أوجد الزوايا أو الاطوال المجهولة المشار إليها (كل الاطوال بالسنتيمتر).

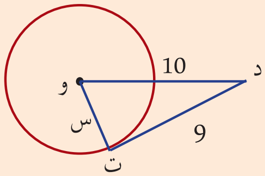
(أ)



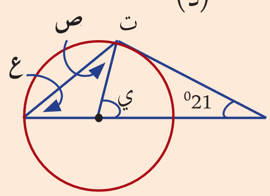
(ب)



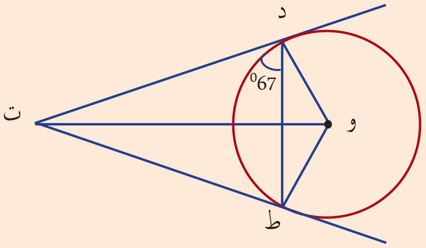
(جـ)



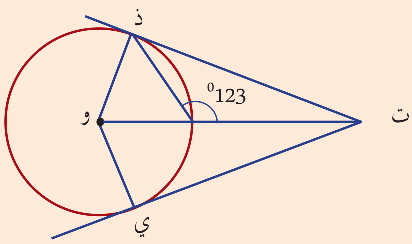
(د)



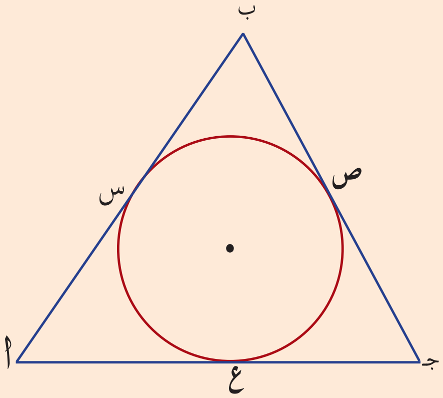
2- د ت، ط ت، مماسان لدائرة مركزها و، إذا كان ت $\hat{د}$ ط =67°، احسب قياس د و ت .



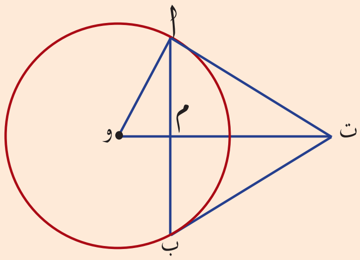
3- ذ ت، ي ت، مماسان لدائرة مركزها و، و ز ت خط مستقيم ، إذا كان قياس ∠ ذ ز ت =123°، احسب قياس ∠ ز ذ ت .



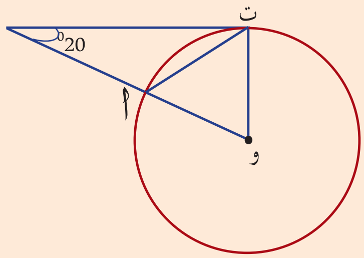
4- أ ب، ب جـ، جـ أ، ثلاثة مماسات تمس الدائرة في النقاط س، ص، ع، فإذا كان أ ب =7 سم، ب ص =4 سم، جـ ع =5 سم، أوجد محيط المثلث أ ب جـ .



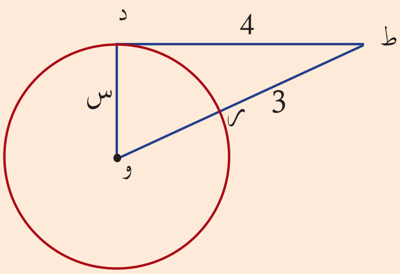
5- أ ب وتر في دائرة مركزها و ، أ ت، ب ت، مماسان للدائرة و ت يقطع أ ب في م. إذا كان و أ =13 سم، أ ت = 24 سم، احسب طول:
(أ) $\overline{\text{أ م}}$ (ب) $\overline{\text{و م}}$ (جـ) $\overline{\text{أ ت}}$.



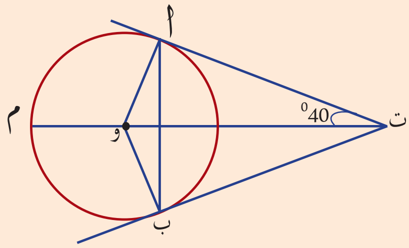
6- في الشكل المرسوم د ت مماس دائرة مركزها و ، ود يقطع الدائرة في أ، فإذا كان ∠ ودت = 20^0، أوجد قياس:
(أ) ∠ ت و د (ب) ∠ أ ت د.



7- في الشكل المرسوم و مركز دائرة فيها د ط مماس للدائرة في د، و ط خط مستقيم يقطع الدائرة في ر، إذا كان د ط = 4 سم، رط = 3 سم، و د = س سم،
(أ) عبر عن وط بدلالة س (ب) أحسب س

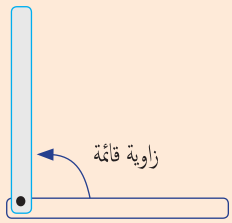


8- ت أ، ت ب مماسان للدائرة مركزها و ، م و ت خط مستقيم، زاوية أ ت و = 40^0،
(أ) اذكر محور التماثل في هذا الشكل (ب) احسب زاوية أ و ب

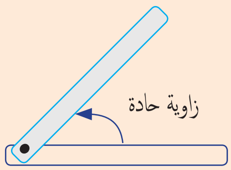


8 - 4 مراجعة على خواص الزاويا Revision of Angle Properties :

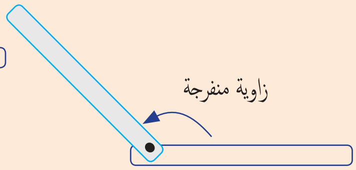
أنواع الزاويا :



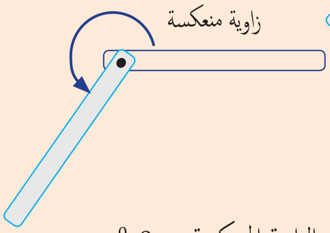
الزاوية القائمة = 90^0



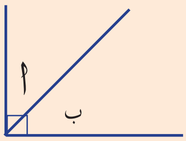
الزاوية الحادة $< 90^0$



$90^0 <$ الزاوية المنفرجة $< 180^0$

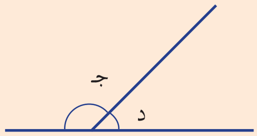


الزاوية المنعكسة $> 180^0$



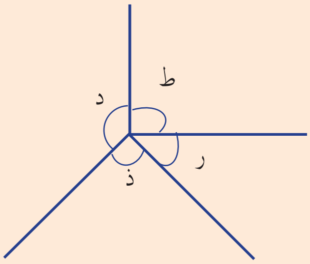
∡أ + ∡ ب = 90^0

(زاويتان متتامتان)



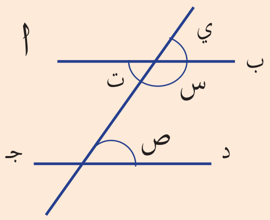
∡جـ + ∡ د = 180^0

(زاويتان متكاملتان)



∡ط + ∡د + ∡ر + ∡ ذ = 360^0

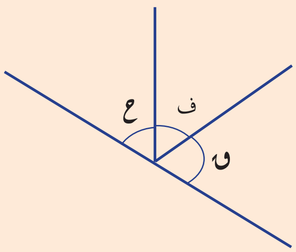
(زاويا عند نقطة)



ت = ص (بالتبادل) $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$

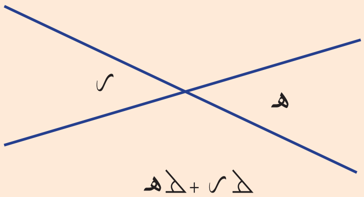
ص = ي (بالتناظر) $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$

س+ص = 180^0 (زاويتان داخلتان//جـد)



∡ع + ∡ف + ∡ن = 180^0

(زاويا متجاورة)

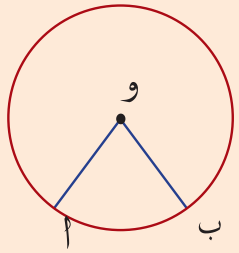


∡م + ∡هـ

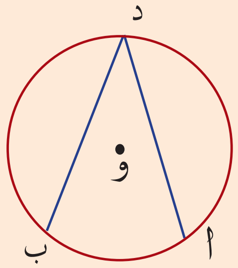
(بالتقابل الرأسي)

8 -5 الزاوية المركزية والزاوية المحيطية Angle at the Center and Angle at the Circumference

في الشكلين التاليين و مركز لكل دائرة ونقول:



∡ أوب زاوية مركزية تقابل القوس $\frown$ أب



∡ أدب زاوية محيطية تقابل القوس $\frown$ أب

ملحوظة:
يمكن أداء هذا النشاط باستخدام برنامج الهندسة الديناميكية أو فقط بفرجار ومنقلة وكلتا الطريقتان متاحتان.

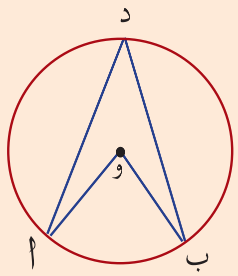
نشاط:

لدراسة العلاقة بين الزاوية المركزية والزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس.

(أ) باستخدام لوحة جيومتر

مستخدما لوحة جيومتر ارسم دائرة فيها القوس أ ب يقابل الزاوية الحادة المحيطية أدب والزاوية المركزية أوب.
قس ∡ أدب ، ∡ أوب بقيم مختلفة عن طريق سحب النقطة د أو أ والنقطة ب معا،
انقل واكمل الجدول التالي.
كرر العمل السابق لدائرة ذات نصف قطر مختلف.

∡ أدب	∡ أوب	∡ أوب / ∡ أدب
30^0		
110^0		
90^0		



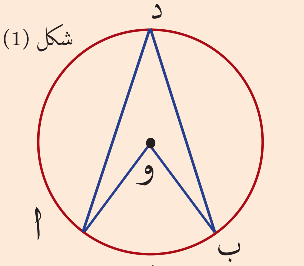
(ب) باستخدام الفرجار والمنقلة :

الخطوات:

1- (أ) ارسم دائرة مركزها و ، طول نصف قطرها 5 سم.
(ب) حدد ثلاث نقط أ، ب، د على الدائرة بحيث تصبح ∡ أدب حادة، ثم ارسم و أ ، وب، أ د ، ب د.
(جـ) قس ∡ أدب ، ∡ أوب ماذا تلاحظ؟
2- كرر الخطوة الأولى بجعل ∡ أدب منفرجة.
3- كرر الخطوة الأولى بجعل ∡ أدب زاوية قائمة.
4- كرر الخطوات الأولى، والثانية والثالثة لدائرة ذات نصف قطر مختلف .

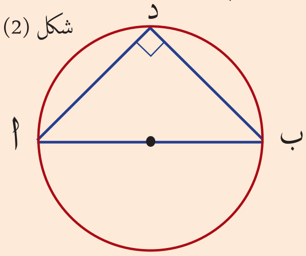
من الخطوات 1 ، 2

قياس الزاوية المركزية ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس أي أن في شكل (1) قياس زاوية أ وب = 2 قياس زواية أدب.



من الخطوة 3

الزاوية المرسومة في نصف دائرة هي زاوية قائمة أي أن في شكل (2) ∡ أدب = 90° .



توضح الخطوة 4 أن نتائج الخطوات 1 إلى 3 يمكن تطبيقها على جميع الدوائر.

سوف نبرهن الآن على صحة ما يلي:

(1) قياس الزاوية المركزية ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس

في كل من الشكلين

∡ أ د و = ∡ و أ د

∡ ب د و = ∡ وب د

ل = ∡ أ د و + ∡ و أ د

= س + س

= 2 س

ه = ∡ ب د و + ∡ وب د

= ص + ص

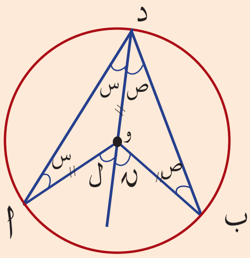
= 2 ص

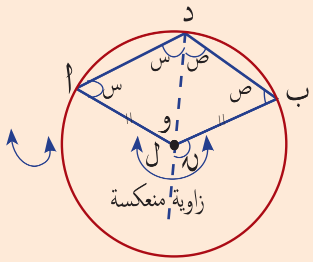
∴ ∡ أ وب = ل + ه

= 2 س + 2 ص

= 2 (س + ص)

= 2 ∡ أ د ب





(2) الزاوية المرسومة في نصف دائرة هي زاوية قائمة

ل = 180°

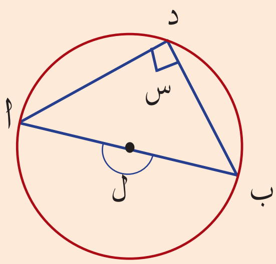
ل = 2 س

∴ 2س = 180°

س = 90°

∴ ∡ أدب زاوية قائمة.

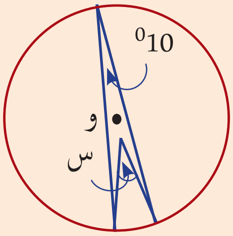
استنتاج



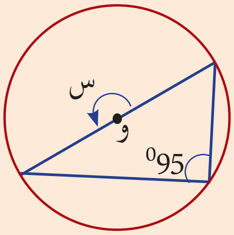
مثال 9 :

و مركز كل من الدائرتين الآتيتين أوجد قياسات الزاويا المجهولة المشار إليها في كل دائرة.

(أ)



(ب)



الحل :

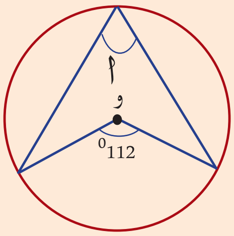
(أ) س = $2 \times 10^\circ = 20^\circ$ (زاوية مركزية = ضعف زاوية محيطية مشتركة)

(ب) س = $2 \times 95^\circ = 190^\circ$ (زاوية مركزية = ضعف زاوية محيطية مشتركة)

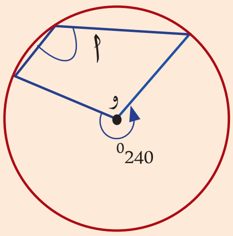
مثال 10 :

أوجد قياسات الزاويا غير المعلومة والمشار إليها في دائرة مركزها و.

(أ)



(ب)



الحل :

(أ) $112^\circ = 2$ أ (زاوية مركزية = ضعف زاوية محيطية مشتركة)

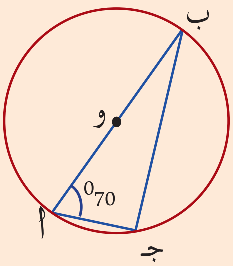
$\therefore$ أ $= \frac{112^\circ}{2} = 56^\circ$

(ب) $240^\circ = 2$ أ (زاوية مركزية = ضعف زاوية محيطية مشتركة)

$\therefore$ أ $= \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$

مثال 11 :

في الشكل المرسوم $\overline{\text{أب}}$ قطر في الدائرة إذا كان قياس ∠ جـ أب = 70° احسب قياس ∠ أب جـ.

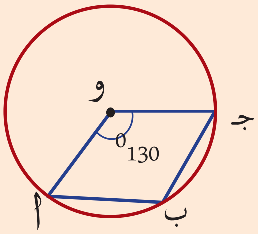


الحل :

∠ أ جـ ب = 90° (زاوية في نصف دائرة)

$\therefore$ ∠ أب جـ = $180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$

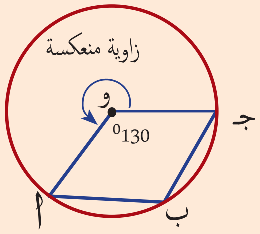
مثال 12 :



أ ب جـ ثلاث نقاط على دائرة مركزها و ،

∡ أ و جـ = 130° أوجد قياس ∡ أ ب جـ.

الحل :

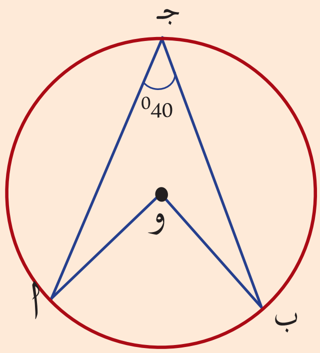


قياس الزاوية المنعكسة أ و جـ = $360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$

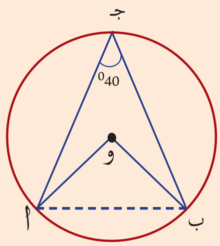
قياس الزاوية المنعكسة أ و جـ = 2 قياس ∡ أ ب جـ (زاوية مركزية = ضعف زاوية محيطية مشتركة)

230° = 2 قياس ∡ أ ب جـ

∴ قياس ∡ أ ب جـ = $\frac{230}{2} = 115^\circ$



مثال 13 :



في الشكل المرسوم و مركز دائرة فيها

∡ أ جـ ب = 40° احسب قياس الزاوية و أ ب .

الحل :

قياس ∡ أ و ب = 2 قياس ∡ أ جـ ب (زاوية مركزية = ضعف زاوية محيطية مشتركة)

$= 2 \times 40^\circ = 80^\circ$

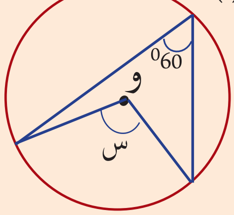
قياس ∡ و أ ب = $\frac{180^\circ - 80^\circ}{2}$ (زاويا قاعدية لمثلث متساوي الساقين)

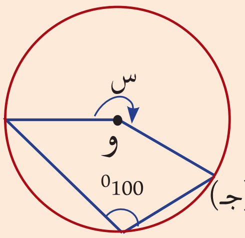
∴ قياس ∡ أ ب جـ = $\frac{100}{2} = 50^\circ$

تمرين 8 جـ :

1- إذا كانت و مركز كل من الدوائر التالية، أوجد قياس الزاوية المجهولة في كل شكل من الأشكال المشار إليها.

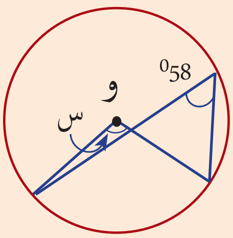
(أ)





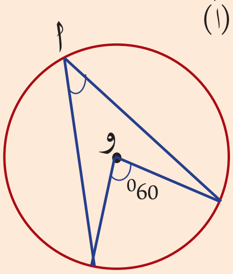
(جـ)

(ب)

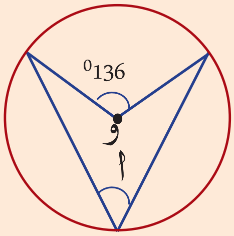


2- أوجد قياس الزاوية المجهولة في كل دائرة من الدوائر الآتية والتي مركزها و .

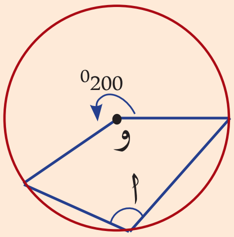
(أ)



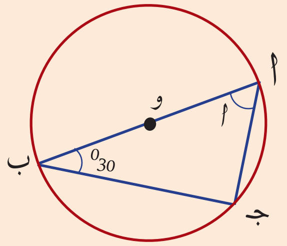
(ب)



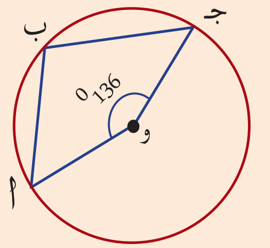
(جـ)



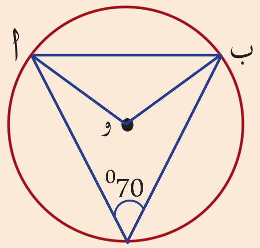
3- أوجد قياس الزاوية المجهولة في كل دائرة من الدوائر التي مركزها و .



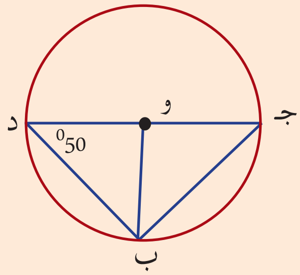
4- نقطة و مركز الدائرة التي فيها قياس ∠أ و جـ = 136^0
أوجد قياس ∠أ ب جـ .



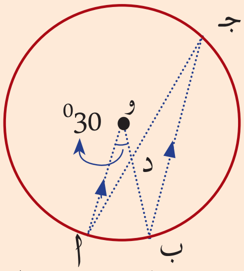
5- أ ، ب ،جـ ثلاث نقط تقع على دائرة مركزها و، فإذا كان قياس ∠أ جـ ب= 70^0 احسب قياس ∠ ب و أ .



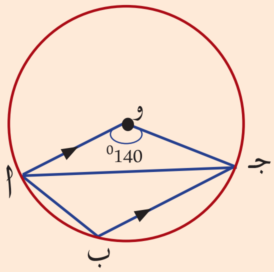
6- يمر القطر د جـ بمركز الدائرة و، فإذا كان قياس ∠بدجـ = 50^0 ، احسب قياس ∠ ب و جـ .



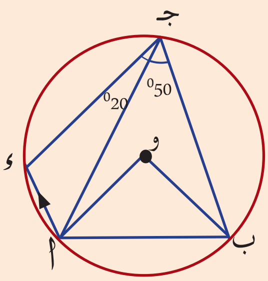
7- أ ، ب ، جـ ثلاث نقط تقع على دائرة مركزها و، أ جـ يقطع وب في د ، أ و ويوازي ب جـ ، فإذا كان قياس ∠أ و ب= 30^0 احسب قياس:
(أ) ∠ أ جـ ب (ب) ∠ ب ء جـ



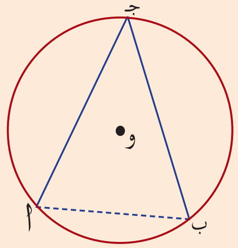
8- في الشكل المرسوم و مركز الدائرة، أ و يوزاي ب جـ ، قياس ∠ أ و جـ= 140^0 احسب قياس:
(أ) ∠ أ جـ ب (ب) ∠ أ ب جـ



9- في الشكل المرسوم دائرة مركزها و، أء // ب جـ ، فإذا كان قياس ∠أ جـ ب= 50^0 ، ∠ أ جـ ء= 20^0 احسب:
(أ) قياس ∠ أ ء جـ (ب) قياس ∠ و أ ب .



6-8 الزاوايا في قطعة دائرية واحدة Angles in a Segment



في الشكل ∡ أ جـ ب زاوية محيطية تقابل القوس أ ب فإذا رسم الوتر أ ب ، ∡ أ جـ ب زاوية مرسومة في القطعة الكبرى من الدائرة، لهذا فإن ∡ أ جـ ب يمكن وصفها بأنها زاوية محيطية أو زاوية في القطعة الدائرية.

نشاط: لدراسة العلاقة بين الزاويا المرسومة في قطعة دائرية واحدة.

ملحوظة:
يمكن أداء هذا النشاط باستخدام برنامج الهندسة الديناميكية أوباستخدام الفرجار والمنقلة، كما هو موضح في الطريقتين إلى اليسار.

(أ) باستخدام لوحة جيومتر

الخطوات:

1- (أ) مستخدما لوحة جيومتر ارسم دائرة مركزها و .

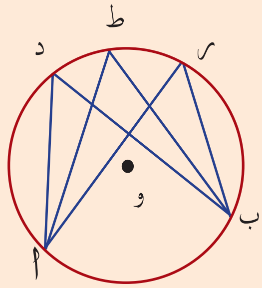
(ب) حدد نقطتين أ ، ب على الدائرة .

(جـ) حدد نقطتين د، ط على القوس الأكبر أ ب ثم ارسم الأوتار أ د، أ ر، ب د ، ب ط.

(د) قس ∡ أدب ، ∡ أطب ماذا تلاحظ؟.

(هـ) حافظ على ∡ أدب ثابتة واسحب نقطة ط إلى موقع مختلف وليكن ر على القوس الأكبر أ ب، ماذا تلاحظ على ∡ أ ر ب.؟

2- وسع من استقصائك بسحب النقطة د لتغير من قياسات ∡ أدب.
ماذا تلاحظ على ∡ أطب ؟



(ب) باستخدام الفرجار والمنقلة :

الخطوات:

1- (أ) ارسم دائرة طول نصف قطرها 5 سم و مركزها و .

(ب) حدد نقطتين أ ، ب على المحيط.

(جـ) حدد نقطتين د، ط على القوس الأكبر أ ب ثم ارسم الأوتار أ د، أ ط، ب د، ب ط.

(جـ) قس ∡ أدب ، ∡ أطب ماذا تلاحظ؟

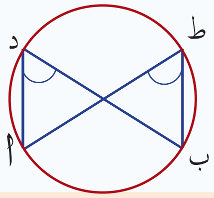
(جـ) حدد نقطة أخرى ر على القوس الأكبر أ ب، صل أ ر، ب ر ثم قس ∡ أ ر ب.

2- كرر الخطوة (1) مستخدما دوائر ذات أطوال أنصاف أقطار مختلفة.

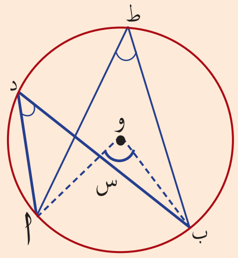
في هذا النشاط يمكننا القول بأن ∡د ، ∡ ط، ∡ ر زوايا مشتركة في نفس القطعة، يمكن تعميم نتائج النشاط السابق بالاستنباط.

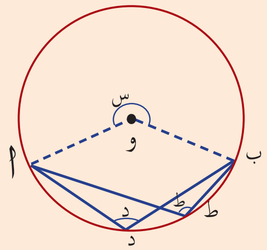
التعميم بالاستنباط

قياسات الزوايا المرسومة في قطعة واحدة من دائرة تكون متساوية.
على سبيل المثال قياس ∡ أدب = ∡ أطب.



سوف نبرهن الآن على صحة ما يلي:
قياسات الزوايا المرسومة في قطعة واحدة من دائرة تكون متساوية.





في أي من الشكلين:

س = 2 د (زاوية مركزية = ضعف زاوية محيطية)

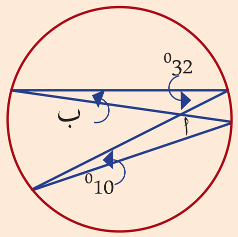
س = 2 ط (زاوية مركزية = ضعف زاوية محيطية)

∴ 2 د = 2 ط

∴ د = ط

مثال 14 :

أوجد قياس الزاوية المجهولة في هذا الشكل



الحل :

أ = 32° (زاوية في نفس القطعة)

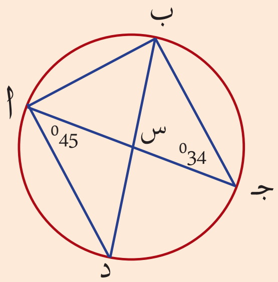
ب = 10° (زاوية في نفس القطعة)

مثال 15 :

في الشكل على اليسار $\overline{\text{أ جـ}}$ يقطع الخط $\overline{\text{ب د}}$ في س.

إذا كان قياس ∠ أجـب = 34°، قياس ∠ جـأد = 45°،

احسب قياس ∠ أس ب .



