دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثانية بمرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

1441-1440 هـ
2020-2019 م

دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

1440-1441 هـ
2019-2020 م

التمهيد

تركز سلسلة رياضيات التعليم الأساسي والثانوي على دمج مهارات التفكير . وتقانة المعلومات .والتربية الوطنية ضمن تعليم وتعلم الرياضيات .

وتتكون السلسلة من ثلاثة كتب للشق الثاني من مرحلة التعليم الأساسي .وثلاثة كتب للصفوف الثلاثة من مرحلة التعليم الثانوي .وقد رتبت المادة ترتيبًا تربويًّا سليماً يُدعَّم فيه التفكير المجرد بأمثلة ملموسة .تُعرض على سبيل المثال في الفصل الخاص بالمعادلات الآنية الخطية مع الحلول الجبرية .وتوفر في ذلك المدخل الحلول البيانية الأمثلة التصويرية الملموسة .فتساعد الطلبة على فهم الحلول التى تم التوصل اليها جبرياً بشكل أفضل .

وقد روعي تقديم المفاهيم الواحد تلو الأخر لكي يستوعبها الطلبة بسهولة .وعُزِّز فهم المفاهيم بالاستخدام الحكيم للأمثلة المحلولة والتدريبات متدرجة الصعوبة .

تُرَكِّز كتب مرحلة التعليم الأساسي على اتفاق وتطبيق المهارات الأساسية بحيث . يُكون أساس سليم للدراسات التالية وتتضمن المهارات الأساسية التقدير. والحسابات الذهنية .ومعالجة البيانات .

وتستخدم في كل جزء من سلسلة الأنشطة لإرشاد الطلبة في كيفية إستخدام مهارات التفكير مثل الاستقراء. ولإكتشاف القوانين والنضريات الرياضية بأنفسهم .وليتعرفوا كذلك على كيفية استخدام برامج الحاسوب في عدد من الأنشطة .

ويتم حث الطلبة من خلال أنشطة وأمثلة محلولة مناسبة على استخدام استراتيجيات حل المشكلات. وتشجيع التعلم الذاتي مثل التقدير .وبناء النموذج .وإنشاء الجدول .وإعداد القائمة النظامية .والعمل إلى الخلف.واستخدام المعادلات .وتبسيط المشكلة .وتستخدم حيثما أمكن الأشكال البيانية لتذليل صعوبة المشكلات اللفظية ولجعلها أكثر طواعية للحل .

ولجعل الطلبة يألفون الكتب قبل استخدامها . نورد فيما يلي الملامح المميزة لهذه السلسة :

❖ يبدأ كل فصل بمقدمة قصيرة عن الموضوع . تليها قائمة بنواتج التعلم يمكن للطلبة استخدامها في تأكيد ما تعلموه بنهاية كل فصل من الكتاب .

❖ يقدم للطلبة أمثلة محلولة لتعزيز فهم المفاهيم ولتعريفهم بأنواع عديدة من المسائل . بما فيها التي تساعدهم على مراقبة تفكيرهم الذاتي

❖ تتضمن التمرينات متدرجة الصعوبات أسئلة مناسبة لمدى واسع من القدرات .وصُمِّمَت الأسئلة بشكل يجعل الطلبة يستخدمون التفكير المنطقي الاستدلالي والاستقرائي لحل المشكلات الرياضية .(ويمكن ان يختار المعلمون مسائل مختلفة للطلبة من ذوي القدرات المختلفة).

❖إن الرياضيات الممتعة أو استقصاء الرياضيات والموجودة في نهاية كل فصل من الكتاب (فيما عدا فصول المراجعة)مخصصة لغرس وتنمية مهارات التفكير . وستعرض أيضاً هذه الأنشطة بعض القضايا الوطنية دات الصلة على الطلبة .

❖ وتوجد ورقة للمراجعة في نهاية كل فصل من الكتاب (فيما عدا فصول المراجعة) حتى يتمكن الطلبة من قياس مستوى كفايتهم وباستمرار . ويجب أن يكون جميع الطلبة قادرين على إجابة الأسئلة في القسم (أ) بينما يستطيع الطلبة متوسطو القدرة على التعامل مع الفقرات في القسم (ب) . أما الطلبة ذوي القدرة الأعلى فيوفر لهم القسم (ج) التحدي المطلوب .

وبالإضافة للملامح الرئيسية لكل فصل .استخدمت امتحانات تقويمية في الكتاب كمادة للمراجعة العامة لتساعد على اعداد الطلبة للإمتحانات .وركزت خمسة فصول في كتاب الصف الثاني من مرحلة التعليم الثانوي على المراجعة. بينما يحتوي كتاب الصف الثالث من مرحلة التعليم الثانوي على 15 قسماً في الفصل الثامن للمراجعة . تتراوح بين الحساب والجبر الى التحويل وحل المشكلات .

تُعَرَّف في جميع انحاء هذه السلسلة :

❖ مهارات وعمليات التفكير

❖ تقانة المعلومات

❖ التربية الوطنية

عن طريق الإيقونات التالية :


لتطبيق مهارات التفكير


لتطبيق تقانة المعلومات


لرسائل التربية الوطنية

قائمة المحتويات

الرموز الرياضية
Mathematical Notation

1 - رموز المجموعة

$\ni$: ينتمي إلى

$\not\ni$: لا ينتمي إلى

{س$_1$، س$_2$، ....} : مجموعة من العناصر س$_1$ ، س$_2$ ،......

{س : .....} : مجموعة كل س حيث

ن(أ) : عدد العناصر في المجموعة (أ)

$\varnothing$: المجموعة الخالية

ش : المجموعة الشاملة

أَ : مكملة المجموعة أ

ك : مجموعة الأعدادالكلية {0، 1، 2، 3....}

ص : مجموعة الأعداد الصحيحة {0، ±1 ، ±2 ، ±3 ، .....}

ص$^+$: مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة { 1 ، 2 ، 3.......}

ح : مجموعة الأعداد الحقيقية

ن : مجموعة الأعداد النسبية

$\nsupseteq$: مجموعة جزئية من مجموعة أخرى

$\supset$: مجموعة جزئية فعلية

$\supseteq$: ليست مجموعة جزئية من

$\not\supset$: ليست مجموعة جزئية فعلية

$\cup$: اتحاد المجموعات

$\cap$: تقاطع المجموعات

] أ ، ب [: فترة مغلقة تعنى { س $\in$ ح : أ $\leq$ س $\leq$ ب }

] أ ، ب) : فترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة

{ س $\in$ ح : أ $\leq$ س $<$ ب }

(أ ، ب [: تعنى أن { س $\in$ ح : أ $<$ س $\leq$ ب }

(أ ، ب) : فترة مفتوحة { س $\in$ ح : أ $<$ س $<$ ب }

2 - رموز الربط (المقارنة)

$=$: تساوي

$\neq$: لا تساوي

$\equiv$: تكافئ

$\approx$: تقريباً

$\propto$: يتناسب

$>$: أقل من

$\geqslant$: أقل من أو تساوي

$\ngtr$: ليست أقل من

$<$: أكبر من

$\leqslant$: أكبر من أو تساوي

$\nless$: ليست أقل من

∞ : مالا نهاية

3 - العلميات

أ + ب : أزائد ب

أ - ب : أناقص ب

أ$\times$ب ، أب ، أ . ب : تعني أ مضروب في ب

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، أ ÷ ب ، أ / ب : أمقسوم على ب

أ : ب : نسبة أ إلي ب

$\sqrt{\text{أ}}$: الجدر التربيعي الموجب للعدد الحقيقي أ حيث أ $>$ 0

$|\text{أ}|$: القيمة المطلقة للعدد الحقيقي أ

نظام الوحدات العالمية SI Units

يستخدم نظام الواحدات العالمية سبع وحدات أساسية ، وتُشتق جميع الوحدات الأخرى من هذه الوحدات الأساسية بضرب أو قسمة وحدة في وحدة أخرى .

الكمية	اسم الوحدات الأساسية	رمز الوحدة
طول	متر	م
كتلة	كيلوجرام	كجم
زمن	الثانية	ث
التيار الكهرئائي	أمبير	أ م
درجات الحرارة الترمومتر	كيلفين	ك
شدة الإضاءة	شمعة	س
كمية المادة	مول	مل

نستخدم نظام الوحدات الثلاث الأخيرة أساساً في الأعمال العلمية المتخصصة ، أما في الأغراض الشائعة فيتم قياس الحرارة على مقياس سلسيوس (المئوي) وتكون فواصل الحرارة على مقياس كلفين وسلسيوس متشابهة .