الحل :

قياس ∠جـبد = قياس ∠جـأد (زاوية في نفس القطعة)

= 45°،

قياس ∠ أس ب = قياس ∠ جـبس + قياس ∠ بجـس

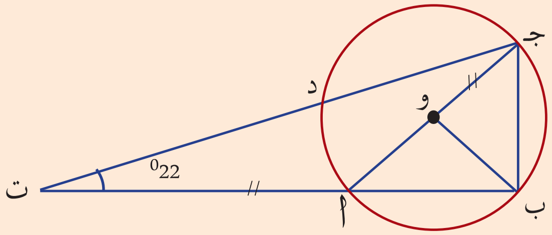
= 45° + 34° = 79°

(قياس الزاويةالخارجة = مجموع قياس الزاويتين الداخلتين ما عدا المجاورة لها)

مثال 16 :

في الشكل المرسوم أ جـ قطر في دائرة مركزها و . أ ب ، جـ ء، امتدا ليتقابلا في نقطة ت. إذا كانت أ ت = أ جـ ، قياس ∠ أت ء = 22^0 احسب:

(أ) قياس أ $\hat{ء}$ ب (ب) قياس ب $\hat{و}$ جـ (جـ) قياس جـ$\hat{ب}$ء



الحل :

(أ) قياس ∠ أجـء = 22^0 (قاعدة مثلث متساوي الساقين)

قياس ∠ أ ب جـ = 90^0 (نصف دائرة)

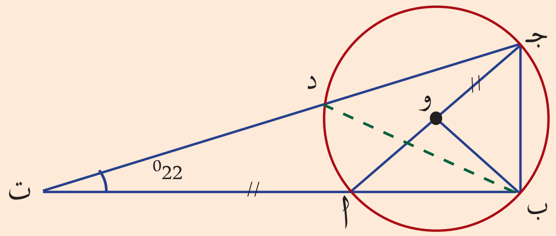
∴ قياس ∠ أ جـ ب = 180^0 - قياس ∠ أ ب جـ - قياس ∠ أت ء - قياس ∠ أ جـء

= 180^0 - 90^0 - 22^0 - 22^0 = 46^0

∴ قياس ∠ أ ء ب = 46^0 (زاوية في نفس القطعة)

ملحوظة:

ارسم الوتر بء لترى الزاوية المطلوبة أ$\hat{ء}$ب



(ب) قياس ∠ أ و ب = 2 × 46^0 (الزاوية المركزية = ضعف الزاوية المحيطية)

= 92^0

قياس ∠ب و جـ = 180^0 - 92^0 = 46^0 (زاويا متجاورة على مستقيم)

= 88^0

(جـ) قياس ∠جـبء = قياس ∠ أب جـ - قياس ∠ أبء (زاوية في نفس القطعة)

∴ قياس ∠جـبء = قياس ∠ أب جـ - قياس ∠ أبء

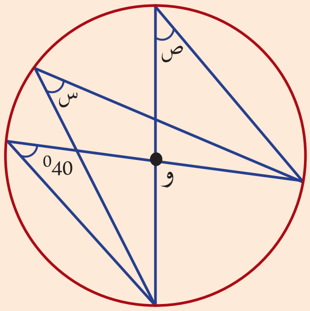
= 90^0 - 22^0

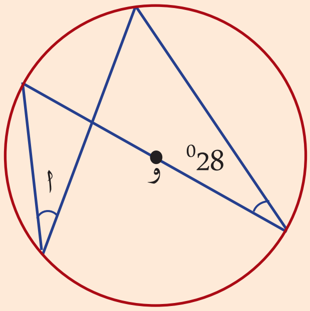
= 68^0

تمرين 8 د :

1- أوجد قياسات الزوايا المجهولة إليها في الأشكال التالية:

(ب) (أ)

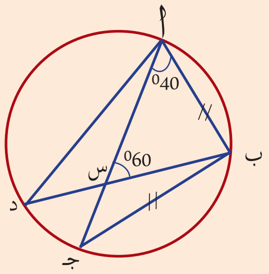




2- تقاطع الوتران أ جـ ، ب د عند س، إذا كان قياس ∠ جـ أ ب= 40° ، قياس ∠ أ س ب= 60° ، أ ب = ب جـ احسب:

(أ) قياس ∠ أ جـ د

(ب) قياس ∠ جـ أ د



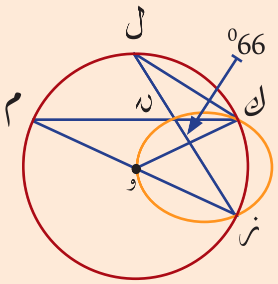
3- في الشكل المرسوم مركز الدائرة الكبرى وهي تقع على الدائرة الصغرى ، ز و م ، ز ن ل ، ك ن م ، خطوط مستقيمة، إذا كان قياس ∠ ك ن ز = 66° ،

احسب:

(أ) قياس ∠ ز م ل

(ب) قياس ∠ ل ك ن

(جـ) قياس ∠ ل ك و



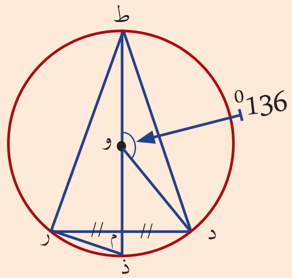
4- في الدائرة القطر ط ذ يقطع الوتر د ر في نقطة م وهي تُنصف الوتر د ر

فإذا كان و مركز الدائرة قياس ∠ دوط = 136° احسب:

(أ) قياس ∠ درط

(ب) قياس ∠ ردط

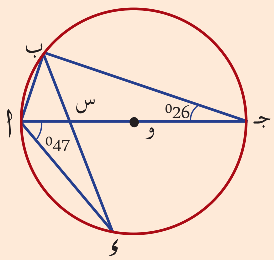
(جـ) قياس ∠ رذط



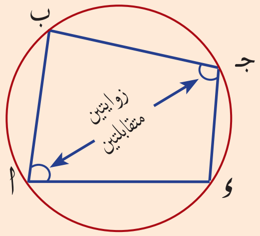
5- في الشكل المرسوم أ جـ قطر في دائرة، الوتر يقطع أ جـ في نقطة س، فإذا كان قياس ∠ ب جـ أ = 26° ، قياس ∠ جـ أ د = 47° احسب قياس:

(أ) ∠ ب أ جـ

(ب) ∠ أ س د



7-8 زاويا الشكل الرباعي الدائري Angles of cyclic Quadrilateral

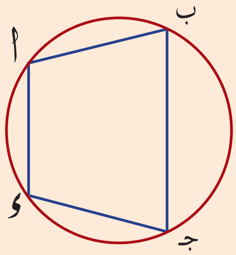


الشكل الرباعي الذي تقع رؤوسه الأربعة على الدائرة يسمى شكلا رباعيا دائرياً.
في الشكل الرباعي الدائري المرسوم أ ب جـ ى ، ∠أ ، ∠جـ يسميان زوايتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري الزوايتان المتقابلتان الآخرتان هما ∠ب ، ∠ى .

نشاط: لدراسة العلاقة بين زاويا الشكل الرباعي الدائري.

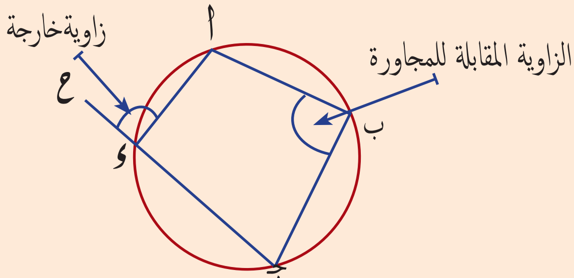
ملحوظة:
يمكن أداء هذا النشاط باستخدام برنامج الهندسة الديناميكية أوباستخدام الفرجار والمنقلة، كما هو موضح في الطريقتين إلى اليسار.

(أ) باستخدام الرسوم الهندسية التخطيطية (GSP)



الخطوات:

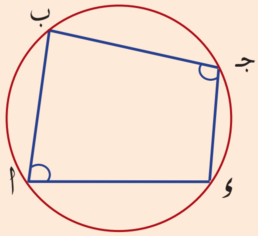
1- (أ) استخدام الرسوم الهندسية التخطيطية في رسم الدائرة.
(ب) حدد أربع نقط على الدائرة ولتكن أ، ب، جـ ، ى .
(جـ) ارسم أ ب، ب جـ، جـ ى ، ى أ لتكون شكلا رباعيا دائرياً.
(د) قس ∠ أب جـ ، ∠ أى جـ ، ثم أوجد مجموعها، ماذا تلاحظ ؟.
(هـ) اسحب أي رأس من الشكل أ ب جـ ى لتغير شكله، ماذا تلاحظ على مجموع قياس كل زوايتين متقابلتين ؟ .



2- (أ) مستخدما لوحة جيومتر اختر ملفا (File) واختر رسما تخطيطيا جديدا.
(ب) ارسم دائرة .
(جـ) حدد النقط أ، ب، جـ ، ى عليها.
(د) ارسم أ ب، ب جـ، جـ ى ، ى أ .
(هـ) مدد جـى إلى ع .
(و) قس الزاوية الخارجة أى ع والزواية الداخلة أب جـ ماذا تلاحظ ؟
(ز) اسحب أي رأس من الشكل أ ب جـ ى وأعد تحريكها لتغيير الشكل، ماذا تلاحظ على قياسي ∠ أى ع ، ∠ أب جـ؟

(ب) باستخدام الفرجار والمنقلة:

الخطوات:

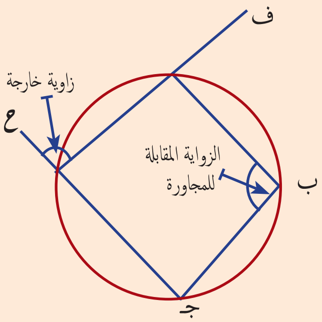


1- (أ) ارسم دائرة طول نصف قطرها 5 سم و حدد النقط عليها أ ، ب ، جـ ، ى ثم ارسم أ ب، ب جـ ، جـ ى ، ى أ لتكون شكلا رباعيا دائرياً. .
(ب) قس ∠ أب جـ ، ∠ أى جـ ، ثم أوجد مجموع قياسيها ماذا تلاحظ ؟.
(جـ) قس ∠ ب أ ى ، ∠ ب جـ ى ، ثم أوجد مجموع قياسيها ماذا تلاحظ ؟.
كرر الخطوة (1) مع دوائر أخرى مختلفة في طول نصف القطر.

2- (أ) ارسم دائرة طول نصف قطرها 4 سم و حدد عليها النقط ثم ارسم أ، ب، جـ ، ء لتكون شكلا رباعيا دائريا أ ب جـ ء . مد جـ ء إلى ع ، ء أ إلى ف.

(ب) قس الزاوية الخارجة أ ء ع والزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها ∡ أ ب جـ ماذا تلاحظ ؟.

(جـ) قس الزاوية الخارجة ∡ ف أ ب والزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها ∡ ب جـ ء ماذا تلاحظ ؟.

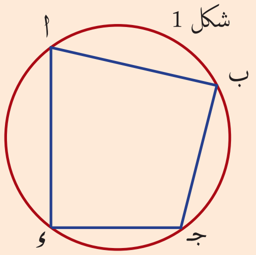


التعميم بالاستنباط

كرر الخطوة (2) مستخدما أطوال أنصاف أقطار مختلفة.

يمكن تعميم نتائج هذا النشاط بواسطة الاستنباط

شكل 1



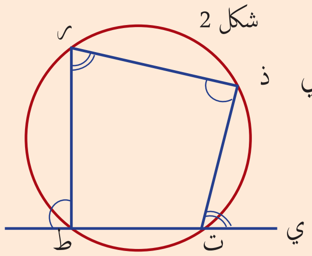
من الخطوة 1

1- الزوايتان المتقابلتان في الشكل الرباعي الدائري متكاملتان

أي أن: قياس ∡ أ ب جـ + قياس ∡ أ ء جـ = 180^0.

قياس ∡ ب أ ء + قياس ∡ ب جـ ء = 180^0.

شكل 2



من الخطوة 2

2- قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.

أي أن: قياس ∡ د ط ر = قياس ∡ ت ذ ر

قياس ∡ ي ت ذ = قياس ∡ ط ر ذ

في الشكل (2) يمكن ملاحظة أن:

قياس ∡ د ط ر = 180^0 - قياس ∡ ر ط ت (زوايا متجاورة على استقامة واحدة)

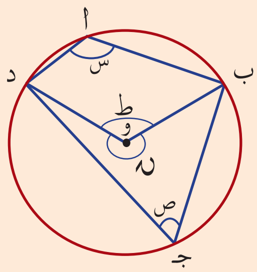
قياس ∡ ر ذ ت = 180^0 - قياس ∡ ر ط ت (متقابلتان في الشكل الرباعي الدائري)

∴ قياس ∡ د ط ر = قياس ∡ ر ذ ت.

(قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية المقابلة للمجاورة لها) يمكن التوصل إليها من الخاصية (الزوايتان المتقابلتان في الشكل الرباعي الدائري متكاملتان) بناء عليه يمكننا استخدام أي من هذه الخواص لحل مشكلات الزوايا المتضمنة في الأشكال الرباعية الدائرية والتي نجدها أكثر ملائمة.

سوف ننتقل الآن لإثبات ما يلي:

(1) الزوايتان المتقابلتان في الشكل الرباعي الدائري متكاملتان



∡ن = 2 س̂ (∡ المركزية = 2 ∡ المحيطية)

∡ط = 2 ص̂ (∡ المركزية = 2 ∡ المحيطية)

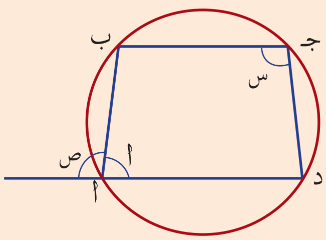
∡ن + ∡ط = 2 س̂ + 2 ص̂

∡ن + ∡ط = 360°

∴ 2 س̂ + 2 ص̂ = 360°

∴ س̂ + ص̂ = 180°

(2) قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية المقابلة للزاوية المجاورة لها.



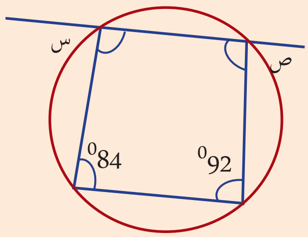
∡س + ∡ أ = 180°

∡ص + ∡ أ = 180°

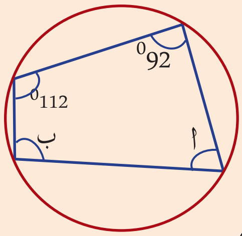
∴ ∡س = ∡ص

مثال 17 :

أوجد قياسات الزاويا المجهولة في الشكلين (أ) ، (ب).



الشكل(ب)



الشكل (أ)

الحل :

◂ الشكل (أ)

أ = 180° - 110° (زوايا متقابلة في شكل رباعي دائري)

= 68°

ب = 180° - 92° (زوايا متقابلة في شكل رباعي دائري)

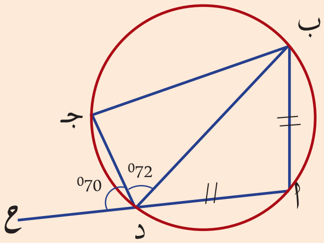
= 88°

◂ الشكل (ب)

س = 92° (زوايا خارجة لشكل رباعي دائري)

ص = 84° (زوايا خارجة لشكل رباعي دائري)

مثال 18 :



أ ب جـ د شكل رباعي دائري أد = أ ب

أد امتد إلى نقطة ع ، فإذا كان

قياس ∡جـدع = 70°، قياس ∡جـدب = 72°،

احسب (أ) قياس ∡ ب أد (ب) قياس ∡ بجـد .

الحل :

قياس ∠ أدب = $180^\circ - 70^\circ - 72^\circ = 38^\circ$ (زاويا متجاورة على مستقيم)

(أ) قياس ∠ ب أ د + $38^\circ + 38^\circ = 180^\circ$ (مجموع زاويا مثلث متساوي الساقين)

∴ قياس ∠ ب أ د = $180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$

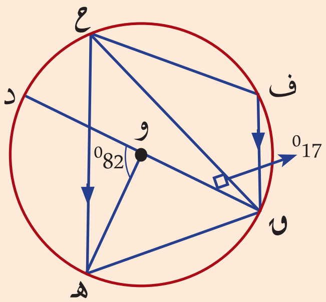
(أ) قياس ∠ ب جـ د = $180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$ (زاويا متقابلة في شكل رباعي دائري)

مثال 19 :

ع ف ن هـ شكل رباعي دائري فيه $\overline{\text{ع هـ}}$ // $\overline{\text{ف ن}}$ ، $\overline{\text{د ن}}$ قطر في دائرة مركزها و .

إذا كان قياس ∠ د و هـ = 82° ، قياس ∠ د ن ع = 17° احسب :

(أ) قياس ∠ هـ ع ن (ب) قياس ∠ هـ ن ف (جـ) قياس ∠ ف ع ن.



صل هـ مع ن لترى الرباعية الدائرية

الحل :

(أ) قياس ∠ هـ و ن = $180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$ (زاويا متجاورة على مستقيم)

2 × قياس ∠ هـ ع ن = 98° (المركزية ضعف المحيطية)

قياس ∠ هـ ع ن = $\frac{98^\circ}{2} = 49^\circ$

(ب) قياس ∠ هـ ن ف = 49° (ف ن // ع هـ)

قياس ∠ و ن هـ = $\frac{180^\circ - \text{∠ هـ و ن}}{2}$ (زاويا قاعدةالمثلث تساوي Δ هـ و ن)

$= \frac{180^\circ - 98^\circ}{2} = 41^\circ$

قياس ∠ هـ ن ف = قياس ∠ و ن هـ + قياس ∠ د ن ع + قياس ∠ ع ن ف

$= 41^\circ + 17^\circ + 49^\circ = 107^\circ$

(جـ) قياس ∠ ف ع هـ = $180^\circ - 107^\circ = 73^\circ$ (زاويا متقابلة في شكل رباعي دائري)

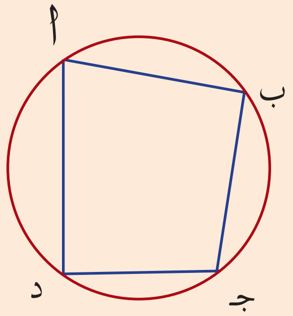
∠ ف ع ن = قياس ∠ ف ع هـ - قياس ∠ ن ع هـ

$= 73^\circ - 49^\circ = 24^\circ$

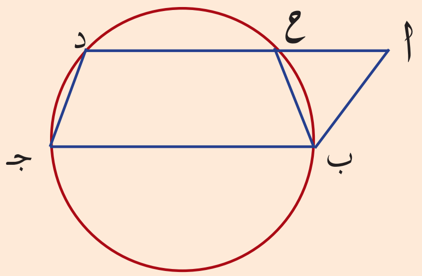
تمرين 8 هـ:

1- في كل شكل من الأشكال التالية هل أ ب جـ د رباعي دائري:

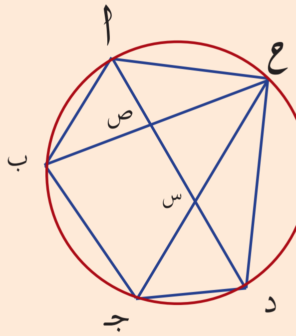
(أ)



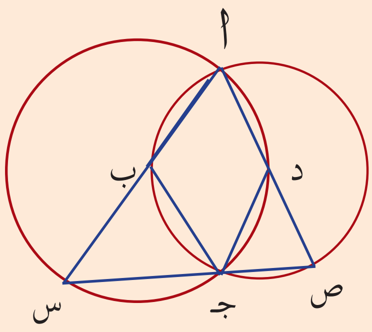
(ب)



(جـ)

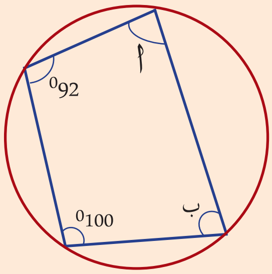


(د)

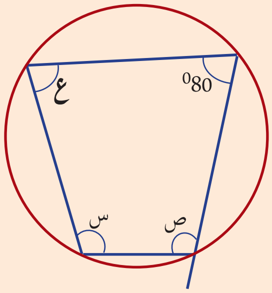


2- أوجد قياسات الزوايا المجهولة في كل شكل من الأشكال التالية:

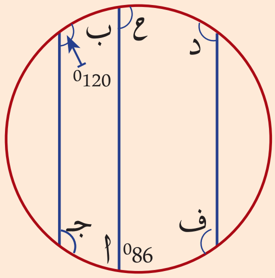
(أ)



(ب)

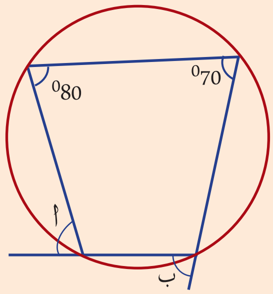


(جـ)

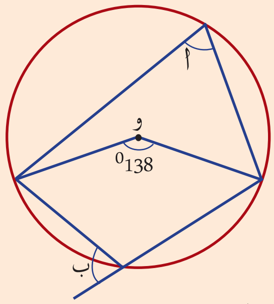


3- في كل شكل من الأشكال التالية أوجد قياسات الزوايا المجهولة المشار إليها:

(أ)

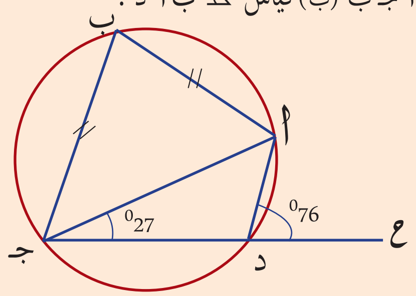


(ب)



4- أ ب جـ د شكل رباعي دائري أ ب = ب جـ ، قياس ∡ أ جـ ع = 27°، جـ د مد إلى نقطة ع ، قياس ∡ أ د ع = 76°، احسب:

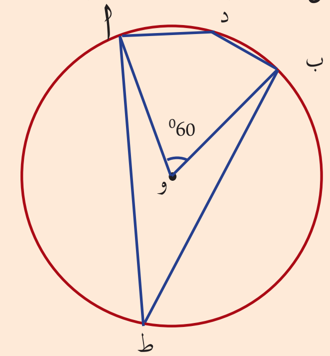
(أ) قياس ∡ أ جـ ب (ب) قياس ∡ أ ب د .



5- في الشكل و مركز الدائرة، قياس ∠ أوب= 60° احسب:

(أ) قياس ∠ أطب

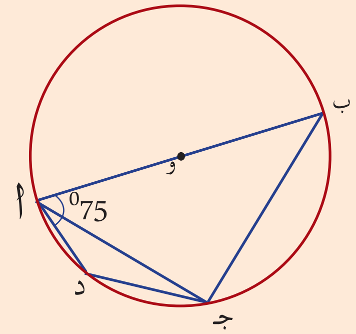
(ب) قياس ∠ أدب



6- أوب قطر في الدائرة، ∠ دأب= 75° احسب:

(أ) قياس ∠دجب.

(ب) قياس ∠ أجـ د.



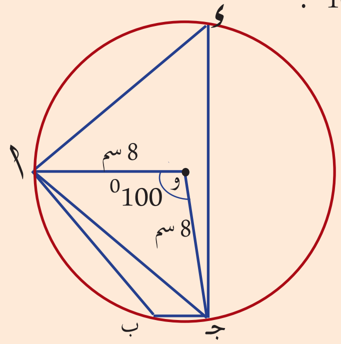
7- أ ، ب، جـ ، د أربع نقط على دائرة مركزها و فيها طول نصف القطر = 8 سم،

إذا كان قياس ∠ أ و جـ = 100° :

(أ) قياس ∠ أءجـ.

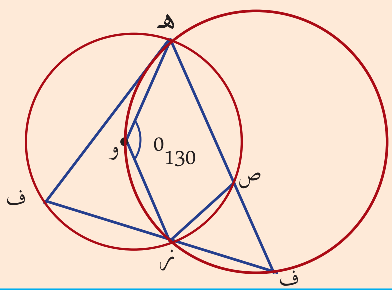
(ب) قياس ∠ أب جـ.

(حـ) طول أجـ.

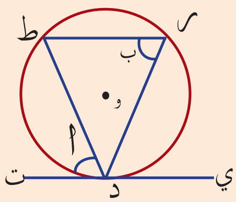


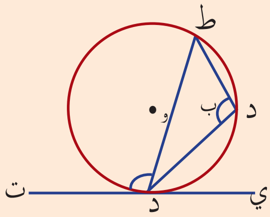
8- في الشكل المرسوم و مركز الدائرة الأولى ، ف ص هـ ، ف ر ر خطان مستقيمان، ∠ هـ و ر=130°، احسب : (أ) قياس ∠ ص ف ر

(ب) قياس ∠ ف ص ر.



8-8 الزوايا في القطع الدائرية المتبادلة Angles of Alternate Segments





في كل من الدائرتين المرسومتين الوتر د ط يقسم الدئرة إلى قطعتين دائرتين.
المستقيم ت د ي مماس للدائرة في نقطة د،
يمكن القول أن الزوايتين أ ، ب هما في قطع متبادلة من الدائرة.
الزاوية المماسية تساوي الزاوية المحيطية التي تقابل الوتر من الجهة الأخرى.

نشاط:

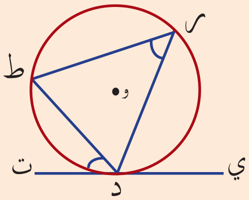
الخطوات:

1- (أ) ارسم دائرة طول نصف قطرها 4 سم . ارسم على الدائرة النقط د، ط ، ر . بحيث تُكون Δ دطر فيه ∡ ر حادة.

(ب) ارسم المماس ت د ي يمس الدائرة عند د.

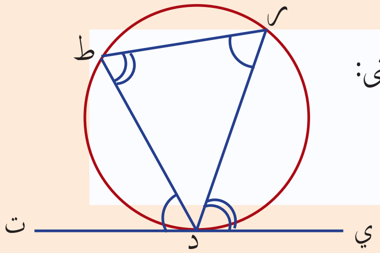
(جـ) قس ∡ تدط ، ∡ درط ، هل هما متساويان في القياس؟.

2- كرر العمل مرة أخرى بجعل ∡ ر منفرجة.



يمكن تعميم نتائج هذا النشاط بالاستنباط.

التعميم بالاستنباط



زوايا القطع الدائرية المتبادلة متساوية في القياس بمعنى:
قياس ∡ تدط = قياس ∡ درط
قياس ∡ يدر = قياس ∡ دطر

وسوف ننتقل الآن لنثبت أن:

زوايا القطع الدائرية المتبادلة متساوية في القياس

استدلال

ت د ي مماس، دس قطر في دائرة.

قياس ∡ ر = 90^0 (زاوية في نصف دائرة)

قياس $\hat{\text{س}}$ + قياس $\hat{\text{ر}}$ + قياس $\hat{\text{د}}$ = 180^0 (مجموع زوايا مثلث)

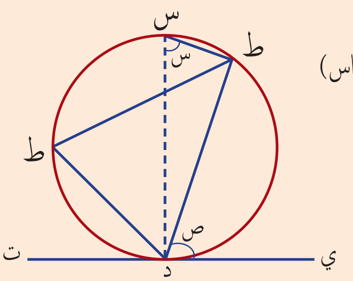
∴ قياس $\hat{\text{س}}$ + قياس $\hat{\text{د}}$ = 180^0 - 90^0 = 90^0

أيضا قياس $\hat{\text{ص}}$ + قياس $\hat{\text{د}}$ = 90^0 (نو ⊥ على خط المماس)

∴ قياس $\hat{\text{س}}$ = قياس $\hat{\text{ص}}$

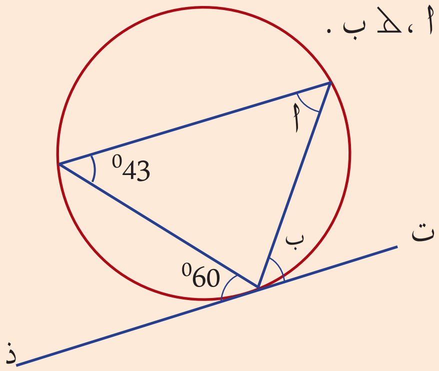
ولكن قياس $\hat{\text{س}}$ = قياس $\hat{\text{ط}}$ (زوايا في نفس القطعة)

∴ قياس $\hat{\text{ص}}$ = قياس $\hat{\text{ط}}$



مثال 20 :

في الشكل المرسوم جهة اليسار ذ ت مماس للدائرة، أوجد قياسات الزوايا المجهولة ∠ أ ، ∠ ب .



الحل :

قياس أ = 60° (زاويا قطع متبادلة)

قياس ب = 43° (زاويا قطع متبادلة)

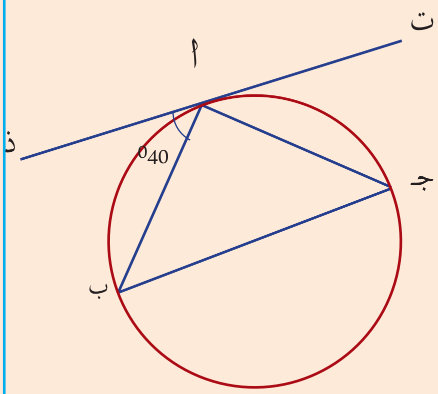
مثال 21 :

في الشكل المرسوم ذ أ ت مماس للدائرة، في نقطة أ ، ب جـ قطر في دائرة

فاذا كان قياس ∠ ذ أ ب = 40° احسب

(أ) ∠ جـ أ ت

(ب) ∠ جـ ب أ .