يمكن الحصول على مضاعفات واختصارات الوحدات الأساسية عن طريق إضافة البادئة المتفق عليها إلى الوحدة المستخدمة. نضيف عادة البادئة إلى الوحدة بحيث يظل الجزء العددي من الكمية ما بين 0.1 ، 1000 (أي أننا لا نصغر أو نكبر العدد بدرجة كبيرة) والاستثناء هو الكيلو جرام الذي يعتبر وحدة أساسية في حد ذاته.

1,000	تكتب 1000
12,005	تكتب 12005
1,000,500	تكتب 1000500
0.00394	تكتب 0.00394

بعض جداول التحويل
Some Conversion Tables

الطول

10 ملليمتر (مم) = 1سم (سم)
10 سنتيمتر = 1 ديسمتر (دس)
10 ديسمتر = 1 متر (م)
10 متر = 1 ديكامتر (dam) (دام)
10 ديكامتر = 1 هيكتومتر (هكم)
10 هيكتو متر = 1 كيلومتر (كم)

الكتلة

10 مليجرام مج = سنتيجرام (س. ج)
10 سنتيجرام = 1 ديسجرام (د ج)
10 ديسيجرام = 1 جرام (ج)
10 جرام = 1 ديكاجرام
10 ديكاجرام = 1 هيكتو جرام (هـ ج)
10 هكتوجرام = 1 كيلو جرام (كجم)
1000 كيلو جرام = 1 طن (ط)

المساحة

1 هكتار (هك) = 10000 م^2
100 هكتار = 1 كم^2

الحجم والسعة

1000 سم^3 = 1 لتر (ل)

الزمن

الدقيقة (ق) = 60 ثانية (ث)
الساعة (س) = 60 دقيقة
1 يوم = 24 ساعة
1 أسبوع = 7 أيام
1 عام = 365 يوم
1 سنة كبيسة = 366 يوم

1 المتباينات

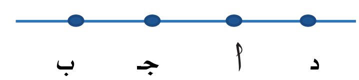
مفهوم المتباينة:

درسنا في السابق الإشارتين > ، < وعرفنا أنه إذا كانت 5 أكبرمن 3 تكتب 5 > 3 ، 5 اصغر من 11 تكتب 5 < 11

ويمكن القول بصفة عامة إذا كانت أ ، ب عددين حقيقيين ، أ > ب فأن أ– ب >0 (عدداً موجباً)

وأن جـ < د فأن جـ - د < 0 (عدداً سالباً)

وعند تمثيل إشارتي > ، < على خط الأعدادنلاحظ الأتي



خواص المتباينات :

لإي ثلاثة أعداد حقيقية أ، ب، جـ .

1- أ < ب ⟸ أ+جـ < ب+جـ

2- أ < ب ⟸ أ–جـ < ب–جـ

3- أ < ب ، جـ > 0 ⟸ أ جـ < ب جـ

4- أ < ب ، جـ < 0 ⟸ أ جـ > ب جـ

5- أ < ب ⟸ –ب < –أ

6- إذا كانت أ ،ب موجبتين أو سالبتين فإن :

أ > ب ⟸ $\frac{1}{ب} > \frac{1}{أ}$

فمثلاً:

إذا كانت 4 < 9 فإن 3+4 < 3+9 ⟸ 7 < 12

وإذا كانت -7 > -31 فإن -7 + 2 > -31 + 2 ⟸ -5 > -29

وإذا كانت 3>0 فإن 3 + (-8) > 0 + (-8) ⟸ -5 > -8

7- إذا كانت أ < ب ، ب < جـ فإن أ < جـ

8- إذا كانت أ<ب ، جـ <د فإن أ+ جـ < ب+ د

في نهاية الفصل سوف تكون قادراً على :
التعرف على الفترات وحالاتها .
توضيح المتباينة على خط الأعداد .
حل المتباينات باستخدام العمليات الأساسية الأربعة .
حل المتابينتين الآنيتين .
حل المتباينات من الدرجة الثانية في مجهول واحد بأكثر من طريقة

1-1 الفترات Intervels

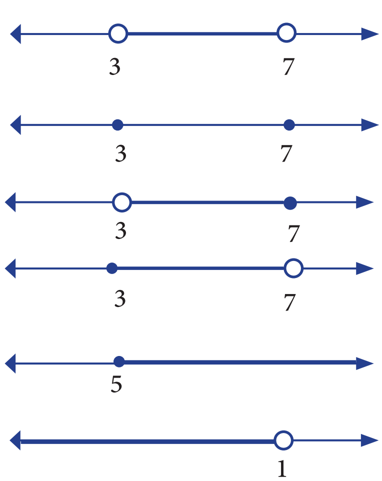
نفرض أن س متغير حقيقي يأخذ قيماً مختلفة لمجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ممثلة بيانياً بجزء متصل من الخط الحقيقي ومحصور بين الحدين أ،ب.

ولأن مثل هذه المجموعة تحتوي على عدد لا نهائي من النقط (الأعداد) فإنه يقال للمتغير س بأنه متصل بين الحدين المذكورين وتسمى بالفترة وهناك حالات مختلفة للفترات ممثلة بيانياً بالأشكال الموضحة :

ولدراسة حل المتباينات يحتاج الى معرفة وصف فترات الحل والتي يمكن عرضها كالآتي:

منتهية	(أ،ب)	{س: أ < س < ب}	أ ب
	[أ،ب]	{س: أ ≤ س ≤ ب}	أ ب
	[أ،ب)	{س: أ ≤ س < ب}	أ ب
	(أ،ب]	{س: أ < س ≤ ب}	أ ب
لا نهائية	(أ، ∞)	{س: س > أ}	أ
	[أ، ∞)	{س: س ≥ أ}	أ
	(−∞، ب)	{س: س < ب}	ب
	(−∞، ب]	{س: س ≤ ب}	ب
	(−∞، ∞)	مجموعة الأعداد الحقيقية	ح

فمثلاً:



المجموعة س= {س: 3< س <7}=(3،7)

المجموعة ص= {س: 3≤ س ≤7}=[3،7]

المجموعة ل= {س: 3< س ≤7}=(3،7]

المجموعة ع = {س: 3≤ س <7}=[3،7)

المجموعة م = {س: س ≥ 5}=[5،∞)

المجموعة ك = {س: س <1}=(−∞،1)

1-1-1 المتباينات على خط الأعداد

Inequalities on a NumberLine

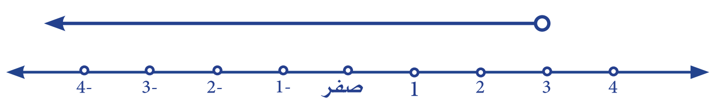
أي عدد يمكن تمثيله على خط الأعداد

الأعداد التي تقع على يمين عدد معين س تعتبر أكبر من س والتي تقع على اليسار تعتبر أصغر من س.

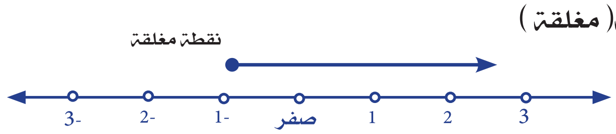
على سبيل المثال الأعداد الأكبر من 1(بمعنى س >1)يمكن بيانها على خط الأعداد كما يلي

النقطة (المفتوحة) تعني أن العدد الذي تحتها مباشرة غير متضمن فيها

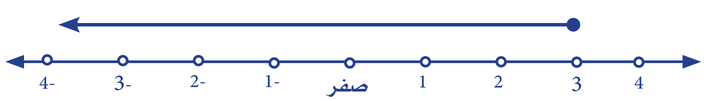
وبالمثل مجموعة الأعداد الأقل من 3 يمكن توضيحها كما يلي :



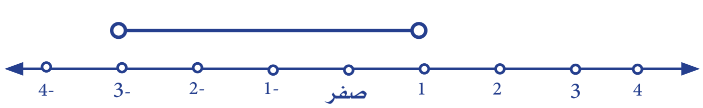
بالنسبة لـ س ≥ 1- ، فان العدد 1- متضمن وممثل على خط الأعداد بنقطة(مغلقة)



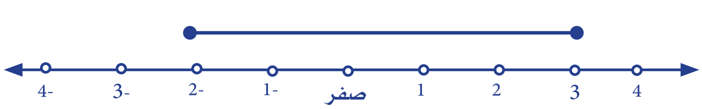
وبالمثل س ≤ 3 يمكن تمثيلها كما يلي



الأعداد التي تقع بين عددين معطيين مثل 3- < س < 1 يمكن أيضاً تمثيلها على خط الأعداد كما يلي