الحل :

(أ) قياس ∠ ب أ جـ = 90° (زاوية في نصف دائرة)

قياس ∠ جـ أ ت = 180° - 90° - 40° (على استقامة واحدة)

= 50°

(ب) قياس ∠ جـ ب أ = قياس ∠ جـ أ ت

= 50° (زاويا قطع متبادلة)

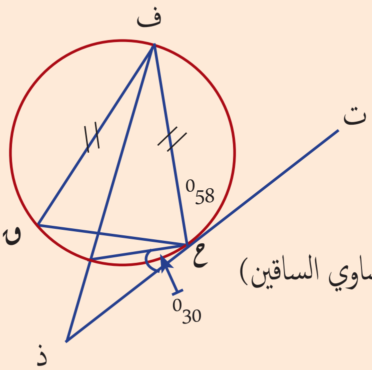
مثال 22 :

ذ ع ت مماس للدائرة في ع ، ذ هـ ف خط مستقيم، ف ن = ف ع،

اذا كان قياس ∠ هـ ع ذ = 30° ، قياس ∠ ف ع ت = 58° احسب

(أ) قياس ∠ ن ف ع

(ب) قياس ∠ هـ ذ ع .



الحل :

(أ) قياس ∠ ف ن ع = 58° (زاويا في قطع دائرية متبادلة)

قياس ∠ هـ ذ ع = 180° - ف ن ع - ن ع ف (مجموع زاويا مثلث متساوي الساقين)

= 180° - 58° - 58°

= 64°

(ب) قياس ∠ هـ ف ع = 30° (زاويا في قطع دائرية متبادلة)

∴ قياس ∠ هـ ذ ع + قياس ∠ هـ ف ع = قياس ∠ ف ع ت (زاوية خارجة لمثلث)

قياس ∠ هـ ذ ع + 30° = 58°

∴ قياس ∠ هـ ذ ع = 58° - 30° = 28°

مثال 23 :

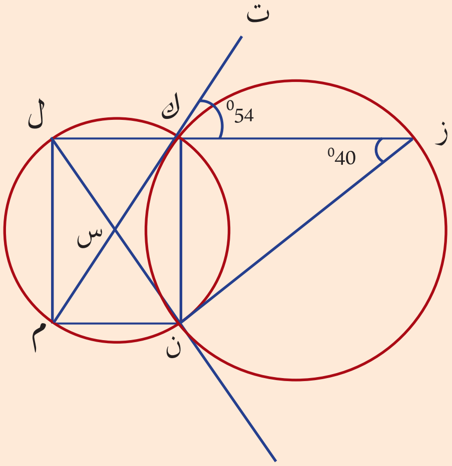
ت ك س م ، ذ ن س ل مماسان للدائرة الأولى، ز ك ل خط مستقيم،

إذا كان قياس ∠ ت ك ز = 54° ، قياس ∠ ن ز ك = 40° احسب:

(أ) قياس ∠ م ل ن.

(ب) قياس ∠ ل م ن .

(جـ) قياس ∠ ك ل ن.



الحل :

(أ) قياس ∠ م ك ن= 40° (زوايا في قطع دائرية متبادلة)

∴ قياس ∠ م ل ن = قياس ∠ م ك ن= 40° (زوايا في نفس القطعة الدائرية)

(ب) قياس ∠ ز ك ن= 180° - قياس ∠ ت ك ز - قياس ∠ م ك ن (زوايا متجاورة على مستقيم)

= 180° - 54° - 40° = 86°

∴ قياس ∠ ل م ن = 86° (زاويا خارجة عن شكل رباعي دائري)

(جـ) قياس ∠ ك ن ل = قياس ∠ ن ز ك (زاويا في قطع متبادلة)

= 40°

قياس ∠ ك ل ن + قياس ∠ ن ز ك = قياس ∠ ز ك ن (زاويا خارجة لمثلث)

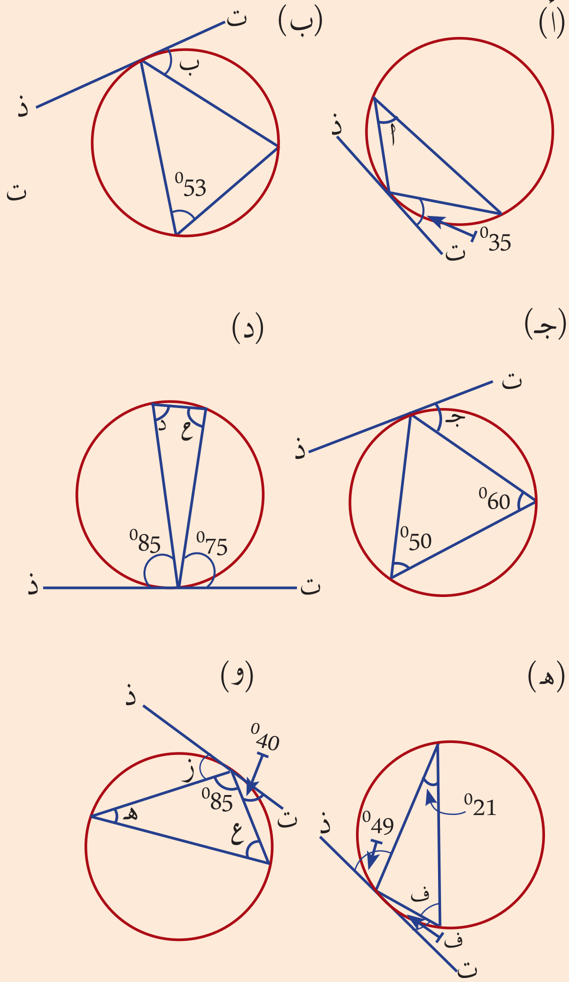
قياس ∠ ك ل ن + 40° = 86°

= 86° - 40°

= 46°

تمرين 8 و:

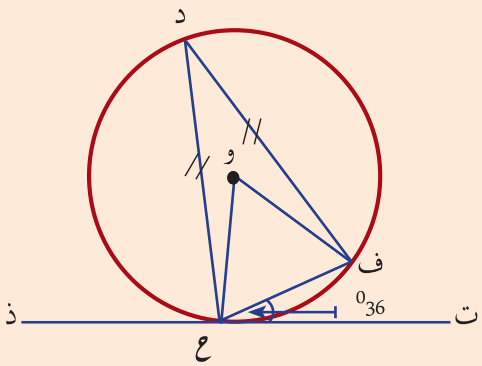
1- إذا كان ذ ت مماساً لكل دائرة من الدوائر الاتية، أوجد قياسات الزوايا المجهولة المشار إليها في كل حالة:



2- ذ ع ت مماس للدائرة التي مركزها و ، إذا كان دع=دف، قياس ∡ف ع ت = 36°، احسب:

(أ) قياس ∡ ع و ف

(ب) قياس ∡ د ع ذ

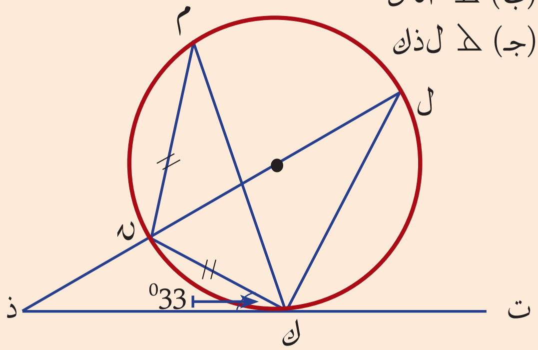


3- في الشكل ت ك مماس للدائرة التي قطرها ل ن، امتد ل ن ليلقى المماس في النقطة ذ، إذا كان ن ك ذ = 33°، م ن = ن ك ، احسب:

(أ) ∡ ذ ل ك

(ب) ∡ م ن ك

(جـ) ∡ ل ذ ك

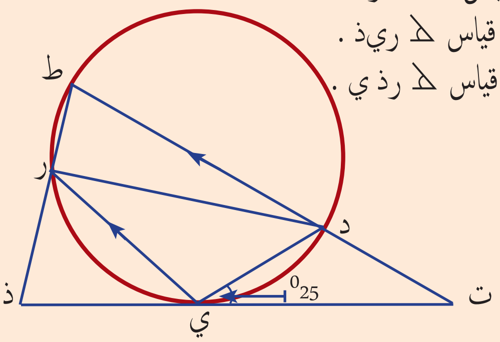


4- ذ ي ت مماس للدائرة، د ط قطر في الدائرة، ت نقطة على امتداد د ط، ط دت//ري، فإذا كان قياس ∡ ذ ي ت= 25° ، احسب:

(أ) قياس ∡ دطر.

(ب) قياس ∡ ريذ .

(جـ) قياس ∡ رذ ي .

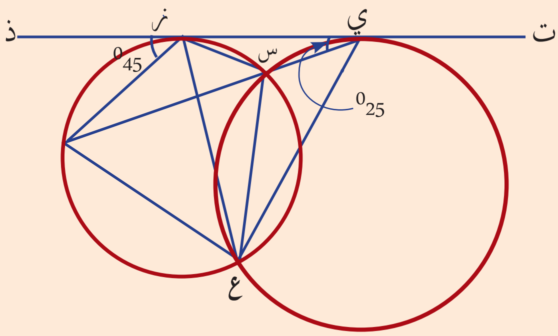


5- ت ي ز ذ مماس مشترك للدائرتين، ي س ص خط مستقيم، إذا كان قياس ∡ ذ ز ص= 45° ، قياس ∡ ز ي س= 21°، احسب:

(أ) قياس ∡ ز ص س.

(ب) قياس ∡ ز ع ي .

(جـ) قياس ∡ س ز ص .

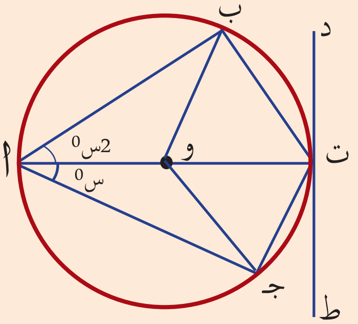


6- في الشكل و مركز دائرة فيها أوت قطر، د ت ط مماس للدائرة، إذا كان قياس ∠ جـأو= س°، قياس ∠ ب أو= 2س°، أوجد قياسات الزوايا التالية بدلالة س:

(أ) ∠ أبو

(ب) ∠ بوجـ

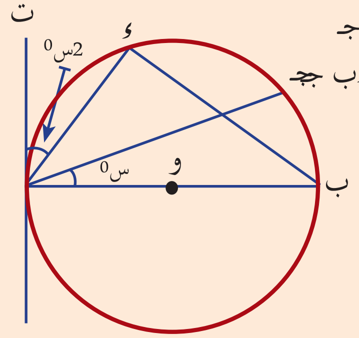
(جـ) ∠ جـ ت ط



7- في الشكل أب قطر في الدائرة ، ت أ مماس للدائرة في أ، قياس ∠ ت أ ء= 2س°، قياس ∠ جـأب= س°، أوجد بدلالة س:

(أ) قياس ∠ أءجـ

(ب) قياس ∠ ءب جـ



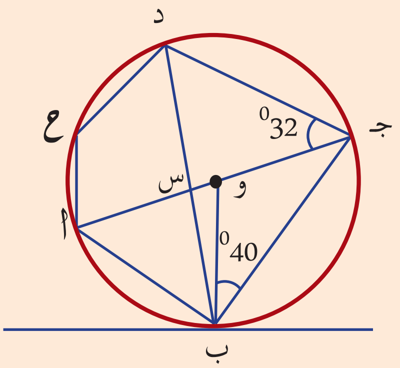
8- في الشكل و مركز دائرة أ، ب ، جـ ، د ،ع خمس نقاط على الدائرة، ت ت مماس للدائرة في ب، أ جـ قطر فيها، دب وتر يقطع القطر في نقطة س. وإذا كان قياس ∠ وب جـ= 40°، قياس ∠ أجـء= 32°، احسب:

(أ) ∠ أب ت

(ب) ∠ جـ أب

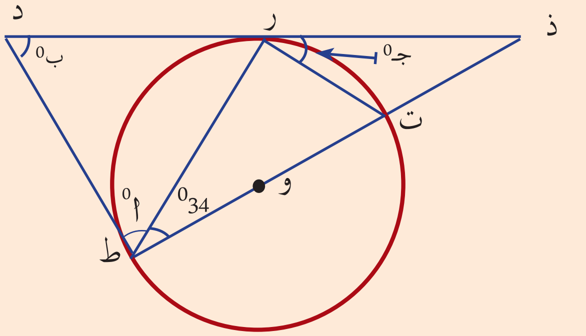
(ب) ∠ أ ع ء

(د) ∠ جـ س ب



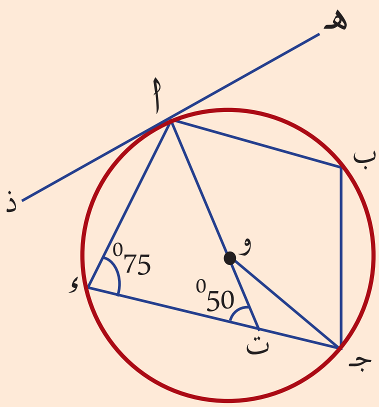
9- المماسان د ط، در رسما في اتجاه الدائرة من نقطة د، طت قطر في دائرة مركزها و، امتد ط ت ليلاقي امتداد المماس در في نقطةذ، إذا كان قياس ∠ رطت= 34°، احسب قياس:

(أ) ∠ أ (ب) ∠ ب (جـ)∠ جـ



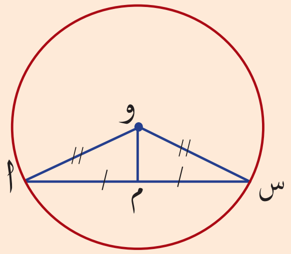
10- في الشكل أ، ب ، جـ ، ء أربع نقاط على الدائرة التي مركزها و، ذ هـ مماس للدائرة في أ ، نصف القطر أو يمتد ليقطع ء جـ في نقطة ت، فإذا كان قياس ∠ أءجـ= 75°، قياس ∠ أتء= 50°، احسب:

(أ) ∠ أب جـ (ب) ∠ ذأء (جـ) ∠ت و جـ



الملخص:

1- في الدائرة التي مركزها و، ووترها أب حيث م نقطة منتصفه:

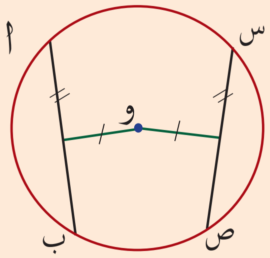


(أ) وم هو العمود المنصف لـ أب .

(ب) Δ وأب مثلث متساوي الساقين.

(جـ) Δ وأب $\equiv$ Δوبم .

2- (أ) الوتران المتساويان في الطول في دائرة يكونان على أبعاد متساوية من مركزها أي أنه إذا كان أب = س ص فإن وم = وه.



(ب) الوتران المتساويان في البعد عن مركز الدائرة يكونان متساويان في الطول أي أنه إذا كان وم = وه فإن أب = س ص.

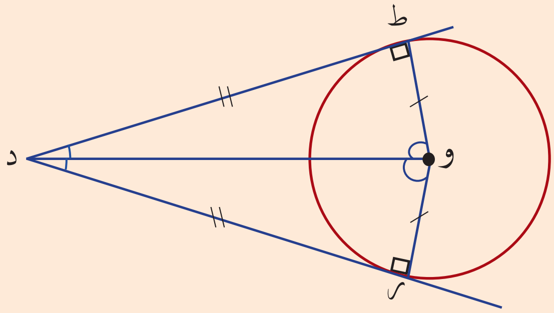
3- (أ) مماس الدائرة عمودي على نصف القطر من نقطة التماس أي أن قياس ∡ وط د = قياس ∡ ور د= 90^0

(ب) المماسان المتساويان لأي دائرة من نقطة خارجها متساويان في الطول أي أنه : دط= در .

(جـ) الخط الواصل بين نقطة تقاطع المماسين إلى مركز الدائرة ينصف.

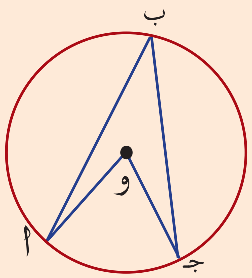
(i) الزاوية بين المماسين، أي أن قياس ∡ ودط = قياس ∡ ودر.

(ii) الزاوية بين نصفي القطر: أي أن قياس ∡ دوط = قياس ∡ دور.



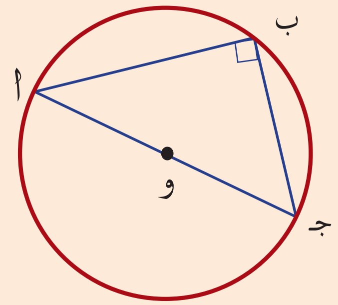
4- قياس الزاوية المركزية ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس.

أي أن قياس ∡ أوجـ = ضعف قياس ∡ أب جـ



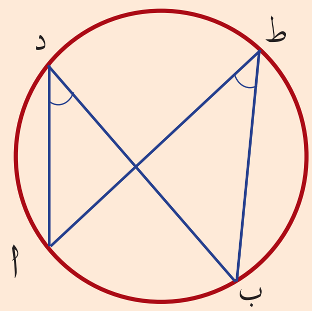
5- الزاوية المرسومة في نصف دائرة هي زاوية قائمة.

∡ أب جـ = 90^0



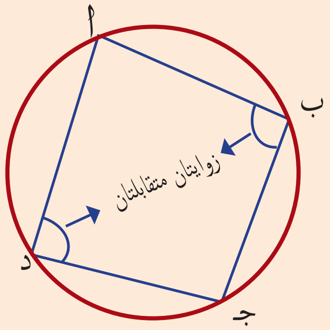
6- الزاويا المرسومة في قطعة واحدة هي زوايا متساوية في القياس

قياس ∡ أدب = قياس ∡ أط ب



7- الزوايتان المتقابلتان في الشكل الرباعي الدائري متكاملتان

قياس ∡ أب جـ + قياس ∡ أدجـ = 180^0

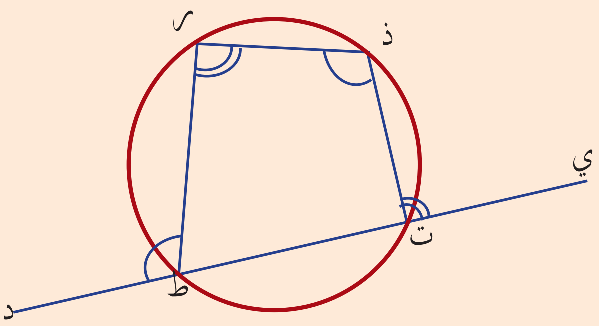


8- قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري

يساوي قياس الزاوية المقابلة للمجاورة لها.

قياس ∡ دطر = قياس ∡ رذت

قياس ∡ ذت ي = قياس ∡ طرذ

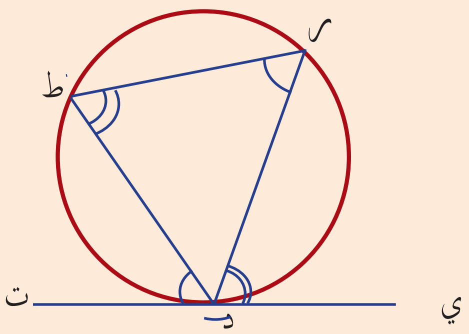


9- قياسات الزاويا في القطع المتبادلة متساوية،

قياس الزاوية الخارجة يساوي قياس الزاوية المحيطية المقابلة لها.

قياس ∡ تدط = قياس ∡ درط

قياس ∡ ي در = قياس ∡ دطر

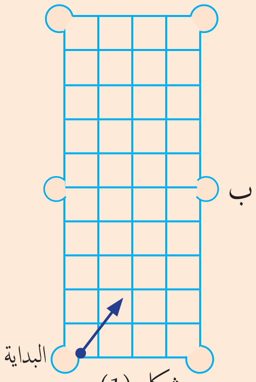


استقصاء الرياضيات

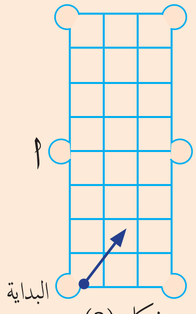
المزيد عن لعبة البليياردو

طاولة البليياردو لها ستة جيوب (فتحات) واحد في كل ركن واثنان في نقطتي منتصف الجانبين الأول

في الشكل (1) هل ستذهب الكرة إلى الجيب المشار إليه بالرمز أ ؟

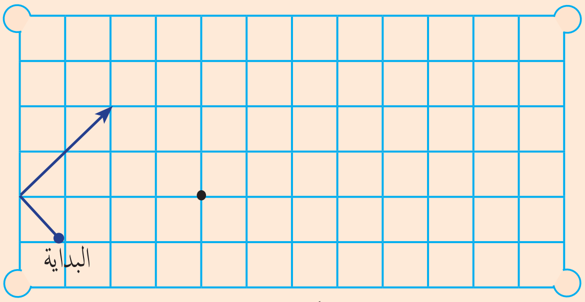


شكل (1)



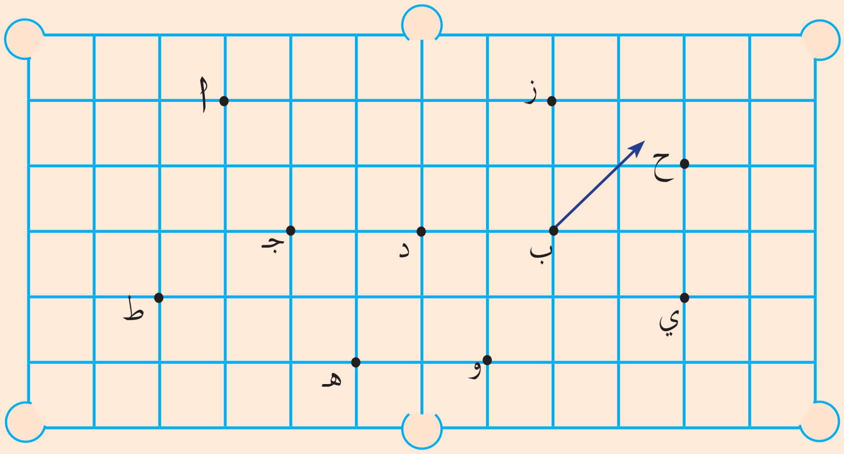
شكل (2)

في الشكل (2) هل ستذهب الكرة إلى الجيب ب؟



شكل (3)

في الشكل (3) هل الكرة ستصطدم بالكرة أ ؟



شكل (4)

في الشكل (4) أي الكرات ستصطدم بالكرة ب ؟

في الشكل (5) أين يجب وضع الكرة بطول الحافة الأطول من هذه المنضدة بحيث تقع عند ضربها بزاوية قياسها 45^0 في جيب ركني بعد أربعة ارتدادات؟.

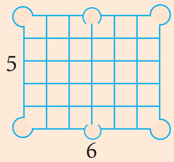
في جميع الاشكال المرسومة، الكرة ضربت وارتدت عن الجوانب بزاوية قدرها 45^0، ماذا يحدث إذا اقتربت بزاوية مختلفة ؟.

الشكل (5) يوضح طريقتين يستطيع ضارب الكرة ب أن يجعلها تصطدم بالكرة أ (إذا لم يكن الاصطدام المباشر ممكنا) .

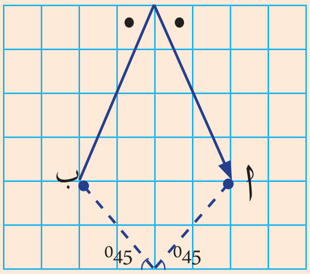
ماذا تلاحظ عن النقاط حيث ترتطم الكرة بالجوانب؟ الخط المنقط يكون زاوية 45^0 مع الجانب عن زاوية المسار الاخر؟.

الان حاول هذا ...

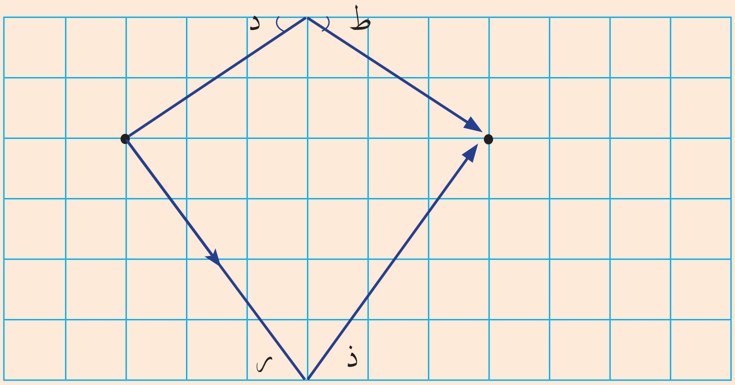
1- ماذا تلاحظ عن النقط التي تلامس الجوانب؟ استخدم المنقلة في قياس الزوايا المشار إليها د ، ط ، ر ، ذ.



شكل (5)

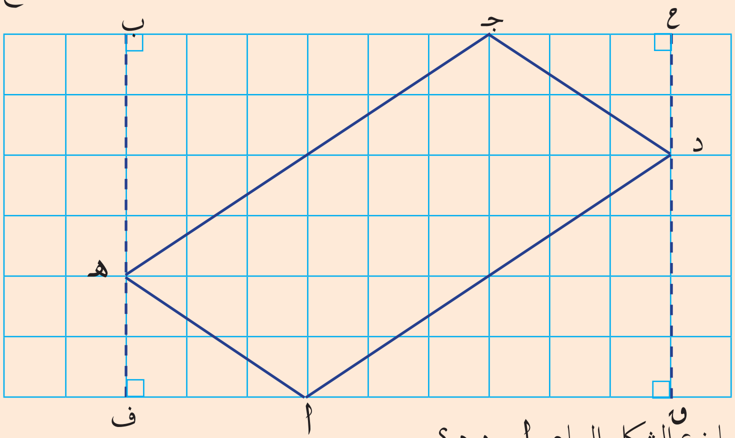


شكل (6)



2- ماذا يحدث عندما تكون الكرة التي سيستخدمها اللاعب في الضرب أبعد مرتين من أحد الجوانب عن كرة الهدف؟

انظر بعناية إلى الشكل المرسوم لاحظ طول المسافات أب ، دع ماذا تلاحظ على المسافات ب جـ ، جـ ع قس المسافة أجـ ، دجـ ، ماذا تلاحظ عن كل زوج؟



- ما نوع الشكل الرباعي أجـ د هـ؟

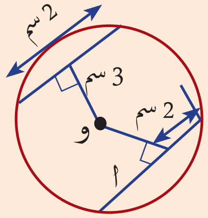
- ما نوع المثلثين أبجـ ، دعجـ ؟

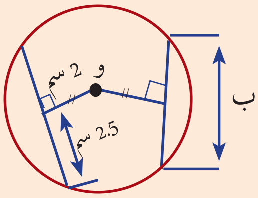
- ما هي النسبة $\frac{\text{مساحة المثلث أبجـ}}{\text{مساحة المثلث دعجـ}}$ ؟

ورقة المراجعة 9:

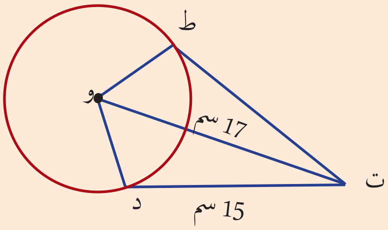
القسم أ : لا تستخدم الآلة الحاسبة في الحل:

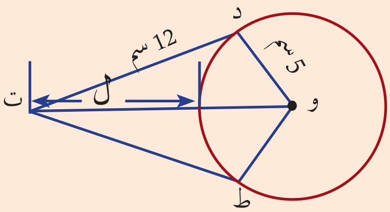
1- (أ) في كل من الأشكال الآتية و مركز الدائرة، أوجد الأطوال المجهولة في كل حالة (جميع الأطوال بالسنتيمتر).



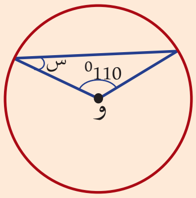


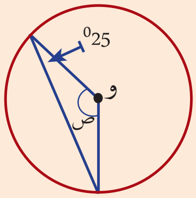
(ب) أوجد الأطوال المجهولة المشار إليها في الشكل التالي عندما يكون ت د ، ت ط مماسين للدائرة التي مركزها و.



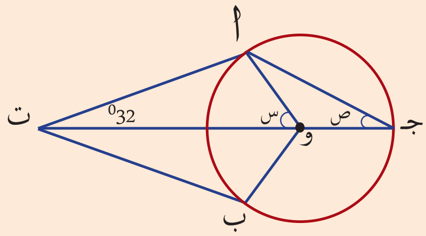


(ب) أوجد قياسات الزوايا المجهولة في كل من الأشكال الآتية عندما تكون و مركز الدائرة.