ومن ناحية أخرى 2- ≥ س ≥ 3- يمكن ثمتيلها كما يلي



ملحوظة

في هذا الكتاب لاتتضمن النقطة المفتوحة القيمة التي عند طرفها

في هذا الكتاب تتضمن النقطة المغلقة القيمة الموجودة عند طرفها

تمرين 1 -أ

1 مثل كلاً ممايأتي على خط الأعداد:

أ $1 < \text{س}$ ب $-4 < \text{س}$ ز $-1 \leqslant \text{س} \leqslant 1$ ط $-2 < \text{س} < 3$

جـ $9 > \text{س}$ د $-9 > \text{س}$ حـ $5 \leqslant \text{س} \leqslant 6$ ى $-6 \leqslant \text{س} \leqslant -2$

هـ $6 \geqslant \text{س}$ و $-6 \leqslant \text{س}$

1 - 2 حل المتباينة عن طريق الجمع أو الطرح:

لندرس المتباينة $4 > 2$

عند اضافة العدد 3 الى كلا الطرفين

نحصل على 4 $\boxed{3+}$ ؟ 2 $\boxed{3+}$

$$7 > 5$$

وإذا طرح العدد3 من كليهما

نحصل على 4 $\boxed{3-}$ ؟ 2 $\boxed{3-}$

$$1 > -1$$

وبالمثل لندرس المتباينة $-2 < 2$

عند اضافة العدد 4 الى كلا الطرفين

نحصل على -2 + $\boxed{4}$ ؟ 2 $\boxed{4+}$

$$2 < 6$$

ونطرح العدد 4 من كليهما

نحصل على -2 $\boxed{4 -}$ ؟ 2 $\boxed{4-}$

$$-6 < -2$$

ولذلك

> جمع أو طرح عدد من كلا الطرفين في متباينة يترك علامة التباين بلا تغيير

مثال 1:

حل المتباينة: س − 1 > 4

الحل :

س − 1 > 4

س − 1 $\boxed{+1}$ > 4 $\boxed{+1}$

∴ س > 5

ملحوظة:

نضيف 1 إلى طرفي المتباينة

مثال 2:

حل المتباينة ص − 2 < -1

الحل :

ص − 2 < -1

ص − 2 $\boxed{+2}$ < -1 + $\boxed{2}$

∴ ص < 1

ملحوظة:

نضيف 2 إلى طرفي المتباينة

مثال 3:

حل المتباينة: (أ) أ + 2 > 3 (ب) ب+5 < -3

الحل :

(أ) أ + 2 > 3

أ + 2 $\boxed{-2}$ > 3 $\boxed{-2}$

∴ أ > 1

(ب) ب + 5 < -3

ب + 5 $\boxed{-5}$ < -3 $\boxed{-5}$

ب < -8

ملحوظة:

نطرح 2 من طرفي المتباينة

نطرح 5 من طرفي المتباينة

تمرين 1- ب

حل كلاً من المتباينات الآتية ثم مثل اجابتك على خط الأعداد:

أ) أ+ 4 > 2

ب) ب - 4 ≤ 4

ج) ق - 6 ≥ -3

د) هـ - 2 < -7

هـ) س+ 4 ≤ 3

و) س + 3 ≥ 2

3 - 1 حل المتباينة عن طريق الضرب أو القسمة:

Solving Inequalities by Multiplication or Division

نعلم ان المتباينة $4 > 2$ حقيقية . ماذا يحدث إذا ضربنا طرفي المتباينة في عدد موجب وليكن 2 مثلاً؟ هل ستظل العبارة السابقة حقيقية إذا استبقينا علامة ($>$) ؟

$$4 > 2$$

$$4 \times 2 \;؟\; 2 \times 2$$

نحصل على $8 > 4$ وهي عبارة حقيقية

إذا قسمنا بعد ذلك كلا الطرفين في المتباينة على عدد موجب وليكن 2نحصل على :

$$4 > 2$$

$$4 \div 2 \;؟\; 2 \div 2$$

أي $2 > 1$ وهي عبارة حقيقية أيضاً

ولذلك

> ضرب أو قسمة طرفي المتباينة في أو على عدد موجب يترك علامة التباين بدون تغيير

ملحوظة:

لا تتغير علامة التباين

مرة ثانية لاتتغير علامة التباين

تنعكس علامة التباين

دعنا ننظر مرة أخرى إلى المتباينة $4 > 2$. إذا ضربنا كلا من طرفي المتباينة في عدد سالب وليكن (-2)مثلاً. هل ستضل العبارة السابقة حقيقية إذا استبقينا علامة ($>$)؟

نحصل على $4 > 2$

$$\therefore 4 \times (-2) \;؟\; 2 \times (-2)$$

$$-8 < -4$$

حاول قسمة كلاالطرفين في المتباينه $4 > 2$ على عدد سالب ،وليكن (-2) ماذا يمكنك استنتاجه؟

بصفة عامة .