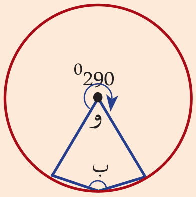


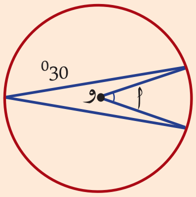


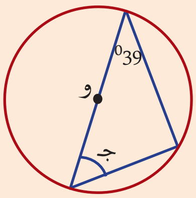
2- (أ) أوجد قياسات الزوايا المجهولة المشار إليها في الشكل عندما يكون ت أ ، ت ب مماسين للدائرة التي مركزها و.

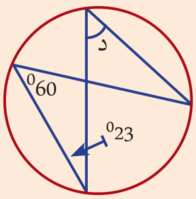


3- أوجد قياسات الزوايا المجهولة المشار إليها في الدوائر التي مركزها و.



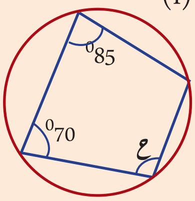




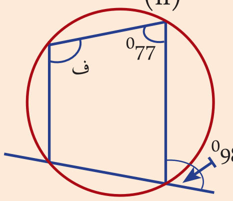


4- (أ) في كل دائرة من الدوائر الاتية أوجد قياسات الزوايا المجهولة المشار إليها.

(i)

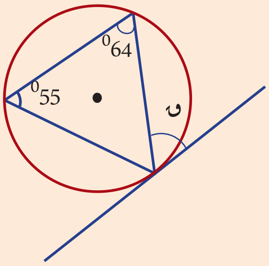


(ii)

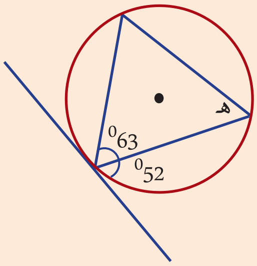


(ب) إذا كان ذ ت مماسا في كل دائرة من الدوائر الأتية، أوجد قياسات الزوايا المجهولة فى كل حالة .

(i)

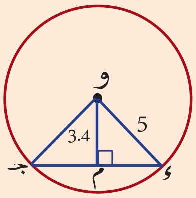


(ii)



القسم ب : يمكن استخدام الآلة الحاسبة

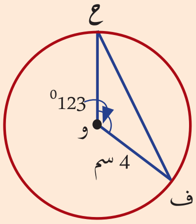
5- (أ) إذا كانت و مركز دائرة وطول نصف القطر = 5 سم و م = 3.4 سم أوجد.



(ب) في الشكل ع ف وتر مقابل للزواية و = 123^0. أوجد:

(i) طول ع ف .

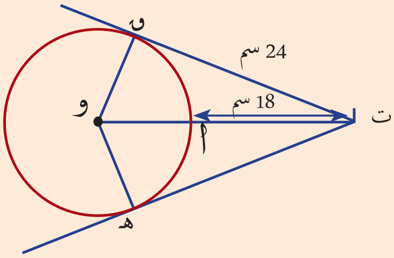
(ii) طول القوس الأكبر ع ف (علما بأن π = 3.142).



6- (أ) ت ن، ت هـ مماسان في الدائرة طول كل منهما 24 سم، إذا كان و مركز الدائرة ، ت أ و خط مستقيم ، وكان طول ت أ = 18 سم احسب قياس:

(i) طول نصف قطر الدائرة .

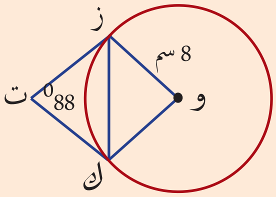
(ii) مساحة الشكل الرباعي ن و هـ ت .



(ب) ت ز ، ت ك مماسان لدائرة مركزها و، طول نصف قطرها 8 سم، إذا كان قياس ∠ ز ت ك = 88^0 ، احسب:

(i) قياس ∠ ز و ك.

(ii) طول الوتر ز ك .

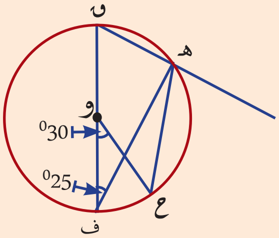


7- ف و ن قطر في دائرة مركزها و، ن هـ امتد إلى نقطة ي، إذا كان قياس ∠ ف و ع = 30^0، قياس ∠ و ف هـ = 25^0، احسب:

(أ) قياس ∠ ف ع هـ .

(ب) قياس ∠ هـ ع و .

(جـ) قياس ∠ ع هـ ي .

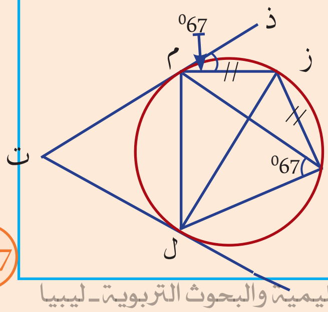


8- ت م، ت ل مماسان للدائرة يتقابلان في نقطة ت فإذا كان ز ك ل م شكلا رباعيا دائريا وكان ز م = ز ك .
قياس ∠ ذ م ز = 43^0، قياس ∠ م ك ل = 67^0، احسب

(أ) قياس ∠ ز م ك .

(ب) قياس ∠ م ل ك .

(جـ) قياس ∠ م ت ل .

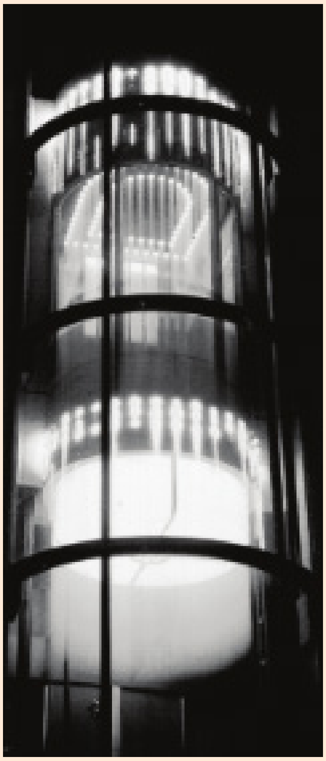


9 الباب التاسع

التحويلات الهندسية

Transformations

9 التحويلات الهندسية Transformations



التحويل هو العملية التي تنقل (تحرك) نقطة أو شكلا (يسمى الأصل) إلى نقطة أو شكلا آخر (يسمى الصورة) وبالرغم من أن التحويلات تغير موضع الشكل فإن الصورة قد تطابق الاصل في الشكل والابعاد ومع ذلك توجد بعض التحويلات التي تحافظ فقط على الشكل، أي أن الصورة تتخذ نفس الشكل مثل الاصل ولكنها تختلف في الحجم. وتوجد تحويلات أخرى تغير الشكل أي يوجد تغير في الشكل، لن نتناول في هذا الكتاب التحويلات التي تغير الشكل.

المصعد المتحرك صعوداَ أو هبوطاً يصور تحويلاً.

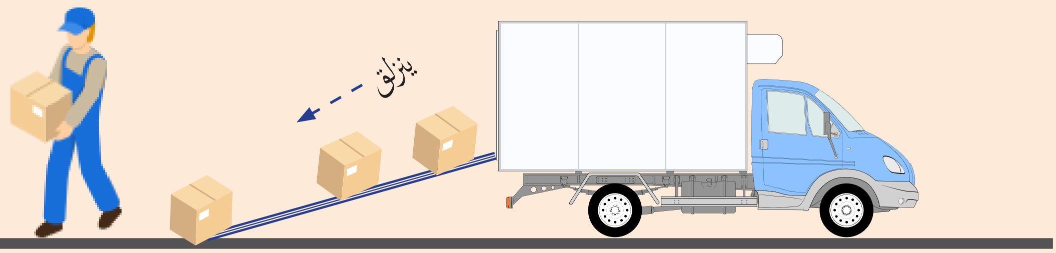
وفي نهاية هذ الفصل سوف تكون قادراً على:

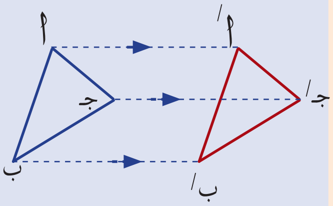
- رسم الصورة بالانتقال.
- رسم الصورة بالإنعكاس وتعيين خط الإنعكاس.
- رسم الصورة بالدوران وتعيين مركز وزاوية الدوران.
- رسم الصورة بمتغير البعد وتعيين مركزه ومعامله.
- رسم الصورة بالإنعكاس وتعيين خط الإنعكاس. إجراء تحويلات مركبة (اختياري)

9 - 1 الانتقال Translation

الانتقال : هو تحويل يحرك كل نقاط المستوى نفس المسافة وفي نفس الاتجاه.

انزلاق صندوق بطول المستوى المائل يعتبر مثالا على الانتقال.





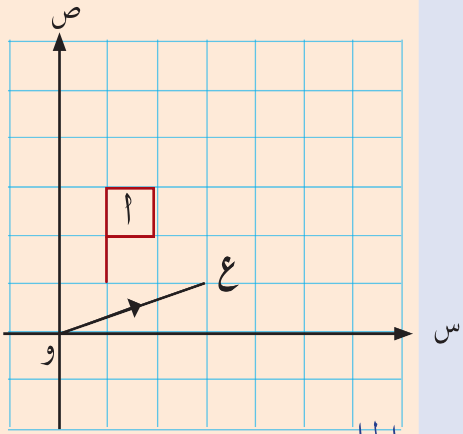
في الشكل الهندسي على اليمين Δ أ ب جـ انزلق إلى Δ أ/ب/ جـ/ في اتجاه أ أ/ لاحظ أن: أ أ/ ،ب ب/ ، جـ جـ/ متوازية ومتساوية في الطول ونقول أن: Δ أ ب جـ تحول إلى Δ أ/ب/ جـ/ بالانتقال. هل المثلثان Δ أ ب جـ ، Δ أ/ب/ جـ/ متطابقان ؟

في هذا الانتقال ... تحولت النقطة أ إلى النقطة أ/ في نفس اتجاه القطعة المستقيمة الموجهة أ أ/ ، خلال المسافة الممثلة بطول أ أ/ . وبالمثل ب ب/ ، جـ جـ/ تمثل المسافات والاتجاهات التي تحركتها النقطة ب أو النقطة جـ إلى النقطة ب/ ، النقطة جـ/ على التوالي. وهكذا نرى أن انتقال نقطة يمكن تمثيله بقطعة مستقيمة موجهة تعطي الاتجاه والمقدار (أي مسافة التحرك) للانتقال.

● ابحث في الإنترنت عن معلومات أكثر عن التحويلات المتنوعة.

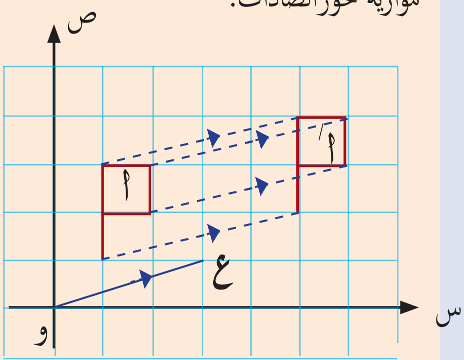
مثال 1 :

ارسم وعنون صورة الشكل المسمى أ بالانتقال في اتجاه القطعة المستقيمة الموجهة و ع



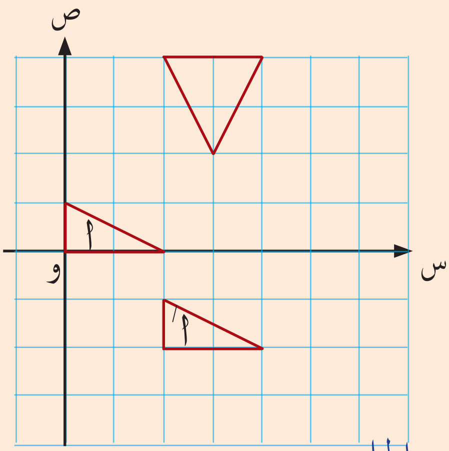
الحل :

لاحظ أن كل نقطة تحركت 3 وحدات لليمين موازية لمحور السينات ووحدة واحدة لاعلى موازية لمحور الصادات.



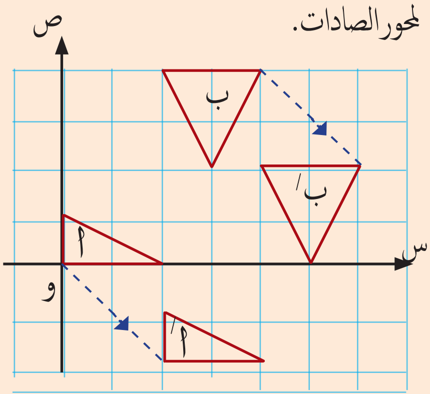
مثال 2 :

Δ أ انتقل إلى Δ أ/ ارسم وعنون صورة ب تبعا لنفس الانتقال .



الحل :

كل نقطة تحركت وحدتين لليمين موازية لمحور السينات ووحدتين لاسفل موازية لمحور الصادات.



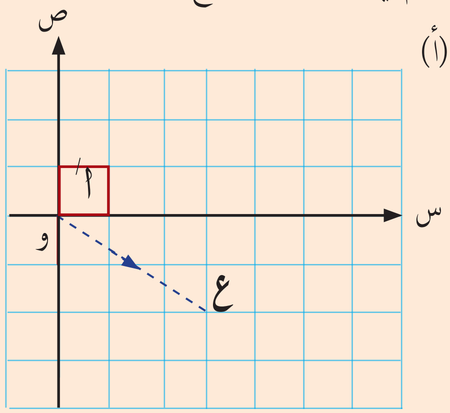
مثال 3 :

مربع أ تحول للمربع أ/ بالانتقال في اتجاه:

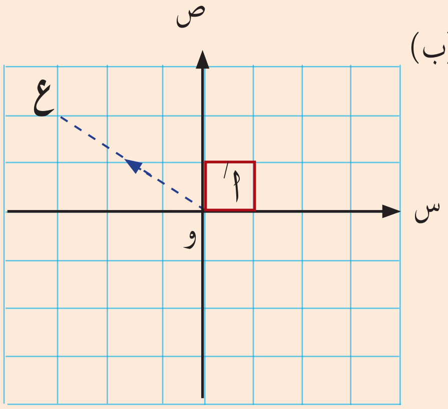
(أ) القطعة المستقيمة الموجهة و ع.   (ب) القطعة المستقيمة الموجهة ع و.

ارسم في كل حالة وعين المربع أ .

(أ)

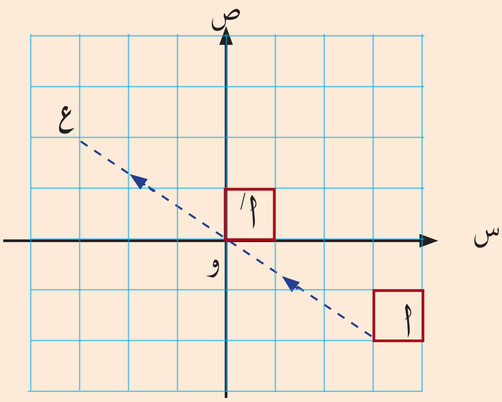


(ب)

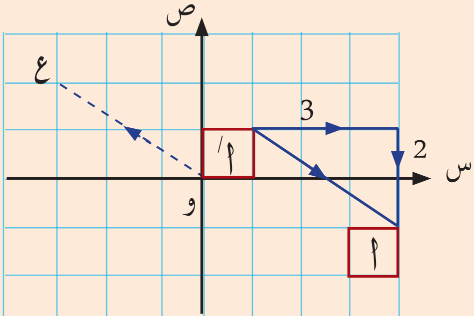


الحل :

لاحظ أن النقطة و هي صورة النقطة ع ، المربع أ/ هو صورة المربع أ الناتجة بالانتقال في اتجاه القطعة المستقيمة الموجهة و ع، لذلك ارسم المربع أ/ مع الركن الأيسر السفلي عند ع كما هو موضح.



(ب) بما أن المربع أ/ هو صورة المربع أ فإننا نعكس الانتقال في اتجاه القطعة المستقيمة الموجهة و ع للحصول على المربع أ.

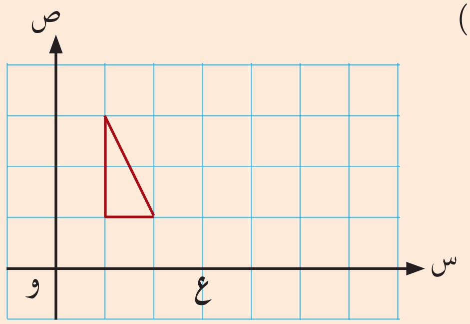


في المثال 3 (أ) ، (ب) القطع المستقيمة والتى تمثل الانتقال لها نفس الاتجاه والمقدار، فقط أوضاعها مختلفة، لاحظ الاجابتين فالمربع أ له نفس المكان في الحالتين مما يشير إلى أن وضع القطعة المستقيمة ليس مهماً.

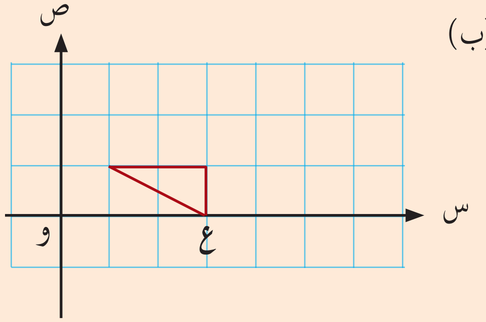
تمرين 9 أ :

1- انقل الأشكال الآتية ثم ارسم وعنون صورها الناتجة عن الانتقالات المعطاة في اتجاه القطعة المستقيمة و ع.

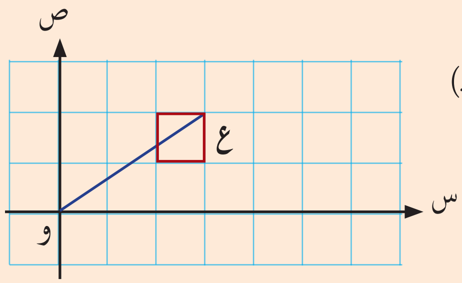
(أ)



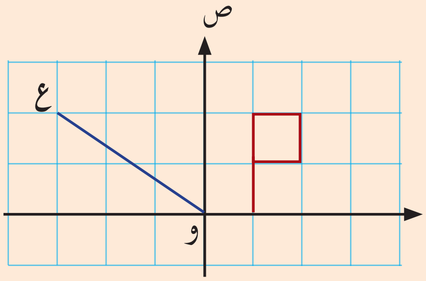
(ب)



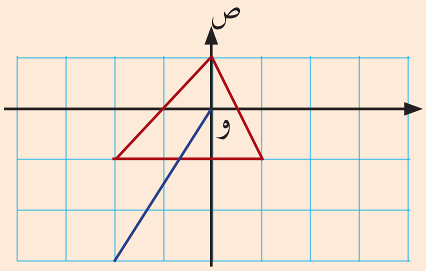
(جـ)

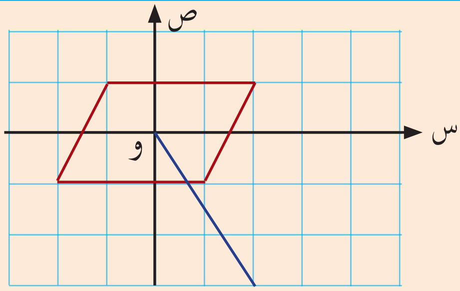


(د)



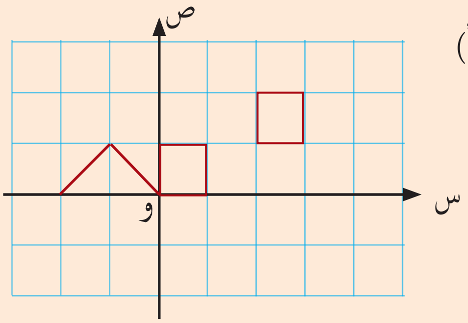
(هـ)



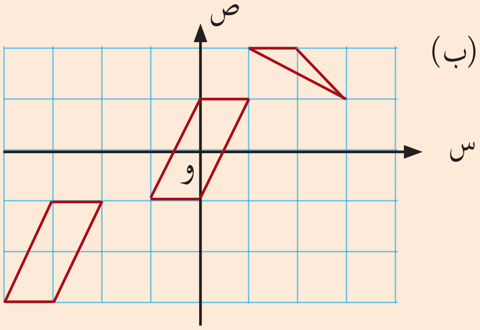


2- انقل الأشكال الآتية ثم ارسم وعنون صورة الموضع ب الذي يرسم بنفس الانتقال مثل الموضع أ .

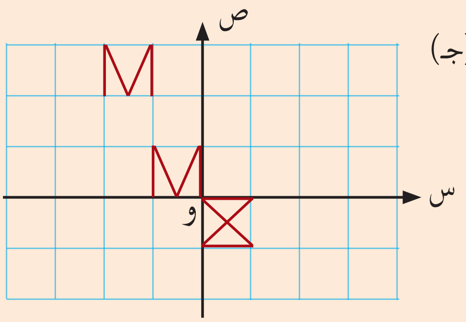
(أ)



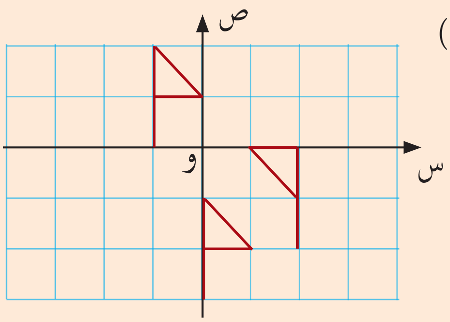
(ب)



(جـ)

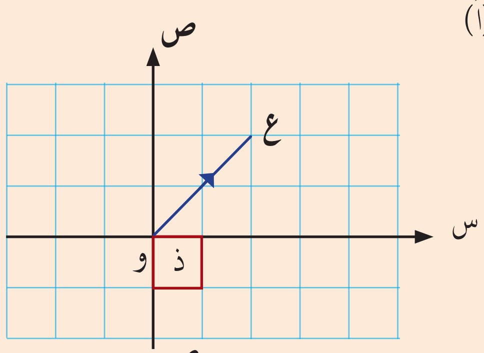


(د)

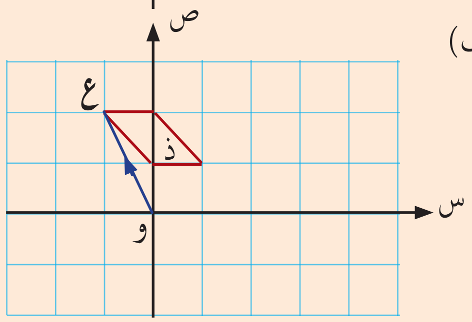


3- الجسم د يرسم إلى صورته د/ بالانتقال في اتجاه القطعة المستقيمة و ع . ارسم وعنون الجسم د.

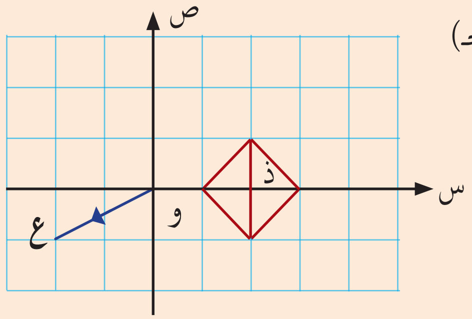
(أ)



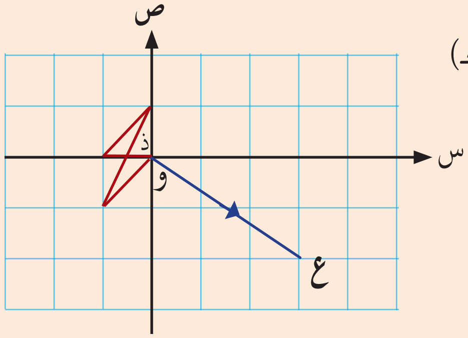
(ب)



(جـ)



(جـ)



4- استخدم النتائج (في الأسئلة من 1 إلى 3) للإجابة عن الأسئلة، إنها سوف تساعدك على اكتشاف خواص الانتقال.

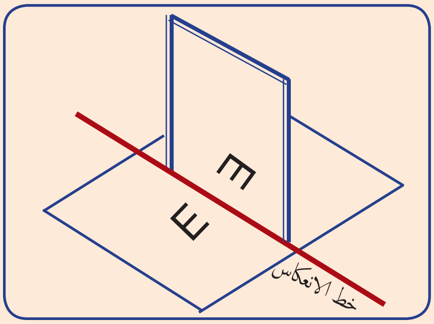
(أ) هل توجد أي نقطة ثابتة (أى النقط التي ترسم إلى نفسها) .

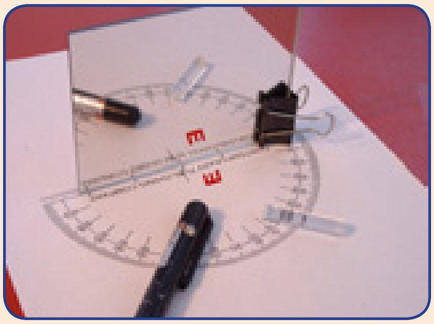
(ب) هل الأشكال ثابتة (أي تظل بدون تغيير)؟

(جـ) هل المساحات (إن وجدت) ثابتة ؟

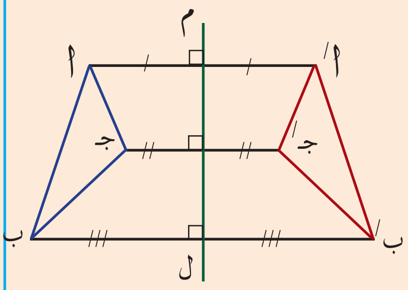
9 - 2 الانعكاس Reflection

الانعكاس: هو تحويل يعكس كل نقط المستوى في خط (يكون في المستوى) يسمى خط المرآة (الانعكاس). لقد درست في العلوم أن الصورة في المرآة تكون على بعد داخل المرآة مساوياً لبعد الجسم أمام المرآة . هذا أهم خواص الانعكاس .





في الشكل المرسوم Δ أ ب جـ رسم إلى Δ أ′ ب′ جـ′ بواسطة الانعاكس في الخط م ل .
لو تثبت الورقة على طول الخط م ل فإن Δ أ′ ب′ جـ′
سوف ينطبق تماما على Δ أ ب جـ الخط م ل
هو خط المرآة (الانعاكس) أو محور الانعاكس
وهو المنصف العمودي (لكل من
أ أ′ ، ب ب′ ، جـ جـ′ .
هل Δ أ ب جـ، Δ أ′ ب′ جـ′ متطابقان؟

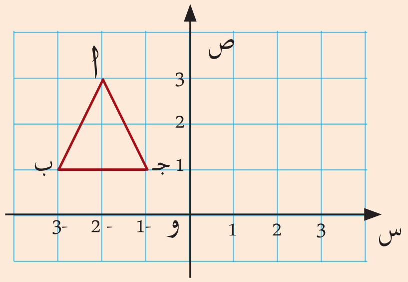


ملاحظات Notes

مثال 4 : اعكس Δ أ ب جـ في:

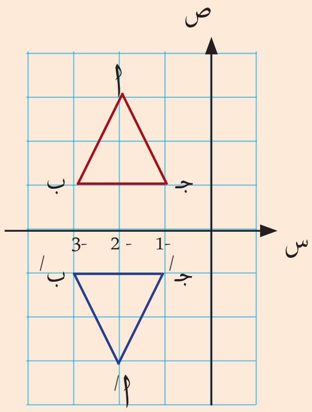
(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات.

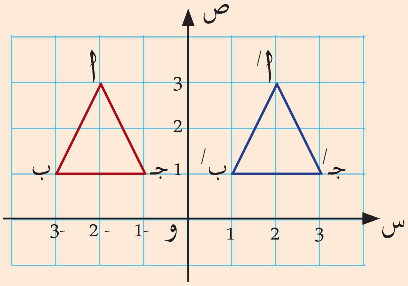
(جـ) المستقيم س= 2 (د) المستقيم ص=س



- مثال 4 - (د) اختياري.

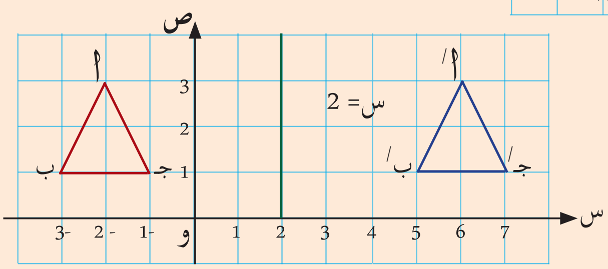
الحل:



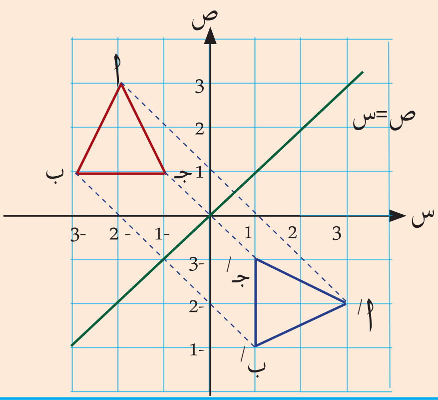


- عنون رؤوس الصور بعناية في (ب) إذا كانت الصورة مسماة كالاتي:

ماهو التحويل الذي حدث؟

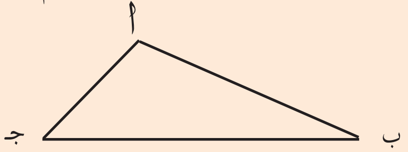


- ماذا تلإحظ بالنسبة للقطعة المستقيمة الافقية ب جـ لو انعكست في الخط ص= س ؟

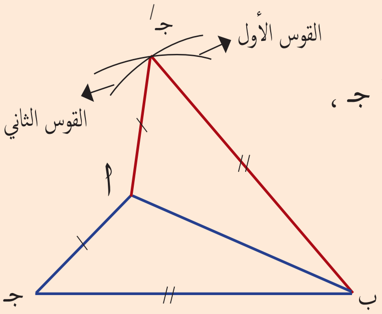


مثال 5 :

يبين الشكل المرسوم قطعة من الورق ثُنيت على طول خط تماثلها أ ب اكمل الرسم ليبين الشكل الاصلي لقطعة الورق.



الحل:



مستخدما الفرجار، اركز عند أ وبفتحة تساوي أ جـ ،

ارسم قوسا كما هو مبين ،،،

وبالمثل اركز عند ب وبفتحة تساوي ب جـ ،

ارسم قوسا آخر ليقطع القوس الأول ،

نقطة تقاطع القوسين تعطينا الصورة جـ/.

صل النقطتين أ ، ب بالنقطة جـ/ لأكمال الشكل الأصلي.

ملوحظة:

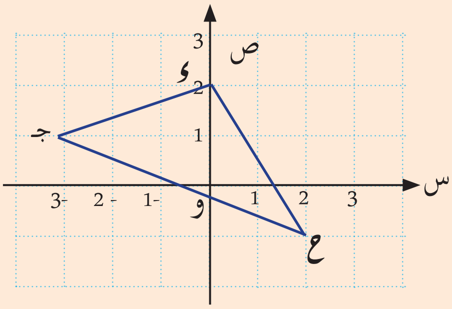
- اعتمد هذا التكوين على مفهوم تطابق المثلثات: Δ أ ب جـ $\equiv$ Δ أ/ ب/ جـ/
أ ب هو محور الانعاكس.
Δ أ ب جـ هو صورة Δ أ/ ب/ جـ/ بواسطة الانعاكس عند أ ب اختبر حلك بالثني بطول أ ب .

نشاط : لدراسة الانعاكس مستخدما لوحة جيومتر Geopmeter's Skethpad

الخطوات:

1- استخدم Select Tool وانقر Graph من Menu Bar واختبر Show Grid .

2- استخدم Straightedge Tool وعين حيث جـ (-3 ، 1) و ء (0 ، 2) ع (2 ، -1).



3- استخدم Text Tool لتعيين الرؤوس.

4- استخدم Select Tool لرسم محور السينات ثم اضغط Transform من Menu Bar واختر (×) Mark Miror .

5- استخدم Select Tool لتعيين ثم انقر Transform من Menu Bar واختر Reflect.

6- استخدم Select Bar وانقر Display على Menu Bar واختر Colour ، واختر اللون الذي تفضله للصورة.

7- استخدم Text Tool لتعنون الرؤوس .

8- انقل واكمل الجدول التالي:

النقطة الأصلية	صورة النقطة
جـ (-3 ، 1)	
ء (0 ، 2)	
ع (2 ، -1)	

9- اكتب صورة أي نقطة (أ ، ب) عندما تنعكس في محورالسينات.

10- أجر الآن انعاكسا ثانياً.

مستخدما تخطيط جديدا من لوحة جيومتر، كرر الخطواتالسابقة ما عدا الخطوة 4 والخطوة 5 اللتين سوف تعدلان كالآتي:

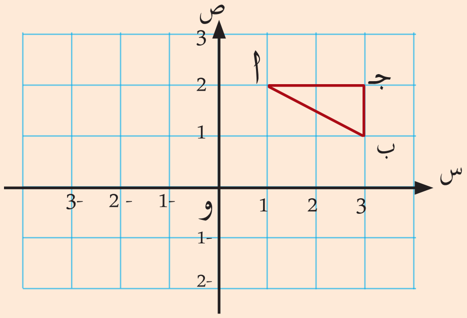
الخطوة (4) استخدم Select Tool لتعيين محور الصادات ثم انقر Menu Bar من Transform Menu Bar ثم اختر Y Mark Miror .

الخطوة (9) دون صورة أي نقطة (أ ، ب) عندما تنعكس في محور الصادات.

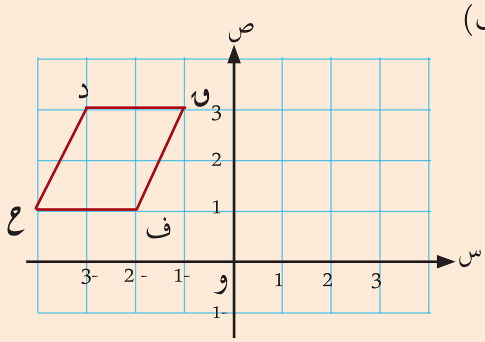
تمرين 9 ب :

1- انقل الأشكال الأتية ثم ارسم وعنون الصور عندما يكون الانعاكس في محورالسينات.

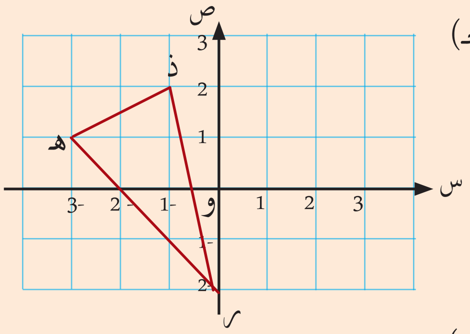
(أ)



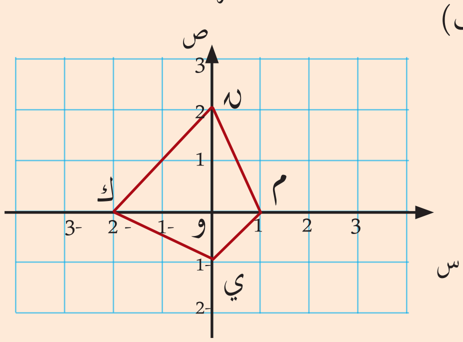
(ب)



(جـ)



(ب)



2- انقل أشكال السؤال الاول ثم ارسم وعنون الصور عندما يكون الانعاكس في محور الصادات.

3- انقل الأشكال من السؤال الاول وارسم صورها عندما تنعكس في المستقيم ص = س.

4- انقل الأشكال من السؤال الاول وارسم صورها عندما تنعكس في المستقيم ص =- س.

5-استخدم نتائجك فى الأسئلة من الأول إلى الرابع للإجابة على الأسئلة التالية، إنها سوف تساعدك على اكتشاف خواص الانعاكس.

(أ) أين توجد النقطة الثابتة ؟

(ب) هل الاشكال ثابتة؟

(جـ) هل المساحات ثابتة ؟

6- مستخدما نتيجة السؤال الاول 2 (أ) انقل ثم أكمل الجدول الآتي.

النقطة الأصلية	صورة النقطة
أ (1 ، 2)	
ب (3 ، 1)	
جـ (3 ، 2)	

دون صورة أي نقطة (أ ، ب) عندما تنعكس في محور الصادات.

7-مستخدما نتيجة السؤال الاول 2 (أ) انقل ثم أكمل جدولا مماثلا لجدول السؤال السادس دون صورة أي نقطة (أ ، ب) عندما تنعكس في محور الصادات.

8-مستخدما نتيجة السؤال الاول 3 (أ) انقل ثم أكمل جدولا مماثلا لجدول السؤال السادس دون صورة أي نقطة (أ ، ب) عندما تنعكس في المستقيم ص = س.

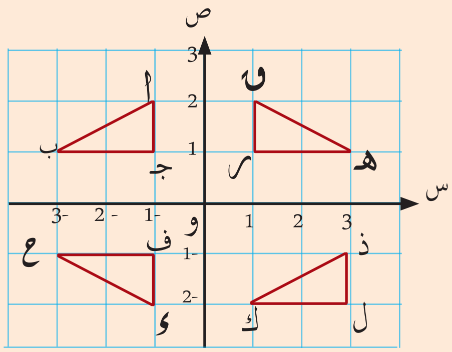
9- حدد إحداثيات لأي نقطة (أ ، ب) عندما تنعكس في المستقيم ص = - س

10- في الحالات التالية اشرح بالتفصيل التحويل الوحيد الذي يرسم:

(أ) أ ب جـ إلى ء ع ف

(ب) أ ب جـ إلى ن هـ ر

(جـ) أ ب جـ إلى ذ ك ل



11- اذكر معادلة الصور الناتجة عندما تنعكس المستقيمات التالية:

(i) س = 3 (ii) س = -4

(iii) س = 1 (iv) س = -2

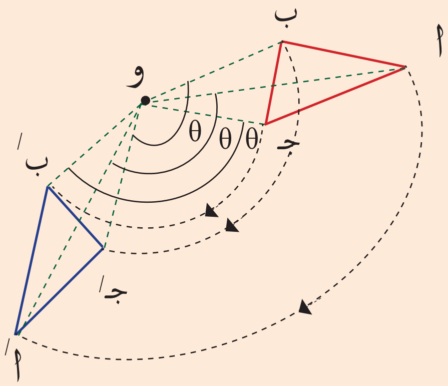
(v) ص = س (vi) ص = - س

في: (أ) محور السينات (ب) محور الصادات

9 - 3 الدوران Rotation

يمكن مشاهدة الدوران في أنشطة الحياة اليومية مثل مروحة السقف الدوارة حول نقطة، والباب الدوار حول المحور، وفي الواقع أنت تدير صفحات الكتاب حول كعبه، وسوف نقتصر في دراستنا على الدوران في الشكل المستوي.

الدوران هو تحويل يدير جميع نقط المستوى حول نقطة ثابتة تسمى مركز الدوران خلال زاوية معلومة في اتجاه عقارب الساعة أو ضد عقارب الساعة.



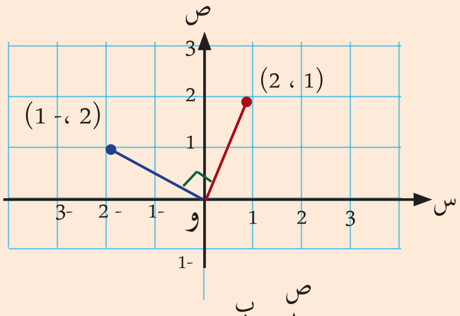
كمثال Δ أ ب جـ يرسم إلى Δ أ′ب′جـ′ بواسطة دوران بزاوية θ في اتجاه عقارب الساعة، الزاوية θ تسمى زاوية الدوران لاحظ أن ∠ أ و أ′ = ∠ ب و ب′ = ∠ جـ و جـ′ = θ

بينما و أ = و أ′ ، و ب = و ب′ ، و جـ = و جـ′ ،

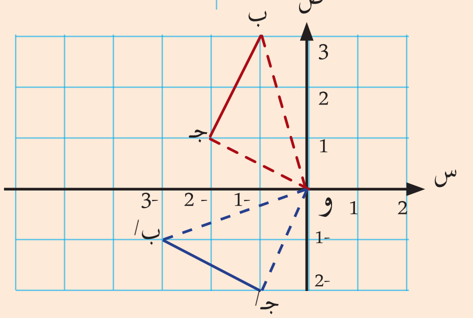
هل Δ أ ب جـ، Δ أ′ب′جـ′ متطابقان؟

بعض أمثلة الدوران:

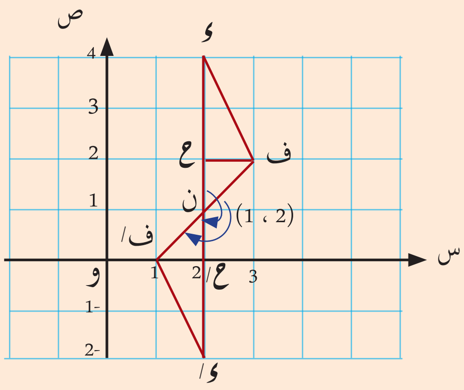
(أ) يبين الشكل المرسوم أن أ رسمت إلى أ′ بواسطة دوران حول نقطة الاصل بزاوية 90^0 في اتجاه عقارب الساعة.



(ب) القطعة المستقيمة ب جـ رسمت إلى ب′ جـ′ بدوران حول نقطة الاصل بزاوية 90^0 ضد عقارب الساعة.

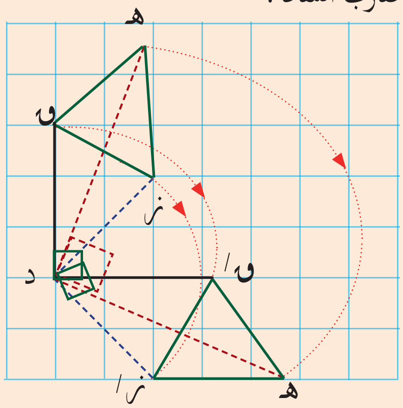


(جـ) Δ ء ع ف رسم إلى Δ ء′ع′ف′ بدوران حول النقطة ن (2 ، 1) بزاوية 180^0 لاحظ أن الدوران 180^0 مع عقارب الساعة يكافىء الدوران 180^0 ضد عقارب الساعة حول نفس النقطة.



مثال 6 :

ارسم صورة $\triangle$ ن هـ ر بواسطة دوران حول النفطة الثابتة د وزاوية 90^0 في اتجاه عقارب الساعة.



الحل:

(أ) صل النقطة ن بالنقطة د.

(ب) اركز بسن الفرجار في النقطة د بفتحة تساوي طول ن د

ارسم قوسا في اتجاه عقارب الساعة ابتداءً من ن.

(جـ) ارسم الخط دن/ ليقطع القوس عندن/ بحيث تكون ∠ ن هـ ن/ = 90^0

(د) كرر كل الخطوات السابقة مع النقطتين هـ ر لتعيين النقطتين هـ/ ر/ على التوالي.

نشاط :

لدراسة الدوران مستخدما لوحة جيومتر Geopmeter's Skethpad

الخطوات:

1- استخدم Select Tool وانقر Graph من Menu Bar واختبر Show Grid .

2- استخدم Straightedge Tool وعين $\triangle$ جـ ءع حيث جـ (1 ، 2) وء(1 ، -1) ع (3 ، 0).

3- استخدم Select Tool لتعيين الرؤوس:

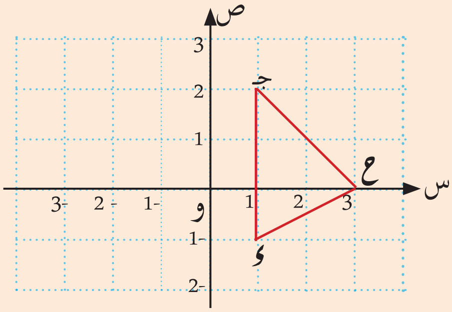
4- استخدم Select Tool لتحديد نقطة الاصل ثم انقر Transform من Menu Bar واختر Mark Center (A) .

5- استخدم Select Tool لتعيين $\triangle$ جـ ءع ثم انقر Transform من Menu Bar واختر Reflect.- ثم اكتب 90) لعمل دوران 90^0 في عكس عقارب الساعة).

6- استخدم Select Tool لتنقر Display على Menu Bar واختر تلوين ، اختر اللون الذي ترغبه للصورة.

7- استخدم Text Tool لتعيين الرؤوس جـ/ء/ع/ .

8- انقل الجدول التالي:



النقطة الأصلية	صورة النقطة
جـ (1 ، 2)	
ء(1 ، -1)	
ع (3 ، 0)	

9- دون صورة أي نقطة (أ/ ، ب/) عندما تدور حول نقطة الأصل 90^0 في عكس عقارب الساعة.

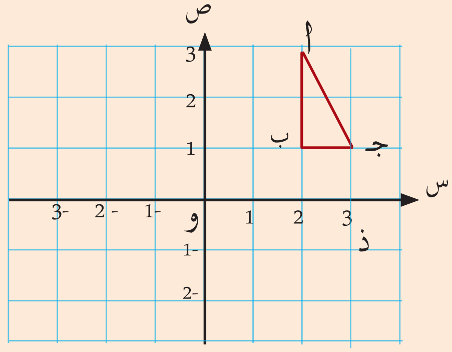
10- أجر الآن الدورانين الثاني والثالث وكرر في كل مرة الخطوات السابقة ما عدا الخطوات الخامسة والتاسعة اللتين سوف تعدلان كالآتي:

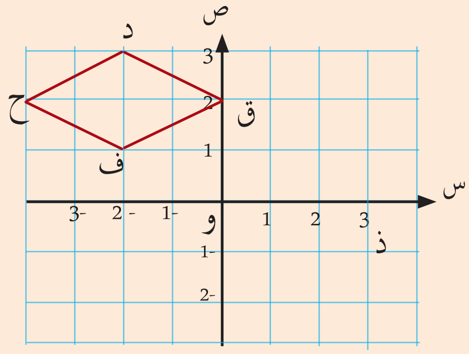
بالنسبة للدوران الثاني: عدل آخر سطر في الخطوة الخامسة إلى (اكتب 180^0) والخطوة التاسعة إلى (اكتب صورة أي نقطة (أ ، ب) عندما تدور حول نقطة الأصل 180^0).

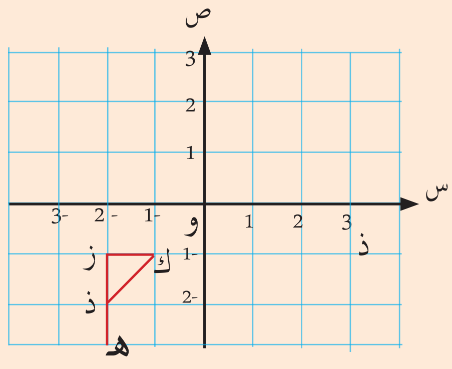
بالنسبة للدوران الثالث: عدل آخر سطر في الخطوة الخامسة إلى (اكتب 270^0) والخطوة 9 إلى (اكتب صورة أي نقطة (أ ، ب) عندما تدور حول نقطة الأصل 90^0 مع عقارب الساعة).

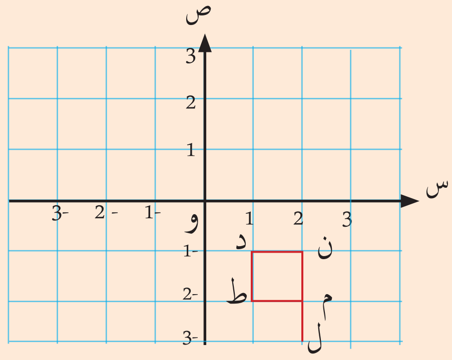
تمرين 9 ج :

1- انقل الأشكال الآتية ثم ارسم وعنون الصور وفق الدوران حول نقطة الاصل المبين.

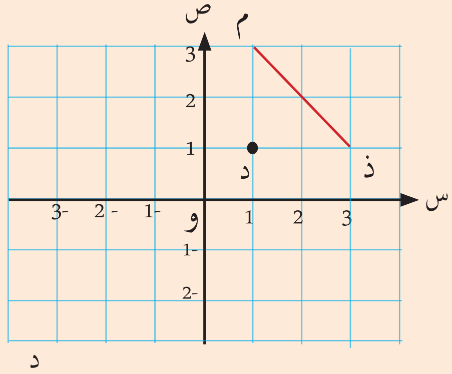


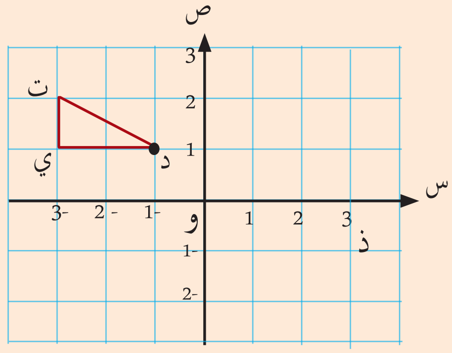


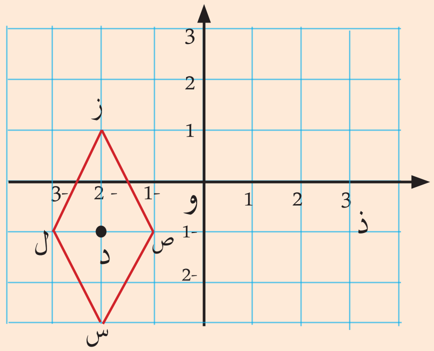


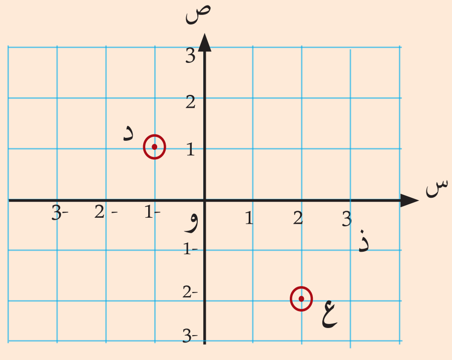


2- انقل الأشكال الآتية ثم ارسم وعنون الصور وفق الدوران حول نقطة د المبينة.









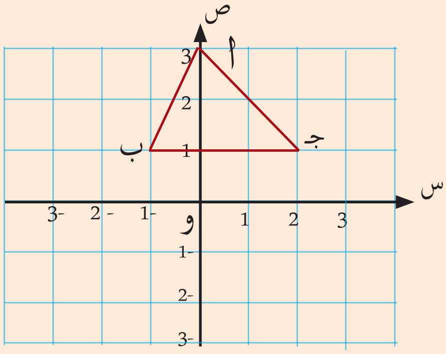
3 - استخدم نتائج السؤالين الأول والثاني في الإجابة عن الأسئلة الآتية ستساعدك على اكتشاف خواص الدوران:

(أ) هل توجد نقطة ثابتة ؟

(ب) هل توجد أشكال ثابتة ؟

(جـ) هل توجد مساحات (إن وجدت) ثابتة ؟

4- انقل الأشكال الآتية ثم ارسم وعين صورته وفق الدوران حول نقطة الأصل في الحالات الآتية:



(أ) الدوران بزاوية 90^0 مع عقارب الساعة.

(ب) الدوران بزاوية 180^0 .

(جـ) الدوران بزاوية 270^0 مع عقارب الساعة (أي الدوران بزاوية 90^0 ضد عقارب الساعة.

5- مستخدما نتائج السؤال الرابع ، انقل و أكمل الجدول الآتية:.

الدوران بزاوية 90^0 مع عقارب الساعة	
النقطة الاصلية	صورة النقطة
أ (0 ، 3)	
ب (-1 ، 1)	
جـ (2 ، 1)	

اكتب صورة أي نقطة (أ ، ب) بالدوران حول نقطة الأصل 90^0 مع عقارب الساعة

الدوران بزاوية 180^0 مع عقارب الساعة	
النقطة الاصلية	صورة النقطة
أ (0 ، 3)	
ب (-1 ، 1)	
جـ (2 ، 1)	

اكتب صورة أي نقطة (أ ، ب) بالدوران حول نقطة الأصل 180^0 مع عقارب الساعة

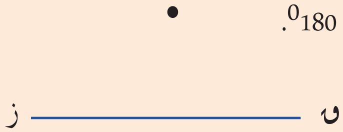
الدوران بزاوية 270^0 مع عقارب الساعة	
النقطة الاصلية	صورة النقطة
أ (0 ، 3)	
ب (-1 ، 1)	
جـ (2 ، 1)	

اكتب صورة أي نقطة (أ ، ب) بالدوران حول نقطة الأصل 270^0 مع عقارب الساعة

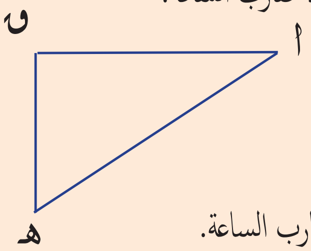
6- استشف الأشكال الآتية وباستخدام المسطرة والفرجار والمنقلة ارسم الصورة الناتجة من الدوران حول النقطة د.

(أ) دوران 90^0 ضد عقارب الساعة.

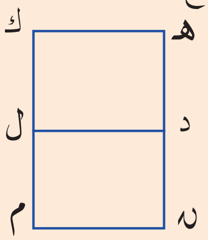
(ب) دوران 180^0.



(جـ) دوران 270^0 ضد عقارب الساعة.



(د) دوران 90^0 مع عقارب الساعة.

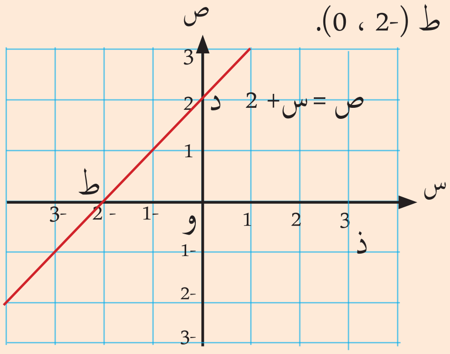


7- أوجد معادلة صورة المستقيم ص = س+ 2 عندما يدور 90^0 مع عقارب الساعة حول:

(أ) نقطة الأصل.

(ب) النقطة د (0 ، 2).

(جـ) النقطة ط (-2 ، 0).



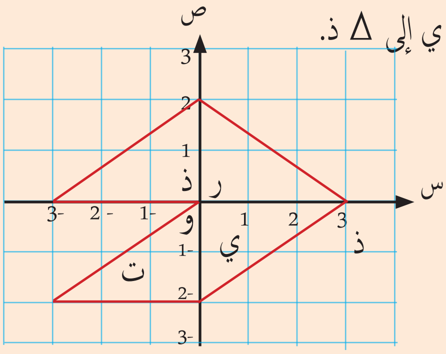
8- اشرح بالتفصيل التحويل الوحيد الذي يرسم:

(أ) Δ ر إلى Δ ذ.

(ب) Δ ي إلى Δ ر.

(جـ) Δ ذ إلى Δ ت.

(د) Δ ي إلى Δ ذ.

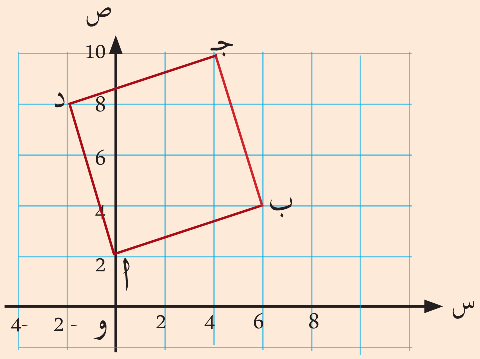


9- في الرسم التالي و نقطة الأصل، أ هي النقطة (0 ، 2) ب هي النقطة (6 ، 4) .

(أ) ارسم أ ب إلى ع ف بالانتقال 3 وحدات موازيا للاتجاه الموجب لمحور السينات اكتب احداثيات ع واحداثيات ف.

(ب) أوجد معادلة المستقيم أ ب.

(جـ) أ ب جـ ء مربع، اشرح بالتفصيل التحويل الذي يرسم أ ب إلى أ د.



10- أ ب جـ ء هـ ع ف ن هـ مثمن منتظم مرسوم داخل دائرة مركزها و.

(أ) اشرح بالتفصيل التحويل الذي يرسم :

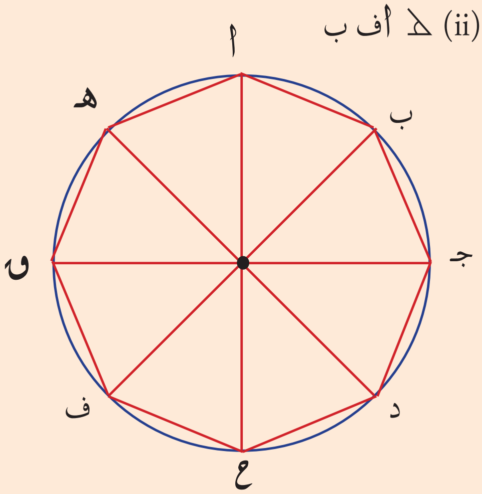
(i) Δ أ ب و إلى Δ أ هـ و .

(ii) Δ أ ب و إلى Δ جـ ء و .

(ب) أوجد مع البرهان قياس كل من.

(i) ∡ أو ب

(ii) ∡ أف ب

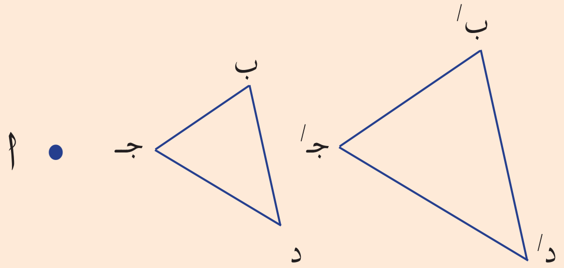


9 - 4 التكبير Enlargment

لقد درست محافظة كل من الانتقال والانعاكس والدوران على شكل وحجم الجسم الأصلي وينتج عن ذلك مساحات ثابتة هذه التحويلاتتسمى أيزومترية (متكافئة) سندرس في هذا الفصل تحويلاً يسمى التكبير وهو تحويل غير متكافيء.

الصور الشمسية تكون في أغلب الأحيان متغيرة الأبعاد عن الصورة السالبة حيث تتخذ الصورة نفس الشكل الصورة السالبة ولكنها تكون بمقياس تكبير من ناحية أخرى عندما يرسم مهندس معماري المسقط الأفقي لمبنى فإنخ يرسمه مشابهاً للمبنى ولكن بمقياس مُصغَّر.

نشاط : لدراسة التكبير



(أ) نشاط باستخدام لوحة جيومتر

1- مستخدما لوحة جيومتر افتح خطا جديدا.

2- استخدم Point Tool وعين النقطة أ على يمين الشاشة.

3- استخدم Text Tool لتعيين النقطة أ.

4- استخدم Straightedge Tool لرسم Δ ب جـ د (في منتصف الشاشة).

5- استخدم Select Tool لتحديد النقطة أ، انقر Transform من Menu Bar واختر "أ" Mark Center .

6- استخدم Select Tool لتحديد Δ ب جـ د انقر Transform من Menu Bar واختر Dilate ثم اكتب 2- لـ New .1- لـ Old في The Scale factor box وبعد ذلك انقر OK (صورة Δ ب/ جـ/ د/ سوف تظهر).

7- استخدم Text Tool لتعيين صور النقط ب/ جـ/ د/ .

8- استخدم Text Tool لتحديد القطعة المستقيمة ب جـ ثم انقر Measure من Menu Bar واختر Length (طول ب جـ سوف يظهر كالآتي= mBC) كرر هذا الإجراء مع القطعة المستقيمة ب/ جـ/ .

9- استخدم Text Tool وانقر Measure من Menu Bar واختر Calculate (آلة حاسبة سوف تظهر على الشاشة).

انقر على mBC / (على شاشة الآلة الحاسبة) ثم mBC ثم OK على التوالي لاحظ قيمة: $\dfrac{mB'C'}{mBC}$

10- كرر الخطوة (9) (أ) القطعتين المستقيمتين جـ/ د/. جـ د.

(ب) القطعتين المستقيمتين ب/ د/ ، ب د.

11- استخدم Select Tool وانقر Display من Menu Bar واختر Colours . اختر لونين مختلفين للمثلثين ب جـ د ، ب/ جـ/ د/ .

12- استخدم Straightedge Tool لرسم القطعة المستقيمة أ ب، انقر Measure من Menu Bar واختر Length، ثم ارسم القطعة المستقيمة أ/ ب/ اضغط Measure من Menu Bar واختر Length، وبعد ذلك استخدم Select Tool وانقر Measure من Menu Bar واختر Calculate)انقر على mAB ثم / . ثم mAB ثم OK على التوالي ولاحظ قيمة النسبة $\dfrac{mAB}{mAB}$.

13- كرر الخطوة (12) (أ) القطعتين المستقيمتين أ جـ ، أ جـ/ .

(ب) القطعتين المستقيمتين أ د ، أ د/ .

14- انقل ثم اكمل الآتي: $\dfrac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الجسم}} = \dfrac{\text{ب/ جـ/}}{\text{ب جـ}} = \dfrac{\quad}{\text{جـ د}} = \dfrac{\text{ب/ د/}}{\quad} = 2$

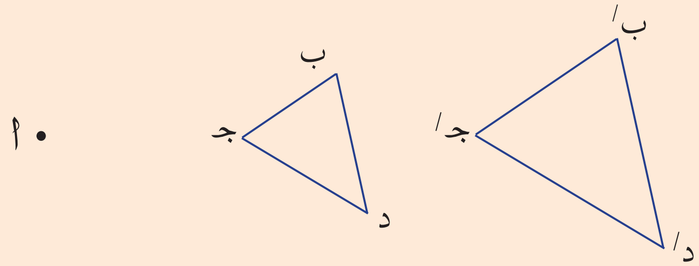
15- انقل ثم اكمل الآتي: $\dfrac{\text{مسافة الصورة}}{\text{مسافة الجسم الأصلية}} = \dfrac{\text{أ ب/}}{\text{أ ب}} = \dfrac{\text{أ جـ/}}{\quad} = \dfrac{\quad}{\text{أ د}} = 2$

على ذلك يمكننا تعميم هذا الاستنتاج:

لأي تكبير يكون معامل القياس= $\dfrac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الجسم المناظر}} = \dfrac{\text{مسافة الصورة}}{\text{مسافة الجسم المناظر}}$

(ب) نفس النشاط ولكن باستخدام المسطرة والقلم

انسخ هذين المثلثين وارسم مستقيمات تمر بالرؤوس المتناظرة مثلا من ب/ إلى ب.



إذا رسمت المستقيمات بشكل صحيح سوف تجد أنها تتقابل عند نقطة وحيدة أ هي التي تسمى مركز التكبير.

(أ) قس (i) ب جـ ، جـ ء ، ب جـ

(ii) ب/ جـ/ ، جـ/ ء/ ، ب/ جـ/

(ب) احسب $\frac{\text{ب/ جـ/}}{\text{ب جـ}}$ ، $\frac{\text{جـ/ د/}}{\text{جـ ء}}$ ، $\frac{\text{ب/ ء/}}{\text{ب ء}}$

سوف تجد أن جميع هذه النسب تساوي 2 ، مما يشير إلى أن المثلثين متشابهان وأن أطوال المثلث الأكبر ضعف أطوال المثلث الأصغر المناظرة لها.

(جـ) قس (i) أ ب ، أ جـ ، أ ء

(ii) أ ب/ ، أ جـ/ ، أ ء/

(د) احسب: $\frac{\text{أ ب/}}{\text{أ ب}}$ ، $\frac{\text{أ جـ/}}{\text{أ جـ}}$ ، $\frac{\text{أ ء/}}{\text{أ ء}}$

سوف تلاحظ أن جميع هذه النسب تساوي 2

فنقول أن $\triangle$ ب/ جـ/ ء/ تكبير $\triangle$ ب جـ ء بمعامل قياس = 2

لاحظ أن: $\frac{\text{أ ب/}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ جـ/}}{\text{أ جـ}} = 2$

لأي تكبير يكون معامل القياس = $\frac{\text{طول الصورة}}{\text{طول المناظر للاصل}} = \frac{\text{بعد الصورة عن مركز التكبير}}{\text{البعد المناظر للاصل عن مركز التكبير}}$

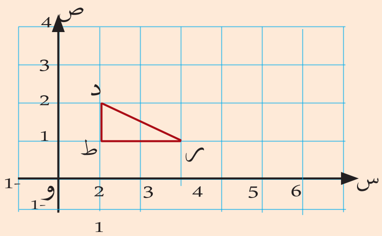
إذا فرضنا $\triangle$ أ ب/ جـ/ (المثلث الأكبر) هو الأصل ، $\triangle$ أ ب جـ (المثلث الأصغر) هو الصورة

فإن $\triangle$ أ ب جـ هو تصغير $\triangle$ أ ب/ جـ/ بمعامل قياس = $\frac{\text{و أ}}{\text{و أ/}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ب/}} = \frac{1}{2}$

لذلك معامل القياس الأقل من واحد يدل على التصغير في الحجم.

مثال 7 :

ارسم صورة Δ د ط ر بمعامل قياس 2 مركزه جـ.

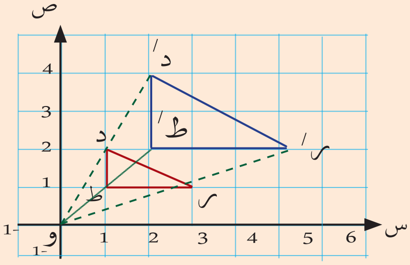


الحل:

$\frac{جـ د'}{جـ د} = 2 \Leftarrow جـ د' = 2 جـ د$

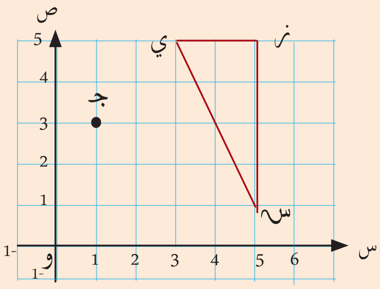
$\frac{جـ ط'}{جـ ط} = 2 \Leftarrow جـ ط' = 2 جـ ط$

$\frac{جـ ر'}{جـ ر} = 2 \Leftarrow جـ ر' = 2 جـ ر$



مثال 8 :

ارسم صورة Δ ي ر س بمعامل قياس $\frac{1}{2}$ الذي مركزه جـ.



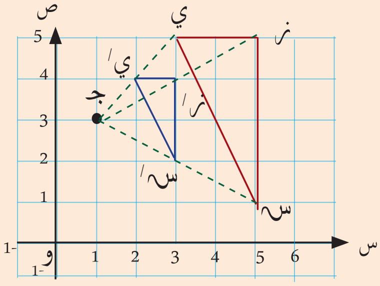
الحل:

$\frac{جـ ي'}{جـ ي} = \frac{1}{2} \Leftarrow جـ ي' = \frac{1}{2} جـ ي$

$\frac{جـ ر'}{جـ ر} = \frac{1}{2} \Leftarrow جـ ر' = \frac{1}{2} جـ ر$

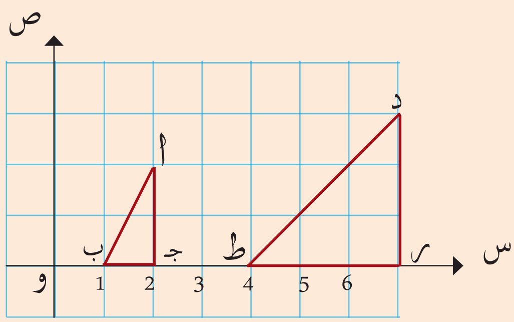
$\frac{جـ س'}{جـ س} = \frac{1}{2} \Leftarrow جـ س' = \frac{1}{2} جـ س$

لاحظ أن صورة Δ ي' ر' س' تناقصت في الحجم تحت هذا التكبير



مثال 9 :

في الرسم الذي أمامك Δ د ط ر هو صورة Δ أ ب جـ بالتكبير الذي مركزه و فإذا كان ب جـ = 2 وحدة ، جـ ط = 3 وحدات ، ط ر = 6 وحدات احسب طول و ب.



و ط = وب + ب جـ + جـ ط

الحل:

معامل القياس = $\frac{ط ر}{ط ب} = \frac{و ط}{و ب}$

$\therefore \frac{وب + 2 + 3}{و ب} = \frac{6}{2}$

3 (و ب) = وب + 5

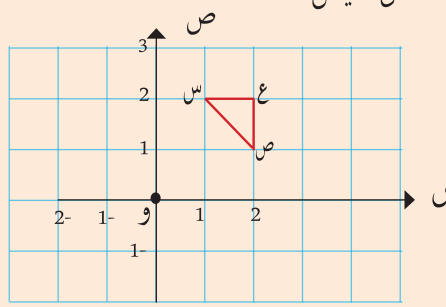
2 وب = 5

وب = 2.5 وحدة

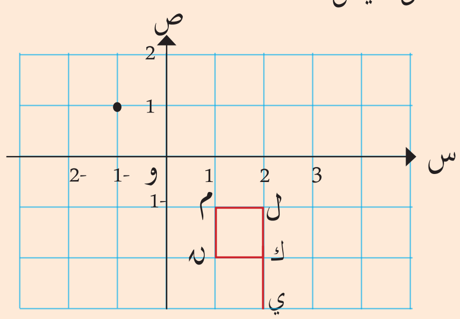
تمرين 9 د :

1- انقل الأشكال الآتية متخذا **جـ** مركز التكبير، ارسم وعنون الصور حسب معامل القياس المذكور.

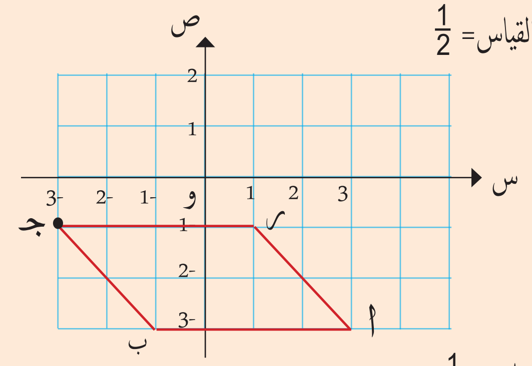
(أ) معامل القياس= 2



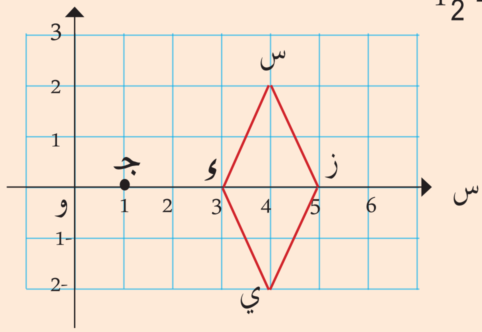
(ب) معامل القياس= 1



(جـ) معامل القياس= $\frac{1}{2}$



(د) معامل القياس= $1\frac{1}{2}$



2- مستخدما نتيجة السؤال 1 (أ) انقل ثم أكمل الجدول الآتي:

التكبير مركزه نقطة الأصل ومعامل 2	
النقطة الأصلية	صورة النقطة
س (1 ، 2)	
ص (2 ، 1)	
ع (2 ، 2)	

الاستنتاج:

باستخدام التكبير الذى مركزه نقطة الأصل (0 ، 0) ومعامله ك ، تكون صورة أي نقطة هي ....

3- استخدم نتائجك في السؤال الأول للإجابة على الأسئلة الآتية مما يساعدك على اكتشاف خواص التكبير:

(أ) إذا كانت نقطة ثابتة فأين يمكن أن تكون ؟

(ب) هل الأشكال ثابتة ؟

(جـ) بأي معامل التكبير تبقى المساحة ثابتة ؟

(د)ماهي العلاقة بين معامل التكبير والمساحات؟

4-في السؤال الثاني مركز التكبير :

جرب الطريقة التالية:

(أ) انقل مركز التكبير (1 ، 0) إلى نقطة الأصل (0،0) ؟

(ب) وبالمثل جميع نقط الجسم الأصلي (ب ي ز س) يجب نقلها بنفس الانتقال كما في (أ) ؟

(جـ) استخدام المركز الجديد (0،0) لتكبير الأصل باستخدام معامل التكبير (في هذه الحالة $1\frac{1}{2}$)؟

(د) أخيرا انقل مركز التكبير من نقطة الأصل عائدا للنقطة الأساسية [في هذه الحالة (1 ، 0)] واستخدم نفس الانتقال لتحريك الصورة في (جـ) لتحصل على الحل .

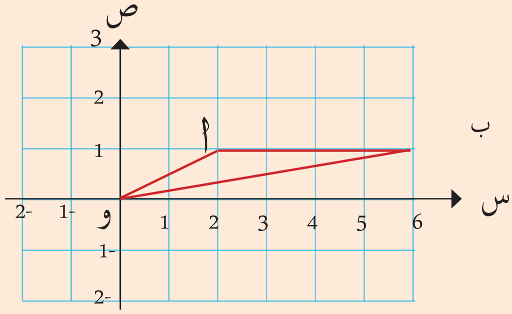
(هـ) سجل استقصاءك فى جدول كالآتي:

النقط	النقط بعد الانتقال في د	النقط بعد التكبير في جـ	النقط بعد الانتقال في ب
ت (3 ، 0)			
ي (4 ، -2)			
ر (5 ، 0)			
ع (4 ، 2)			

5- تكبير مركزه (0 ،7) ومعامله $1\frac{1}{2}$ برسم النقطة أ (4 ،3) إلى النقطة أ/ أوجد إحداثيات النقطة أ/ .

6- أوجد احداثيات صورة النقطة (3، 3) بالتكبير الذي مركزه (1، 2) ومعامله 5 .

7- استخدم الرسم الاتي للإجابة على جزئي السؤال الأتي:



(أ) أ ب ترسم إلى س ، ص بالتكبير الذي مركزه ومعامله 2.5، ارسم وعين المستقيم س ص.

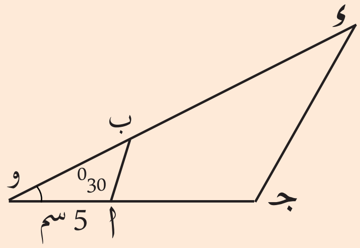
(ب) دوران حول ب بزاوية قياسها 90^0 ضد عقارب الساعة تحول Δ أ ب و إلى Δ د ب ط. ارسم Δ د ب ط وعين بدقة النقطتين د، ط .

8- Δ ء ع ف هو صورة Δ أ ب جـ بالتكبير الذي معامله 3، فإذا كانت مساحة Δ ء ع ف 45 سم^2 أوجد مساحة Δ أ ب جـ. (تلميح: استخدم مساحات المثلثات المتشابهة).

9- Δ و جـ ء هو صورة Δ و أ ب بالتكبير الذي مركزه و ، معامله 3 ، فإذا كان و أ = 5 سم ، وقياس زاوية و = 30^0 ، مساحة Δ و أ ب = 10 سم^2 احسب:

(أ) مساحة Δ و جـ ء .

(ب) طول $\overline{\text{وب}}$.

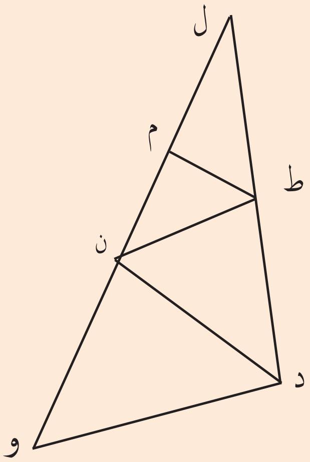


10- في Δ ل و د أخذت النقطتان م ، ن على الضلع ل و النقطة ط على الضلع ل د بحيث يكون Δ ن و د هو صورة Δ م ن ط بالتكبير الذي معامله 2.

(أ) اذكر مركز التكبير. وإذا كانت مساحة Δ م ن ط= 3 وحدات مربعة.

(ب) أوجد مساحة Δ ن و د.

(جـ) أوجد مساحة Δ ل و ط.



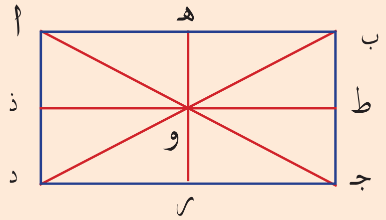
11- أ ب جـ ء مستطيل د، ط، ر، ذ منتصفات أضلاعه، و مركز المستطيل.

(أ) اذكر صورة Δ أ ذ و بالدوران 180^0 حول نقطة و.

(ب) اذكر صورة Δ أ ذ و بالتكبير الذي مركزه أ ، معامله 2

(جـ) اشرح بالتفصيل التحويل الذي يرسم Δ أ ذ و إلى Δ ء ذ و.

(د) إذا كانت مساحة Δ أ د و = 5 سم^2 احسب مساحة Δ أ ب جـ.

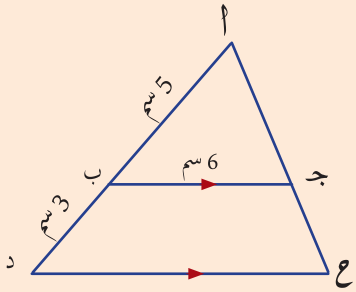


12- في الشكل المرسوم أ ب ء ، أ جـ ع خطين مستقيمين، ب جـ//ء ع ، أ ب = 5 سم، ب جـ = 6 سم، ب ء = 3 سم.

(أ) احسب طول ء ع

(ب) إذا كانت مساحة Δ أ ب جـ تساوي 10 سم^2 احسب مساحة Δ أ ء ع.

(جـ) اشرح بالتفصيل التحويل الذي يرسم Δ أ ب جـ إلى Δ أ ء ع.



9 - 5 ائتلاف التحويلات (اختياري)

Combination of Transformations " Optional "

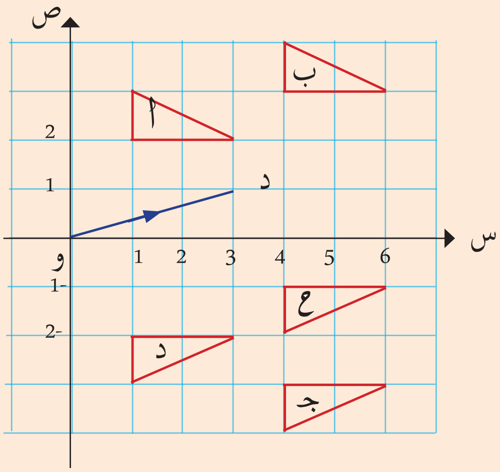
لقد مررنا بتطبيقات على إئتلاف التحويلات (أي الانتقال متبوعاً بالتكبير والتكبير متبوعاً بالانتقال) وفي أغلب الاحوال لا يؤذي التحويل (أ) متبوعاً بالتحويل (ب) إلى نفس النتيجة كما لو بدأنا بالتحويل (ب) متبوعاً بالتحويل (أ) وسوف نستقصى ذلك في المثال التالي:

مثال 10 :

(أ) Δ أ يرسم إلى Δ ب بالانتقال في اتجاه و د ثم بالانعكاس على محور السينات إلى Δ جـ .

(ب) ثم Δ أ يرسم إلى Δ د بالانعكاس على محور السينات ثم بالانتقال في اتجاه ود إلى Δ ع .

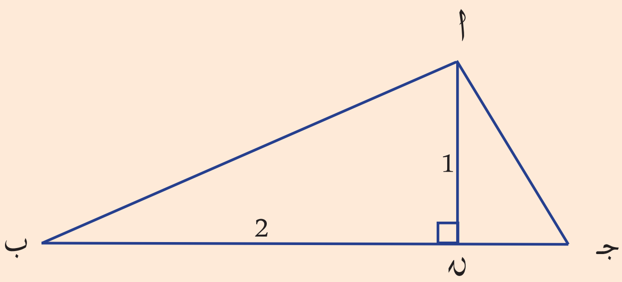
نلاحظ ان موضع الصورة الأخيرة في (أ) مختلف عن موضع الصورة الأخيرة في (ب) أي أن إجراء الانتقال متبوعا بالانعكاس يختلف عن إجراء الانعكاس متبوعا بالانتقال.



مثال 11 :

Δ أنجـ يمكن رسمه إلى Δبنأ بالتحويل ر متبوعا بالتحويل س اشرح بالتفصيل هذين التحويلين.

الحل :



التحويل ر هو دوران حول ن بزاوية 90^0 عكس عقارب الساعة، التحويل س هو التكبير الذي مركزه ومعامله 2.

ملحوظة:

هل يمكن البدء بالتكبير متبوعاً بالدوران كإجابة.

تمرين 9 هـ : (اختياري)

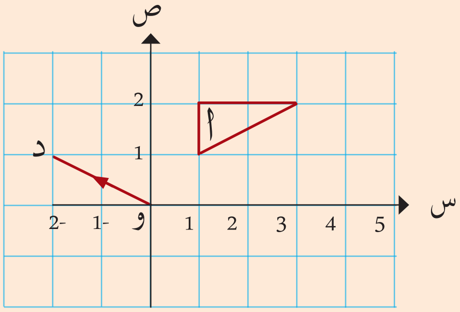
1- انقل الشكل التالي، ثم ارسم الصورة الأخيرة للمثلث أ عندما يرسم كالآتي:

(أ) بالانتقال في اتجاه ود متبوعا بالانعاكس على محور السينات.

(ب) بالانعاكس على محور الصادات متبوعا بالدوران حول نقطة الأصل 90^0 مع عقارب الساعة.

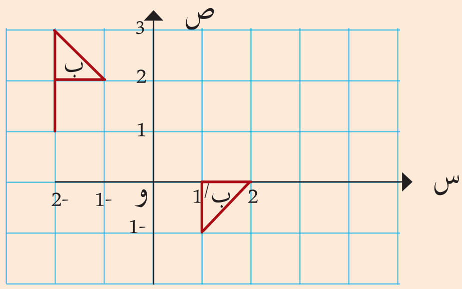
(جـ) بالدوران حول نقطة الأصل 90^0 ضد عقارب الساعة متبوعا بالتكبير الذي مركزه و ومعامله 2 .

(د) التكبير الذي مركزه و ومعامله $1\frac{1}{2}$ متبوعا بالانتقال في اتجاه و د .

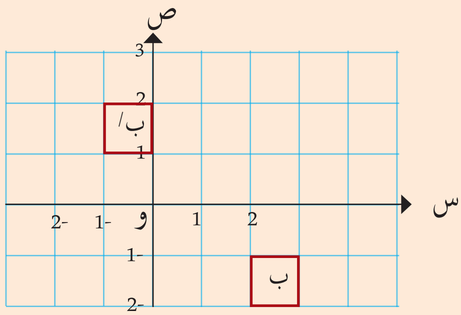


2- اشرح بالتفصيل: إئتلاف تحويلين معا يرسمان الشكل ب إلى صورته ب/ في كل من الاشكال الاتية:

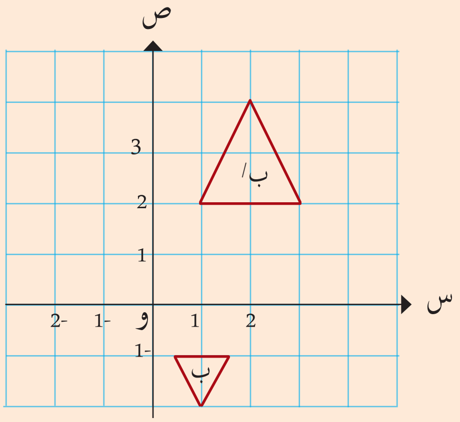
(أ)



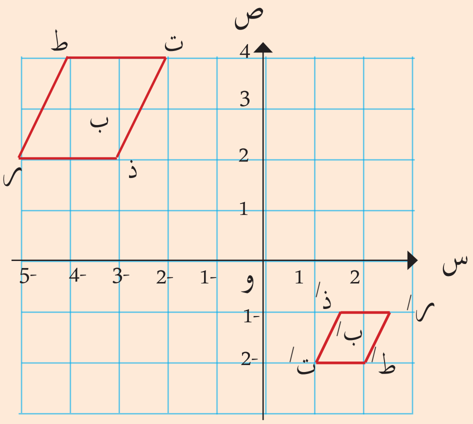
(ب)



(جـ)



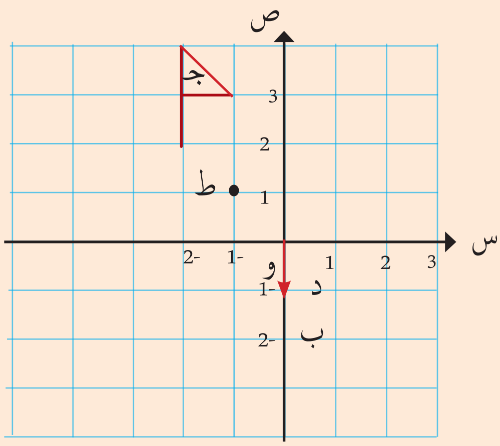
(د)



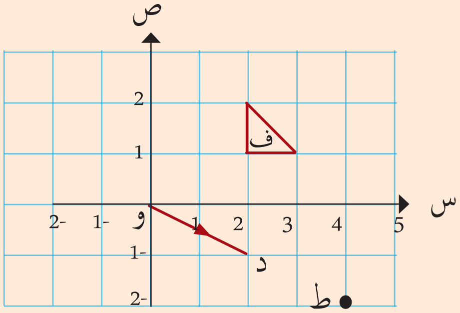
3- (أ) الدوران حول النقطة ط (-1،1) بزاوية قياسها 90^0 عكس عقارب الساعة برسم العلم جـ إلى العلم د ارسم وعنون العلم د.

(ب) الانتقال في اتجاه دب برسم العلم د إلى العلم ع ارسم وعنون العلم ع .

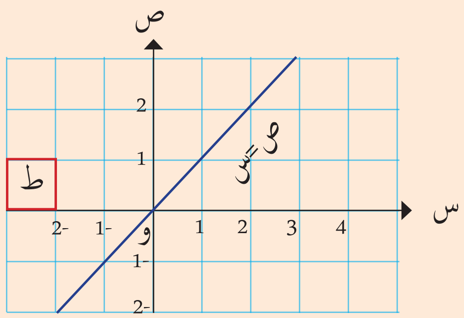
(جـ) اشرح بالتفصيل الذي يرسم العلم جـ إلى العلم ع .



4- (أ) الانتقال في اتجاه و د برسم Δ ف إلى Δ ن ارسم وعنون Δ ن .
(ب) التكبير الذي مركزه ط (4 ، -2) ومعامله 2 برسم Δ ن إلى Δ هـ ارسم وعين Δ هـ .
(جـ) اشرح بالتفصيل التحويل الوحيد الذي يرسم Δ ف إلى Δ هـ .



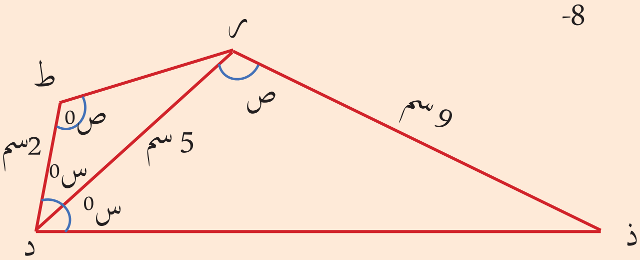
5- بدوران العلم ط حول نقطة الأصل 90^0 مع عقارب الساعة متبوعا بالانعكاس في الخط ص=س، اشرح بالتفصيل التحويل الوحيد الذي يؤدي إلى نفس نتيجة ائتلاف التحويلين.



6- قد انعكست النقاط على المستقيم س=2، ثم انعكست صورها على المستقيم ص =1
(أ) أوجد إحداثيات الصورة النهائية للنقطة (3 ، 2) .
(ب) اذكر إحداثيات النقطة التي تبقى ثابتة بعد ائتلاف الانعكاسات.

7- رؤوس Δ أ ب جـ هي : أ (1 ، 1) ب (1 ، 4) جـ (3 ، 1).
(أ) مستخدما مقياس 1 سم ليمثل وحدة واحدة على كل محور ارسم محوري س،ص حيث -8 ⩽ س ⩽ 8 وحيث -8 ⩽ ص ⩽ 8 ارسم وعنون Δ أ ب جـ .
(ب)التكبير الذي مركز (0، 0) ومعامله 2 ارسم صورة المثلث أ ب جـ إلى المثلث د هـ ف.
(جـ) صورة Δ أ ب جـ ولتكن Δ ل م ن بالانعكاس في محور س متبوعاً بالانعكاس في محور ص.
(i) ارسم وعنون Δ ل م ن .
(ii) اشرح بالتفصيل التحويل الهندسي الذي يرسم Δ أ ب جـ إلى Δ ل م ن .

8-



في الرسم الذي أمامك قياس ∡ ط د ر = قياس ∡ ر د ذ= $س^0$، قياس ∡ د ط ر = قياس ∡ د ر ذ = $ص^0$ ، د ط = 2سم ، د ر = 5 سم.
Δ د ط ر يرسم إلى Δ د ر ذ بالتكبير الذي مركزه د متبوعا بتحويل آخر.
(أ) اشرح بالتفصيل هذا التحويل الآخر.
(ب) حدد معامل قياس التكبير.
(جـ) إذا كان ر ذ= 9 سم، احسب طول ط ر.
(د) إذا كانت مساحة Δ د ط ر = 3 سم^2، احسب مساحة الشكل الرباعي د ط ر ذ.

ملخص:

1- التحويل : عملية تنقل نقطة أوشكل (يسمى الأصل) إلى نقطة أوشكل آخر (يسمى الصورة).

2- الانتقال: هو تحويل كل نقط المستوى نفس المسافة في نفس الاتجاه.

3- الانعاكس هوتحويل بعكس كل نقط المستوى على خط انعاكس موجود في المستوى.

4- الدوران هو تحويل يجعل كل نقط المستوى تدور حول نقطة ثابتة تعرف بمركز الدوران عبر زاوية معينة مع اتجاه دوران عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة.

5- التكبير (مغير البعد) هو التحويل الذي يكبر أو يصغر حجم الشكل بمعامل قياس معطى من حيث مركز التكبير.

6- التحويلات التي تحافظ على الشكل والحجم تسمى متكافئة (أيزومترية) فالانتقال والانعكاس والدوران هي تحويلات متكافئة (أيزومترية) بينما التكبير (مغير البعد) تحويل متكافئ (أيزومتري).

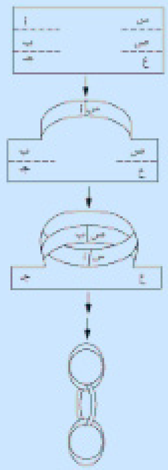
استقصاء الرياضيات:

المزيد عن شريط موبيوس:

1- قص شريطا من الورق طوله 250 مم وعرضه 50 مم ، ثم افتح شقين في طرفيه (كما هو موضح بالشكل) صل الطرفين أ ، س لتصنع حلقة ثم مرر الطرف ب فوق أ ليتصل بالطرف ص الذي يمر أسفل س من ثم مرر الطرف جـ بين أ ، ب لتصل بالطرف ع الذي يمر أسفل الطرفين س،ص ماذا يحدث عندما تتصل جميع القطع المربوطة؟.

2- جهز شريطا آخر بنفس الطريقة صل أ ، س ثم بنفس الطريقة الأولى ثم مرر جـ فوق ب لتصل إلى ع التي تمر أسفل الطرفين س،ص اقطع كالسابق ماذا يحدث للقطع المربوطة؟ اقطع أي وصلة وانظر ماذا يحدث.

3- جهز قطعة ثالثة بنفس الطريقة اثن جـ لأعلى (نصف دورة) لتصل إلى س وبالمثل اثن أ لتصل إلى ص، ب إلى ع اكمل القص، هل توقعت هذه النتيجة؟.

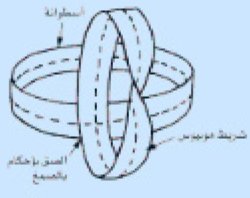


شريط موبيوس المستعار:

1- قص شريطين من الورق طول منهما 240 مم وعرضه 30 مم صل الأول ليصنع اسطوانة، اصنع شريط موبيوس (كما فى صفحة 125) من الشريط الآخر) لاحظ أن الأسطوانة لها حافتين وسطحين، بينما الشريط له حاف واحدة وسطح واحد).

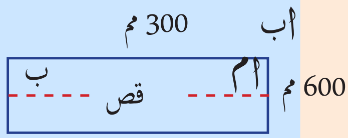
2- لصق الشريطين بإحكام بالصمغ في الشكل الشريط موبيوس أمام الاسطوانة .

3- قص عند الخطوط المنقطة كما في الشكل، ماذا يحدث ؟ ماهو الشكل الناتج؟ هذا الشكل الأخير له وجهان وحافتان وغير ملتوٍ (الالتواءات تلغي نفسها عند الفرد).



الشرائط المشقوقة:

اصنع شقا بواسطة قطعة طويلة من الورق ثم مرر أحد الأطراف خلاله وصله بالآخر، مد الشق بطول الشريط (كما في الشكل). وبنفس الطريقة ادخل الطرف العلوي خلال الشق بعد إدارته ناحيتك بحيث يلتصق السطح العلوي بالسطح السفلي عندما تتصل الاطراف، ماذا يحدث؟.



الشرائط الملتصقة:

خذ شريطا طويلا من الورق ثم قص شقين طويلين كما في الشكل. أمسك بالجزأين العلويين للطرفين معا وصلهما بنصف استدارة ليرتبط أ ،أ/ وكذلك ب ، ب/ افعل ذلك أيضا مع الشقين السفليين ولكن بالدوران في الاتجاه المضاد. ثم قص على طول الخط للنقط.

ورقة المراجعة 10 :

القسم أ :

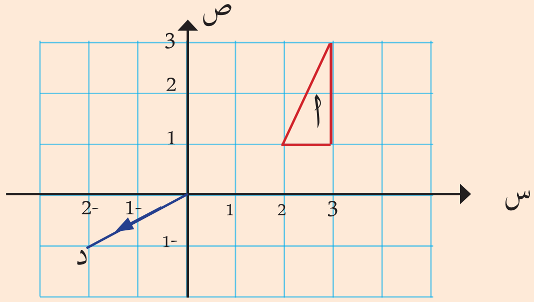
1- Δ أ الناتج من التحويلات الآتية:

(أ) الانتقال في اتجاه و د.

(ب) الانعكاس في محور الصادات.

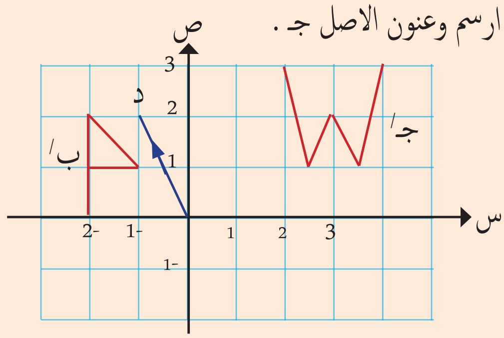
(جـ) الدوران 180° حول النقطة و .

(د) التكبير الذي مركزه و ،معامله $\frac{1}{2}$ على الشكل، ارسم وعنون الصور (أ)، (ب)، (جـ)، (د) على التوالي.

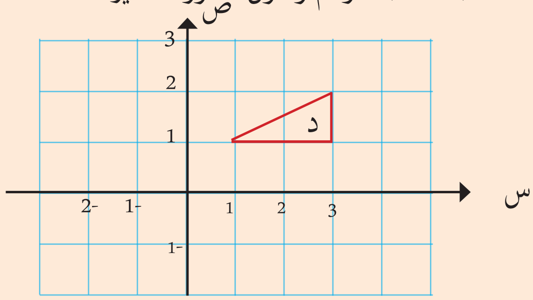


2- (أ) إذا كانت ب/ صورة ب بالانتقال في اتجاه و د، ارسم وعنون الأصل ب .

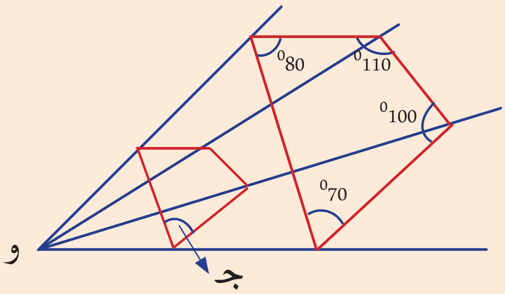
(ب) إذا كانت جـ/ صورة جـ بالانعكاس في محور السينات، ارسم وعنون الأصل جـ .



3- (أ) إذا دار Δ د مع عقارب الساعة 90° حول النقطة و ثم تبع ذلك دوران عكس عقارب الساعة 90° حول النقطة (0 ، -1) . ارسم وعنون الصورة الأخيرة.



(ب) الشكل الآتي رسم بالتكبير، ما هو قياس الزاوية جـ؟



4- أوجد إحداثيات صورة النقطة (2 ، 3) المرسومة كما يلي:

(أ) بالانتقال وحدتان لليمين موازية لمحور السينات ووحدة لأسفل موازية لمحور الصادات.

(ب) بالانعكاس في المستقيم ص = س.

(جـ) بالدوران 90° ضد عقارب الساعة حول نقطة الأصل .

(د) بالتكبير الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله = $\frac{1}{2}$.

القسم ب :

5- (أ) أوجد معادلة المستقيم ص = س الناتجة من انعكاسه:

(i) على محور السينات (ii) على محور الصادات.

(ب) أوجد معادلة صورة المستقيم ص = س في الحالات الآتية:

(i) إذا دار 90° حول نقطة الأصل مع عقارب الساعة.

(ii) إذا دار 90° حول نقطة الأصل ضد عقارب الساعة.

(iii) إذا دار 180° حول نقطة الأصل.

6- إذا انعكس الحرف د على محور السينات وتبع ذلك انعكاس على محور الصادات، ما شكل الصورة الأخيرة؟

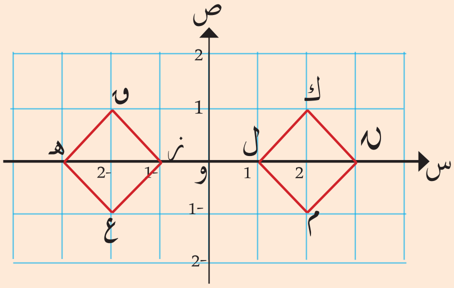
* اشرح بالتفصيل التحويل الوحيد الذي يرسم الحرف د إلى الصورة التي تم التوصل إليها أعلاه.

7- في كل الحالات الآتية اشرح بالتفصيل التحويل الوحيد الذي يرسم:

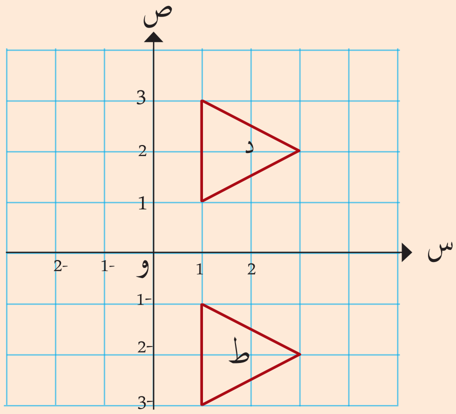
(أ) ن هـ ع ر إلى ك ل م ن.

(ب) ن هـ ع ر إلى ك ن م ل.

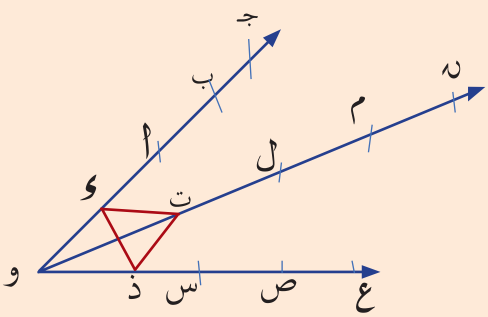
(جـ) ن هـ ع ر إلى م ن ك ل.



8- (أ) Δ د يمكن رسمه إلى Δ ط باستخدام تحويل ما، اشرح بالتفصيل التحويلين اللذين قد يؤديان إلى ذلك.



(ب) في الشكل، النقط تعين رؤوس عدة مثلثات محتملة، اذكر اسم المثلث الذي هو صورة Δ ر ذ ت بالتكبير الذي مركزه و ومعامله 3 ؟



الإجابات Answers

الفصل الخامس:

تمرين 5 أ

1. (أ) نعم ، ص = 3س (ب) لا
2. (أ) أ (ب) أ (جـ) أ (د) خط مستقيم يمر بالمركز
3. (أ) نعم (ب) لا (جـ) لا (د) لا يمر بالمركز
4. (ب) ص $\propto$ س ، ص = ك س

(جـ) حـ $\propto$ ء ، حـ = ك ء

(د) ن $\propto$ ت ، ن = ك ت

(هـ) د $\propto$ ث ، د = ك ث

5. (أ) ص = $\frac{1}{2}$ س (ب) 3 (جـ) 8
6. (أ) 52 (ب) 10
7. ت=50 ، ن=50

تمرين 5ب

1. (أ) ص $\propto$ س ، ص=3س

(ب) ص $\propto$ س^3 ، ص=2س^3

(جـ) ص $\propto$ س^2 ، ص= $\frac{1}{2}$ س^2

(د) ص $\propto \sqrt{\text{س}}$ ، ص=6$\sqrt{\text{س}}$

2. (أ) 7.5 (ب) - 16
3. (أ) 36 (ب) 64
4. (أ) 475 كم (ب) 6 ساعات
5. (ب) ن $\propto$ ر^3 ، ن = ك ر 3

(جـ) ر $\propto \sqrt{\text{ف}}$ ، ز = ك $\sqrt{\text{ف}}$

(د) ت $\propto \sqrt{\text{ل}}$ ، ت = ك$\sqrt{\text{ل}}$

(هـ) حـ $\propto$ س^3 ، حـ = ك س^3

(و) ع $\propto$ حـ^2 ، ع = ك حـ^2

(ز) ر $\propto \sqrt[3]{\text{م}}$ ، ر= ك $\sqrt[3]{\text{م}}$

6. 19.2 كم
7. (أ) 4.48 (ب) 15
8. (أ) 2 (ب) 1 (جـ) - 1

أنشطة (صفحة 9)

1. (أ) لا لأن $\frac{\text{ن}}{\text{ت}} \neq$ (ب) لا لأن $\frac{\text{ن}}{\text{ت}^2} \neq$

(جـ) ن ب = 3000

2. (أ) لا (ب) لا (جـ) ن ب = 12

تمرين 5 جـ

1. (أ) نعم ، س ص = 20 (ب) نعم ، س ص = 60
2. (ب) د $\propto \frac{1}{\text{ط}}$ ، د= $\frac{\text{ك}}{\text{ط}}$

(جـ) م $\propto \frac{1}{\text{ق}^2}$ ، م = $\frac{\text{ك}}{\text{ق}^2}$

(د) ر $\propto \frac{1}{\text{ذ}^2}$ ، ر= $\frac{\text{ك}}{\text{ذ}^2}$

(هـ) أ $\propto \frac{1}{\text{ب}^3}$ ، - = $\frac{\text{ك}}{\text{ب}^2}$

(و) ب $\propto \frac{1}{\sqrt{\text{جـ}}}$ ، ب = $\frac{\text{ك}}{\sqrt{\text{جـ}}}$

3. س =± $\frac{3}{2}$ ، ص = 4
4. (أ) 4 (ب)± 4
5. 4 ساعات
6. أ= 8 ، ب= 16
7. ص = 3 + $\frac{20}{\text{س}}$

ورقة المراجعة 6

1. (أ) أ $\propto$ ب (ب) ب$\propto$ (جـ) حـ$\sqrt{\text{ء}}$ (د) ء $\propto \frac{1}{\text{ع}^2}$
2. (أ) لا (ب) نعم (جـ) لا (د) لا
3. (أ) م= 4 ن (ب) 16 (جـ) 15
4. (أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 2 (جـ) ± 4
5. (أ) ل= $\frac{1}{5}\sqrt{\text{ن}}$ (ب) $1\frac{1}{5}$ (جـ) 100
6. (أ) 7 (ب) 36 (جـ) ± 4
7. س= 4 ، ص = $1\frac{1}{2}$
8. (أ) ص= $\frac{24}{\text{س}}$ (ب) ص= $\frac{36}{\text{س}^2}$ (جـ) ص= $\frac{12}{\sqrt{\text{س}}}$

الفصل السادس

تمرين 6 أ

1 -

س	2-	1-	0	1	2	3	4	5
س^{2}	4	1	0	1	4	9	16	25
- 3س	6	3	0	3-	6-	9-	-12	-15
+1	1	1	1	1	1	1	1	1
ص = س^{2} - 3س + 1	11	5	1	-1	-1	1	5	11

2 - جدول 1 ، 4 ، - 11 (أ) 2.8 (ب) 3.4 أو -1.4

3 - أ= -6 ، ب=0 ، حـ= 2 (أ) س = 3 أو 4

تمرين 6 ب

1 - جدول -1 ، 0 ، 1 27

(أ) 4.9 (ب) - 13.8 (جـ) 2.2 (د) - 2.8

2 - (أ) أ= 20 (جـ) س = 0.80 ، 1.35 ، 2.45

تمرين 6 جـ

1 - جدول - 0 ، 2 ، 0.25 (ب) ص = س ، ص = - س

2 - (أ) أ=12 (ب) ص=1.30

3 - المنحنى ص= -$\frac{3}{س}$ ينعكس إلي المنحنى ص = $\frac{3}{س}$ في محور السينات

4 - (أ) أ=4 ، ب= 16 ، (جـ) س=0 (أي محور الصادي)

(د) س =± 1.4

5 - منحنى ص= -$\frac{4}{س^{2}}$ انعكاس في المنحنى ، ص = $\frac{4}{س^{2}}$ في محور السينات .

تمرين 6 د

1 - (ب) (i) -1.3 أو 2.3 (ii) -2.55 أو 3.55

2 - هـ = 6 ، ك = 0 ، م = 2

(ب) (i) 3 أو 4 (ii) 1.45 أو 5.55

3 - (أ) - 1.25 (جـ) 1.4 أو 3.6

ورقة المراجعة 7

1 - (أ) س=3 ، س=-1 (ب) س=1

2 - (أ) س=0.6 أو 3.4 (ب) س=-0.5 أو 4.5

3 - (أ) - 12 7 (جـ) لا يوجد حل

4 - (أ) أ = 11 (جـ) س=4 أو -1.5

5 - (ب) (i) ص= 10.4 (ii) س=4.1

6 -

س	2-	1-	0	1	2	3	4
(2 +س)	0	1	2	3	4	5	6
(4 -س)	6	5	4	3	2	1	0
ص	0	5	8	9	8	5	0

(أ) س=1

7 - جدول 12 ، 15 ، 7

الفصل السابع

تمرين 7 أ

1 - (أ) س=- 1 أو - 3 (ب) س= 2 أو 3

(جـ) أ= -4 أو 8 (د) حـ= - 11 أو 7

2 - (أ) س=0 أو 6 (ب) ص= 0 أو $\frac{2}{3}$

(جـ) س=±8 (جـ) ص=±2 (جـ) س=±4

3 - (ا) أ= $\frac{1}{2}$ أو - 1 (ب) س= $\frac{3}{4}$ أو $\frac{4}{3}$ (هـ) م=0 أو 5

(ز) س=0 أو - $\frac{3}{2}$ (ح) أ= $\frac{3}{2}$ أو - 4

4 - (أ) س=3 أو - 5 (ب) ز = 0 أو - 6

(جـ) س=4 أو - $1\frac{1}{2}$

تمرين 7 ب

1 - (أ) أ =2أ + 1 (ب) س^{2} - 2س+ 1

(جـ) س^{2} - 6س+ 9 (د) ص^{2} + 8ص+ 16

(هـ) أ^{2}+2أ ب +ب^{2} (و) س^{2} - 2 س ص + ص^{2}

(ز) ص^{2} - ص+ $\frac{1}{4}$ (ح) ص^{2} + $\frac{2}{3}$س + $\frac{1}{9}$

2 - (أ) 2،2،1 (ب) - 2،2،1 (جـ) $\frac{2}{3}$، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$

(د) 8،8،4 (هـ) - 1 ، - 1 ، $\frac{1}{2}$

3 - (أ) (س+ 5)^{2} (ب) (س- 4)^{2} (جـ) (س - $\frac{9}{2}$)^{2}

(د) (س+ $\frac{7}{2}$)^{2} (هـ) (س+$\frac{1}{3}$)^{2} (و) (س- $\frac{2}{5}$)^{2}

(ز) (س - $\frac{ب}{2}$)^{2} (ح) (س+ب)^{2}

تمرين 7 ج

1 - (أ) (0، -1) ، محور الصادات (ب) (0،0) محور الصادات

(جـ) (-3، -4) ، س+ 3=0

2 - (أ) نهاية صغرى (ب) نهاية كبرى (جـ) نهاية صغرى

3 - يترك للطالب

تمرين 7 د

1 - (أ) مجموعة الحل {-3} جذران حقيقيان متساويان (متكرران).

س1= -3، س2= -3 ⇦ (س+ 3)(س+ 3)=0

$س^2$ + 6س + 9=0

(ب) مجموعة الحل ($\frac{3}{2}$، 1) ، س=$\frac{3}{2}$ ، س=1

2س -3=0 ، س -1=0 ومنها تصل إلي المعادلة

(جـ) مجموعة الحل{-2، 5} ، س= -2 ، س=5 ⇦

(س+ 2) (س -5) =0 ومنها تصل إلي المعادلة

2 - حـ = 25

تمرين 7 هـ

1 - (أ) س= - 6.54 أو - 0.46 (ب) س= 0.44 أو 4.56

(جـ) س= -6.16 أو 0.16 (د) س= -4.19 أو -1.93

2 - (أ) س=1 أو - 6 (ب) س=6 أو - 1

(جـ) س=$\frac{1}{2}$ أو -2 (د) س=$\frac{2}{3}$ أو - 2

3 - (أ) س= -0.87 أو 2.87 (ب) س= -2.22 أو 0.22

(ج) س= - 2.29 أو 0.29

تمرين 7 و

1 - س=5 أو 2 (مرفوض) . 12 وحدة 2

2 - ($\frac{1200}{س}$ - 20) س + 2 ($\frac{1200}{س}$ - 230) = 1200 ، س=10.

3 - س= 3.07 أو 4.57 (مرفوض)

4 - 3.66 سم

5 - (أ) ح حـ ف = 6 $سم^2$ (ب) $2س^2$ + 7س - 6 ، 5.05 سم

6 - (أ) ($2س^2$ - 5س - 3) سم2 (جـ) س=4.5 أو - 2 ل م = 1 $\frac{1}{2}$ سم

7 - (أ) ل ب = (2س - 3) سم أو ل ب= $\frac{10}{س+ 2}$ سم

(ب) $2س^2$ +س - 16=0 (جـ) س = 2.59 ، المحيط = 135 م

ورقة المراجعة 8

1 - (أ) س=± 3 (ب) س= 0 أو 9

2 - (أ) ص= 2 (ب) ص= -1 أو 5

3 - (أ) أ=$\frac{3}{2}$ أو - $\frac{4}{3}$ (ب) ب=0 أو - 4

4 - ز = 2 أو - $\frac{3}{2}$

5 - (أ) م = 6 أو $\frac{3}{2}$ (ب) ن = 0 أو 2

6 - س=1.18 أو - 0.43

7 - ص- 1.19 أو 4.19

8 - س= 3.14 أو 0.59

9 - (أ) أ م = (2س - 2) سم (ب) ($2س^2$ +س - 3) $سم^2$

س= 2.31 أو 2.81 (مرفوض) أ حـ = 5.24 سم

الفصل الثامن

تمرين 8 أ

1 - (أ) 90 (ب) 4سم (جـ) 40

2 - (أ) 6سم (ب) 13.4 سم

3 - (أ) 11.9 سم (ب) 10.1 سم (جـ) 35.8 سم2

4 - (أ) 126 (ب) 234 (جـ) 28.6 سم

5 - (أ) 15.0 سم

6 - 40

تمرين 8 ب

1 - (أ) س=90^0 ، ص=90^0 ، ع = 138^0

(ب) أ=68^0 ، ب= 68^0 ، جـ= 22

(د) س=69^0 ، ص=34.5^0 ، ع=34.5^0

(جـ) س= 4.36 سم

2 - 67^0

3 - 33^0

4 - 24 سم

5 - (أ) 12 سم (ب) 5سم (جـ) 31.2 سم

6 - (أ) 70 (ب) 35

7 - (أ) س+ 3 (ب) 1 $\frac{1}{6}$ سم

8 - (أ) م ت (ب) 100^0

تمرين 8 جـ

1 - (أ) 120° (ب) 116° (جـ) 200°

2 - (أ) 30° (ب) 68° (جـ) 100°

3 - 3 -(أ) 50°

4 - 112° 5 - 20° 6 - 40°

7 - (أ) 15° (ب) 135°

8 - (أ) 20° (ب) 110°

9 - (أ) 110° (ب) 40°

تمرين 8 د

1 - (أ) 28° (ب) س=40° ، ص=40°

2 - (أ) 80° (ب) 20°

3 - (أ) 33° (ب) 33° (جـ) 66°

4 - (أ) 68° (ب) 68° (جـ) 68°

5 - (أ) 64° (ب) 107°

تمرين 8هـ

1 - (أ) نعم (ب) لا (جـ) نعم (د) لا

2 - (أ) أ=80° ، ب=88°

(ب) س=100° ، ص=100° ، ع=80°

(جـ) أ=60° ، ب=60° ، حـ=120°

3 -(أ) أ= 70° ، ب= 80° (ب) أ=69° ، ب= 69°

4 -(أ) 52° (ب) 101°

5 - (أ) 30° (ب) 150°

6 - (أ) 105° (ب) 15°

7 - (أ) 50° (ب) 65°

8 - (أ) 32° (ب)96° (جـ) 84°

تمرين 8 و

1 - (أ) 35° (ب) 53° (جـ) 50° (د) د= 87° ، ح=85°

(هـ) ف=49° ، ق= 21° (و) هـ=40 ، ط=55° ، ي=55°

2 - (أ)72° (ب) 72°

3 -(أ) 33° (ب) 114° (جـ) 24°

4 -(أ) 65° (ب) 115° (جـ) 75°

5 -(أ) 24° (ب) 45° (جـ) 111°

6 - (أ) 2س° (ب) 6س° (جـ) س°

7 - (أ) 90° + س° (ب) 90° - 3س°

8 - (أ) 40° (ب) 50° (جـ) 148° (د) 82°

9 - (أ) 56° (ب) 68° (جـ) 34°

10 - (أ) 105° (ب) 35° (جـ) 30°

ورقة المراجعة 9

1 - (أ) أ = 3سم (ii) ب=5سم

(ب) س=35^{0} (ii) ص=130^{0}

2 - (أ) س=58^{0} ، ص=29^{0} (ب) ر=8سم ، ل=8سم

3 - (أ) أ=60^{0} (ب) ب=145^{0}

(جـ) حـ=51^{0} (د) د=60^{0}

4 - (أ) ح=95^{0} (ii) ف=98^{0}

(ب) (i) ق=55^{0} (ii) هـ = 65^{0}

5 -(أ) (i) 7.33سم (ii) 94.3^{0}

(ب) (i) 7.03سم (ii) 16.5سم

6 -(أ) (i) 7سم (ii) 168 سم^{2}

(ب) (i) 92^{0} (ii) 11.5سم

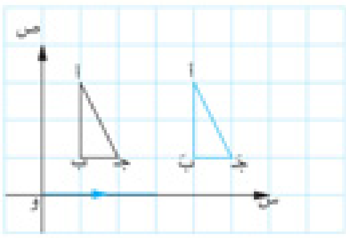
7 - (أ) 115^{0} (ب) 40^{0} (جـ) 75^{0}

8 - (أ) 43^{0} (ب) 86^{0} (جـ) 46^{0}

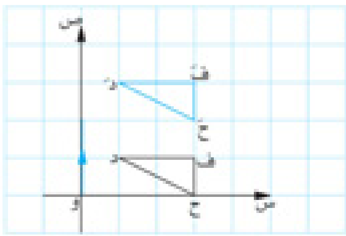
الفصل التاسع

تمرين 9 أ

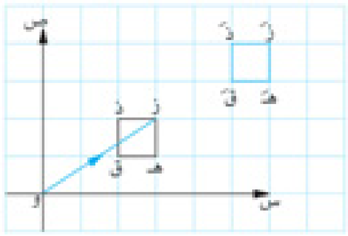
1- (أ)



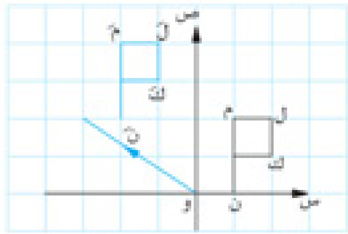
(ب)



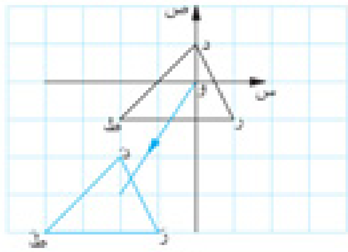
(جـ)



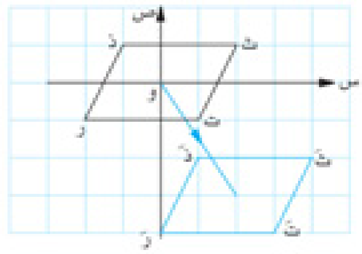
(د)



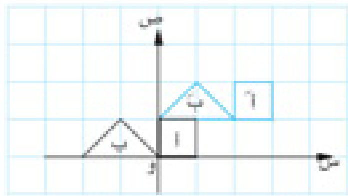
(هـ)



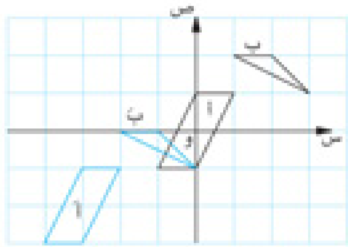
(و)

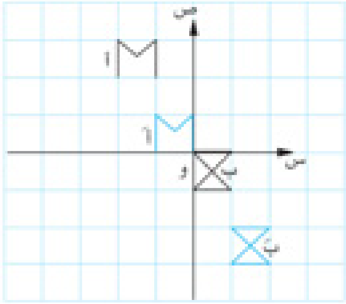


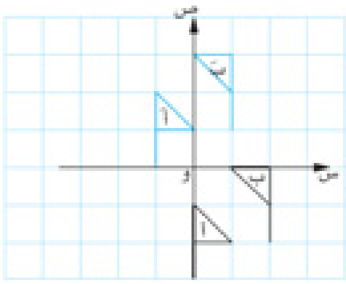
2- (أ)

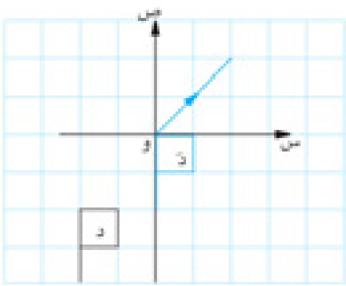


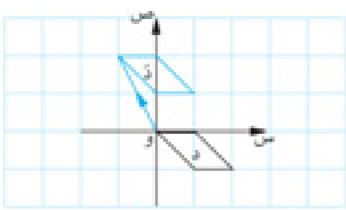
(ب)

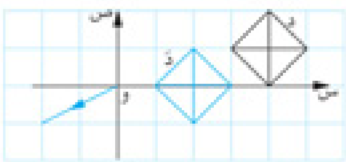




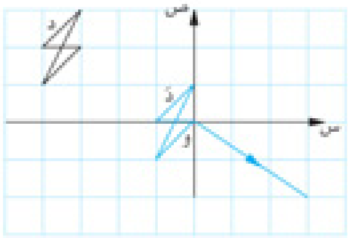








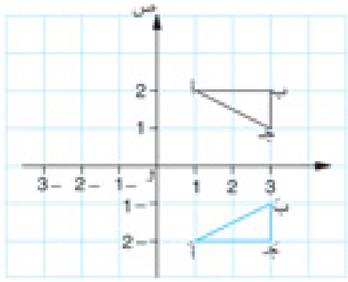
(د)



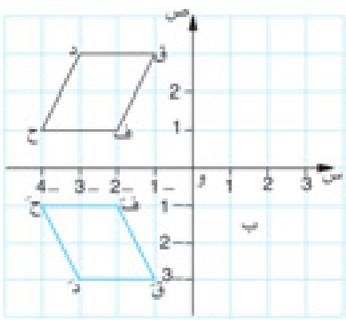
4- (أ) لا　　(ب) نعم　　(جـ) نعم

تمرين 9 ب

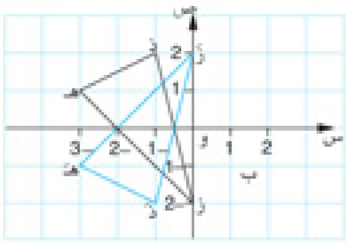
1- (أ)



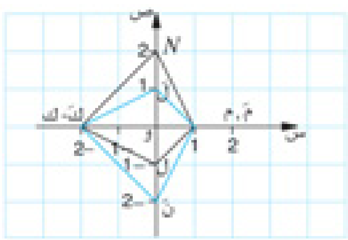
(ب)

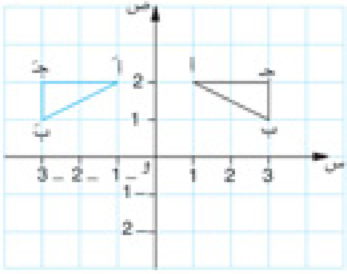


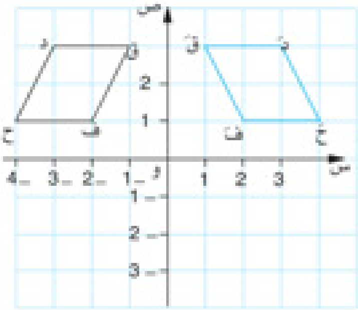
(جـ)

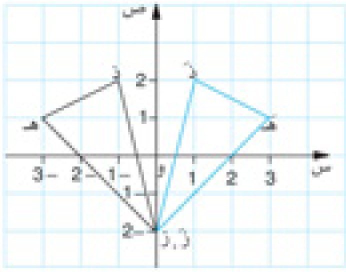


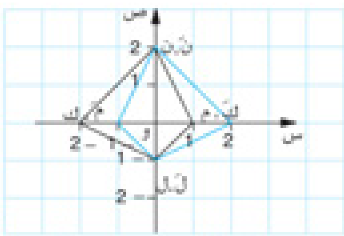
(د)

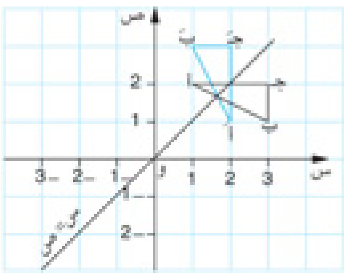




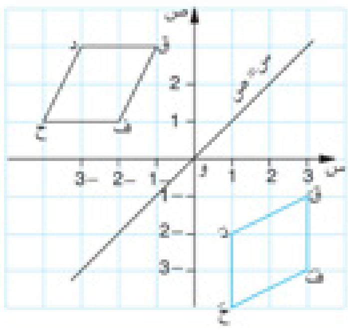




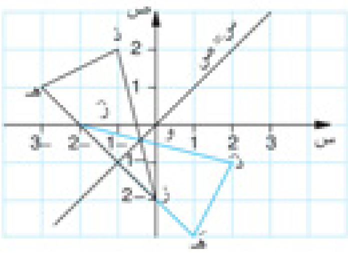




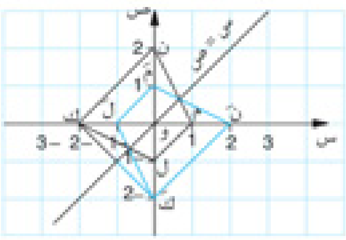
(ب)



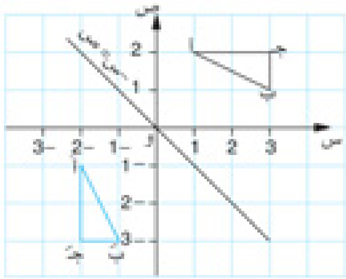
(جـ)



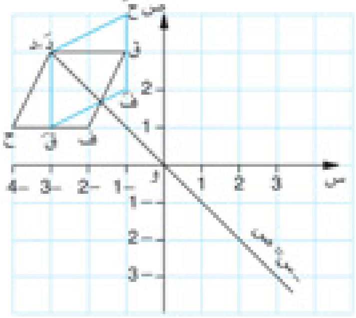
(د)



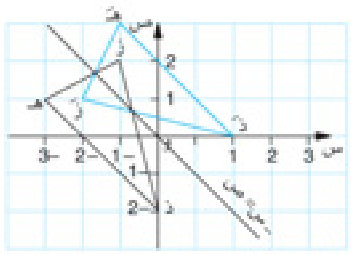
4-(أ)



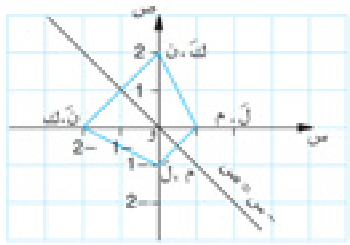
(ب)



(جـ)



(د)



5- (أ) النقاط ثابتة لو كانت تقع على خط الانعكاس

(ب) نعم

(جـ) نعم

6- أَ (1، -2)، بَ (3، -1)، جـَ (3، -2)، (أ، -ب)

7- أَ (-1، 2)، بَ (-3، 1)، جـَ (-3، 2)، (-أ، ب)

8- أَ (2، 1)، بَ (1، 3)، جـَ (2، 3)، (أ، ب)

9- (-أ، -ب)

10- (أ) الانعكاس على المحور السيني

(ب) الانعكاس على المحور الصادي

(جـ) 4 وحدات إلى اليمين بموازاة المحور السيني و 3 وحدات أسفل بموازاة المحور الصادي

11- (أ) (i) س = 3 (ii) س = -4 (iii) ص = -1

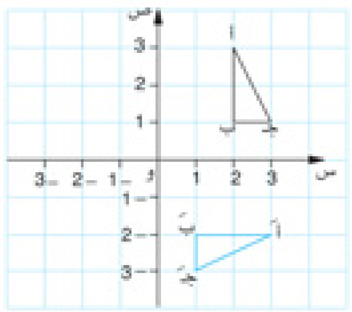
(iv) ص = 2 (v) ص = -س (vi) ص = س

(ب) (i) س = -3 (ii) س = 4 (iii) ص = 1

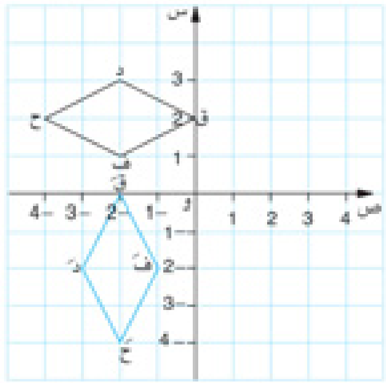
(iv) ص = -2 (v) ص = -س (vi) ص = س

تمرين 9 جـ

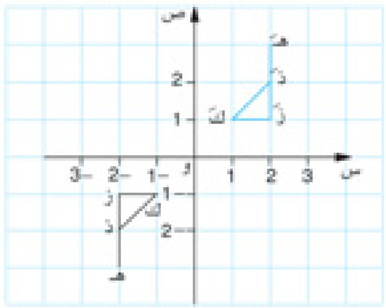
1- (أ)



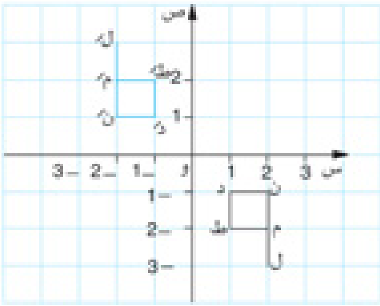
(ب)



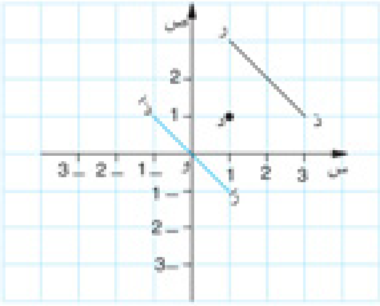
(جـ)



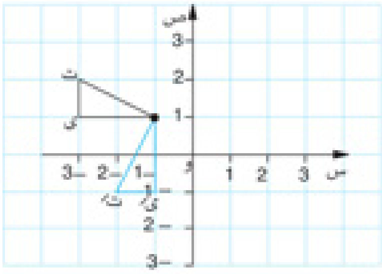
(د)



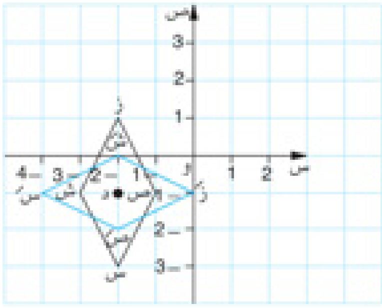
2- (أ)



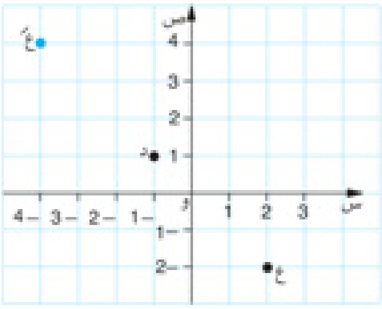
(ب)



(جـ)



(د)

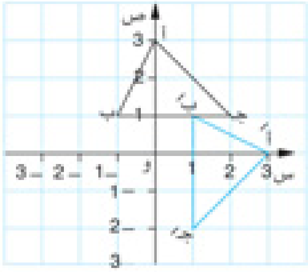


3- (أ) النقاط ثابتة لو كانوا على مركز الدوران

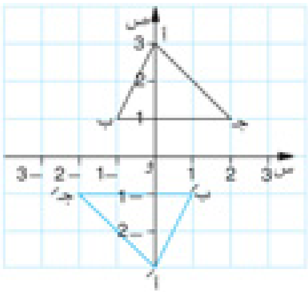
(ب) نعم

(جـ) نعم

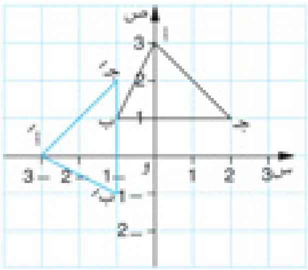
4- (أ)



(ب)



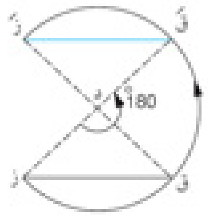
(جـ)



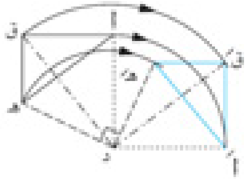
5- (أ) أ (3، صفر)، ب (1، 1)، حـ (1، -2)، (ب، -أ)
(ب) أ (صفر، -3)، ب (1، -1)، حـ (-2، -1)، (-أ، -ب)
(جـ) أ (-3، صفر)، ب (-1، -1)، حـ (-1، 2)، (-ب، أ)

6- (أ)

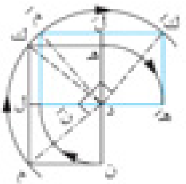
(ب)



(جـ)



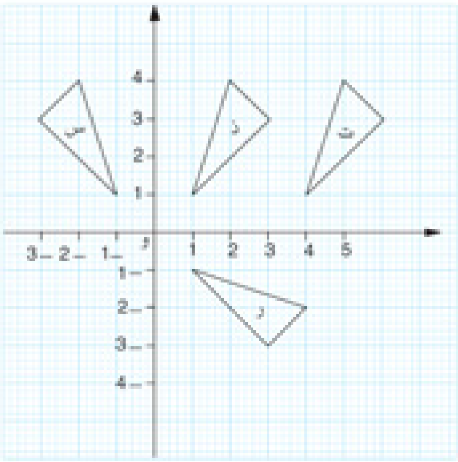
(د)



7- (أ) ص = -س + 2
(ب) ص = -س + 2
(جـ) ص = س - 2

8- (أ) الانعكاس على المحور الصادي
(ب) الانعكاس على المحور السيني
(جـ) وحدتان إلى أسفل بموازاة المحور الصادي
(د) دوران 180° حول المركز (و)

9- (أ، جـ)



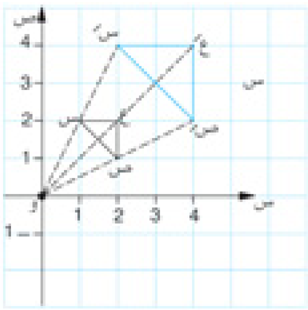
(د) التحويل هو الانعكاس في المحور الصادي

10- (أ) ح (3، 2)، ف (9، 4)
(ب) ص = $\frac{1}{3}$ س + 2
(جـ) دوران 90° في عكس اتجاه الساعة حول النقطة أ

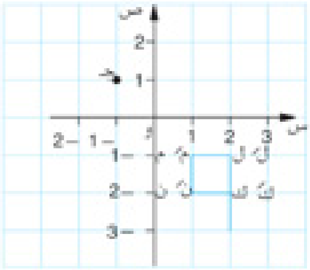
11- (أ) (i) انعكاس في الخط أو
(ii) دوران 90° في اتجاه الساعة حول (و)
(ب) (i) $\angle$ أ و ب = $\frac{360^\circ}{8}$ = 45° (زوايا عند نقطة)
(ii) $\angle$ أ ف ب = $\frac{45^\circ}{2}$ = $22\frac{1}{2}^\circ$ (الزاوية المركزية ضعف الزاوية المحيطية)

تمرين 9 د

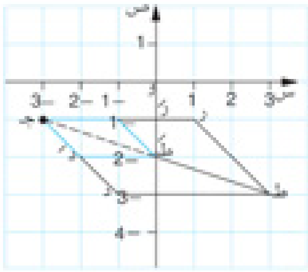
1- (أ)



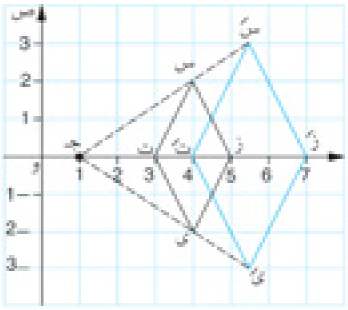
(ب)



(جـ)



(د)



2- سَ (2، 4)، صَ (4، 2)، عَ (4، 4)، (ك أ، ك ب)

3- (أ) النقطة الثابتة في مركز متغير البعد

(ب) نعم

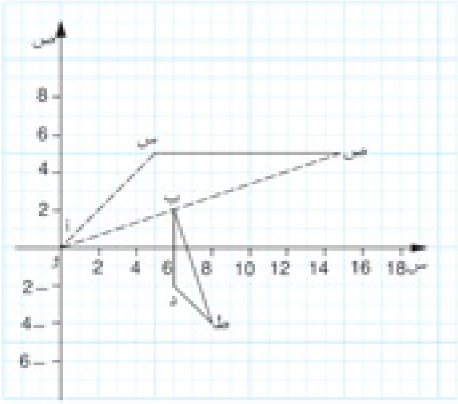
(جـ) معامل قياس = 1

(د) $\frac{\text{مساحة الصورة}}{\text{مساحة الجسم}}$ = (معامل قياس)^2

5- (6، 1)

6- (11، 7)

7-



8- 5 سم^2

9- (أ) 90 سم^2 (ب) 8 سم

10- (أ) ل (ب) 12 وحدة^2

(جـ) 3 وحدات^2

11- (أ) Δ حـ ط و (ب) Δ أ ء حـ

(جـ) الانعكاس في ء و (د) 20 سم^2

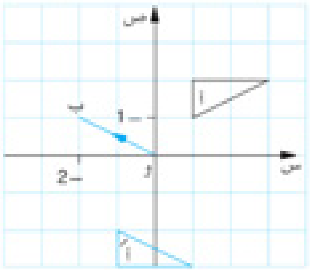
12- (أ) 9.6 سم

(ب) 25.6 سم^2

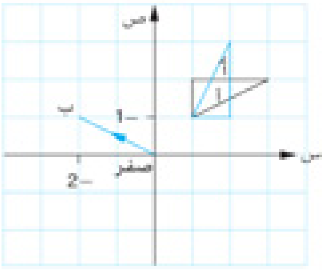
(جـ) متغير بعد، مركز أ بمعامل قياس $\frac{8}{5}$

تمرين 9 هـ

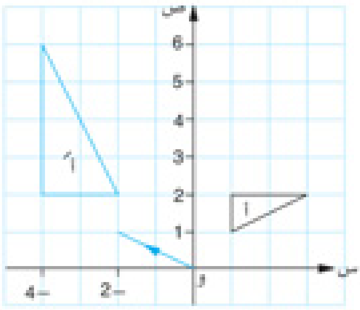
1- (أ)



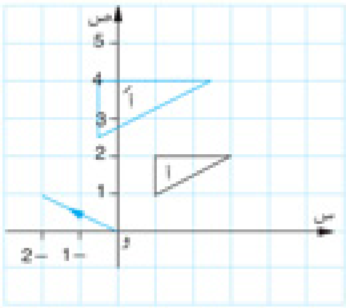
(ب)



(جـ)



(د)



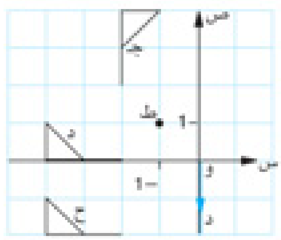
2- (أ) انتقال وحدة واحدة متوازيًا مع محور السينات يتبعه دوران في اتجاه عقارب الساعة 90° حول (-1، صفر). (هل يوجد احتمال أخر؟)

(ب) انعكاس في الخط س=1 يتبعه تحويل 3 وحدات بموازاة المحور الصادي. (هل توجد احتمالات أخرى؟)

(جـ) انعكاس في المحور السيني يتبعه تكبير معامله 2 ومركزه (و). (هل توجد احتمالات أخرى؟)

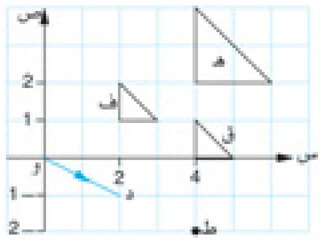
(د) دوران 180° حول (و) يتبعه تكبير معامله $\frac{1}{2}$ ومركزه (و). (هل توجد احتمالات أخرى؟)

3- (أ)، (ب)



(جـ) دوران 90 في عكس اتجاه الساعة

4- (أ)، (ب)

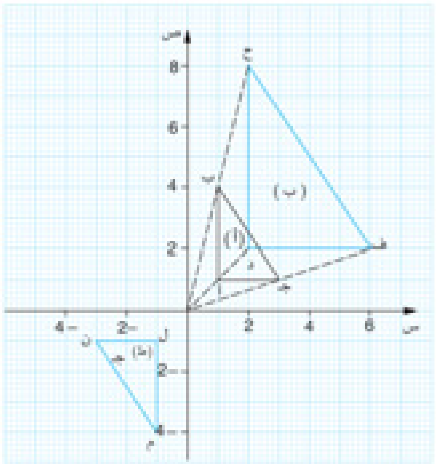


(جـ) تكبير بمعامل 2 مركزه و

5- انعكاس في محور الصادات.

6- (أ) (1، صفر) (ب) (2، 1)

7- (جـ) (ii) 180°

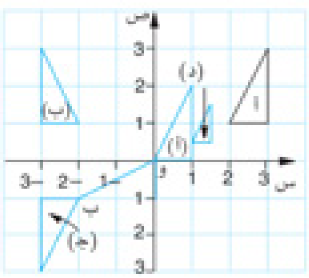


8- (أ) دوران في اتجاه حركة عقارب الساعة لـ س° عن د

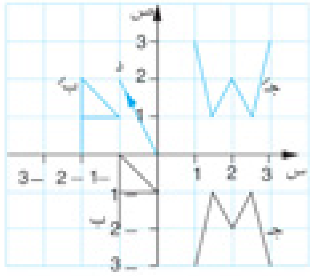
(ب) $\frac{5}{2}$ (جـ) 3.6 سم (د) 21.75 سم²

ورقة المراجعة

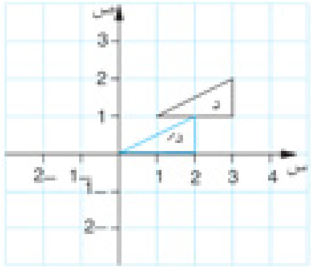
1-



2-



3- (أ)



(ب) °70

4- (أ) (2 ،4) (ب) (2 ،3)

(جـ) (-3، 2) (د) $\left(1\frac{1}{2}, 1\right)$

5- (أ) (i) ص = −س (ii) ص = −س

(ب) (i) ص = −س (ii) ص = −س

(iii) ص = س

6- د . دوران °180 حول (و)

7- (أ) 4 وحدات إلى اليمين بموازاة المحور السيني

(ب) انعكاس في المحور الصادي

(جـ) دوران °180 حول (و)

8- (أ) انعكاس في المحور السيني انتقال 4 وحدات لأسفل بموازاة المحور الصادي

(ب) Δ ب ص م