> ضرب أو قسمة طرفي المتباينة في أو على عدد سالب يعكس علامة التباين
> بمعنى :
> $>$ تتغير $<$
> $<$ تتغير $>$
> $\geq$ تتغير $\leq$
> $\leq$ تتغير $\geq$

مثال 4:

حل المتباينات الآتية:

(أ) $\frac{م}{2} \geqslant 9$ (ب) $\frac{ذ}{3} > -4$ (جـ) $-\frac{أ}{4} < 8$

الحل :

(أ) $\frac{م}{2} \geqslant 9$

$\boxed{2\ \times}\ \frac{م}{2} \geqslant 9\ \boxed{\times\ 2}$

$م \geqslant 18$

(ب) $\frac{ذ}{3} > -4$

$\boxed{3\ \times}\ \frac{ذ}{3} > -4\ \boxed{\times\ 3}$

$ذ > -12$

(جـ) $-\frac{أ}{4} < 8$

$\boxed{(-4)} \times -\frac{أ}{4} > 8\ \boxed{\times\ -4}$

$أ > -32$

ملحوظة:

(أ) اضرب طرفي المتباينة * 2

(ب) اضرب طرفي المتباينة * 3

(ج) اضرب طرفي المتباينة * -4

مثال 5:

حل المتباينات الآتية:

أ) 3س ⩾ 12 ب) 5ص ⩽ – 10 جـ) - 2أ > 4

الحل :

أ) 3س ⩾ 12

$\frac{3س}{\boxed{3}} \geqslant \frac{12}{\boxed{3}}$

س ⩾ 4

ب) 5ص ⩽ – 10

$\frac{5ص}{\boxed{5}} \leqslant \frac{-10}{\boxed{5}}$

ص ⩽ -2

جـ) - 2أ > 4

$\frac{-2أ}{\boxed{-2}} > \frac{4}{\boxed{-2}}$

أ > -2

ملحوظة:

(أ) اقسم طرفي المتباينة على 3

(ب) اقسم طرفي المتباينة على 5

(جـ) اقسم طرفي المتباينة على - 2 إن ذلك يعكس علامة التباين

تمرين 1 -جـ

1 –انقل واكمل المتباينات الآتية :

أ $\frac{أ}{2} > 5$

$\frac{أ}{2} \times \boxed{} > 5\times \boxed{}$

أ> $\boxed{}$

ب $\frac{-ب}{3} \geqslant 2$

$\frac{-ب}{3} \times (-3)\ \boxed{}\ 2\times(-3)$

ب $\boxed{}$ -6

2) حل :

أ) $\frac{\text{ص}}{3} \geqslant 6$ ب) $\frac{\text{م}}{4} < 4$

جـ) $\frac{\text{د}}{3} \geqslant -3$ د) $\frac{\text{هـ}}{5} \geqslant -\frac{2}{5}$

3) حل المتباينات الأتية :-

أ) $2\text{أ} < 4$ ب) $3\text{ب} < 18$

جـ) $-4\text{م} \leqslant 8$ د) $-3\text{هـ} \geqslant -9$

4) حل كلاً من المتباينات الأتية :

أ) $-2\text{ع} \geqslant 8$ ب) $\frac{\text{س}}{8} \leqslant -3$

جـ) $-\frac{\text{ز}}{5} < -3$ د) $-\frac{\text{ى}}{4} \geqslant 3$

4-1 حل المتباينات التي تتضمن اكثر من عملية واحدة :

مثال 6

حل كلاً من المتباينات الأتية:

أ) $2\text{أ} + 3 \leqslant 1$ ب) $3(\text{ص} + 2) \geqslant 2\text{ص} + 1$

جـ) $\frac{2\text{س}}{7} \geqslant 4$ د) $\frac{\text{م} + 3}{2} < 4$

الحل:

أ) $2\text{أ} + 3 \leqslant 1$

$2\text{أ} + 3 - 3 \leqslant 1 - 3$

$2\text{أ} \leqslant -2$

$\frac{2\text{أ}}{2} \leqslant \frac{-2}{2}$

$\text{أ} \leqslant -1$

ب) $3(\text{ص} + 2) \geqslant 2\text{ص} + 1$

$3\text{ص} + 6 \geqslant 2\text{ص} + 1$

$3\text{ص} + 6 - 2\text{ص} \geqslant 2\text{ص} + 1 - 2\text{ص}$

$\text{ص} + 6 \geqslant 1$

$\text{ص} + 6 - 6 \geqslant 1 - 6$

$\text{ص} \geqslant -5$

جـ) $\frac{2\text{س}}{7} \geqslant 4$

$\frac{2\text{س}}{7} \times 7 \geqslant 4 \times 7$

$2\text{س} \geqslant 28$

$\frac{2\text{س}}{2} \geqslant \frac{28}{2}$

$\text{س} \geqslant 14$

د) $\frac{\text{م} + 3}{2} < 4$

$\frac{\text{م} + 3}{2} \times 2 < 4 \times 2$

$\text{م} + 3 < 8$

$\text{م} + 3 - 3 < 8 - 3$

$\text{م} < 5$

ملحوظة

(أ) اطرح 3 من الطرفين . اقسم الطرفين على 2.

(ب) اطرح 2ص من الطرفين. اطرح 6 من الطرفين

(جـ) اضرب الطرفين في 7. اقسم الطرفين على 2

(د) اضرب الطرفين في 2، اطرح 3 من الطرفين

مثال 7

حل كلاً من المتباينات التالية :

أ) $-\frac{1}{4}\text{ر} + 5 < 12$ ب) $-3\text{ص} - 7 \geqslant 2$

ج $-\frac{2}{3}ح \leq 4$ 　　 د $\frac{3-ن}{2} < 5$

الحل :

أ) $-\frac{1}{4}ر + 5 > 12$

$-\frac{1}{4}ر + 5 - 5 > 12 - 5$

$-\frac{1}{4}ر > 7$

$-\frac{1}{4}ر \times (-4) < 7 \times (-4)$

$ر < -28$

ب) $-3ص - 7 \leq 2$

$-3ص - 7 + 7 \leq 2 + 7$

$-3ص \leq 9$

$\frac{-3ص}{-3} \geq \frac{9}{-3}$

$ص \geq -3$

ملحوظة:

(أ) اطرح 5 من الطرفين . ضرب الطرفين في -4 غير > أي <.

(ب) اجمع 7 إلى الطرفين قسمة الطرفين على -3. غير $\leq$ إلى $\geq$

ج) $-\frac{2}{3}ح \leq 4$

$-\frac{2}{3}ح \times 3 \leq 4 \times 3$

$-2ح \leq 12$

$\frac{-2ح}{-2} \geq \frac{12}{-2}$

$ح \geq -6$

د) $\frac{3-ن}{2} < 5$

$\frac{3-ن}{2} \times 2 < 5 \times 2$

$3-ن < 10$

$3-ن-3 < 10-3$

$-ن < 7$

$\frac{-ن}{-1} > \frac{7}{-1}$

$ن > 7$

ملحوظة:

(ج) اضرب الطرفين في 3 . قسمة الطرفين على -2 يغير $\leq$ إلى $\geq$

(د) اضرب الطرفين في 2 .اطرح 3 من الطرفين . قسمة الطرفين على -1 يغير < إلى >

تمرين (1- ى)

1 – حل :

أ $5س + 2 > 3س + 8$ 　　 ج $4(د + 3) \leq 2(د - 6)$

ب $5(د - 2) \geq 3(د + 4)$ 　　 د $\frac{3س}{2} \geq 6$

هـ $\frac{ر+3}{3} \geq 6$

2 – حل كلاً من المتباينات الآتية :

أ $-\frac{1}{3}أ - 1 < -1$ 　　 ب $\frac{-2}{5}ب + 2 \geq -2$

ج $\frac{3 - ز}{4} < 3$ 　　 د $\frac{1-2س}{3} > 4$

3- حل كلاً من المتباينات الآتية :

أ $6(5 + د) \leq 36$ 　　 ب $5(ف + 5) > 3(ف - 1)$

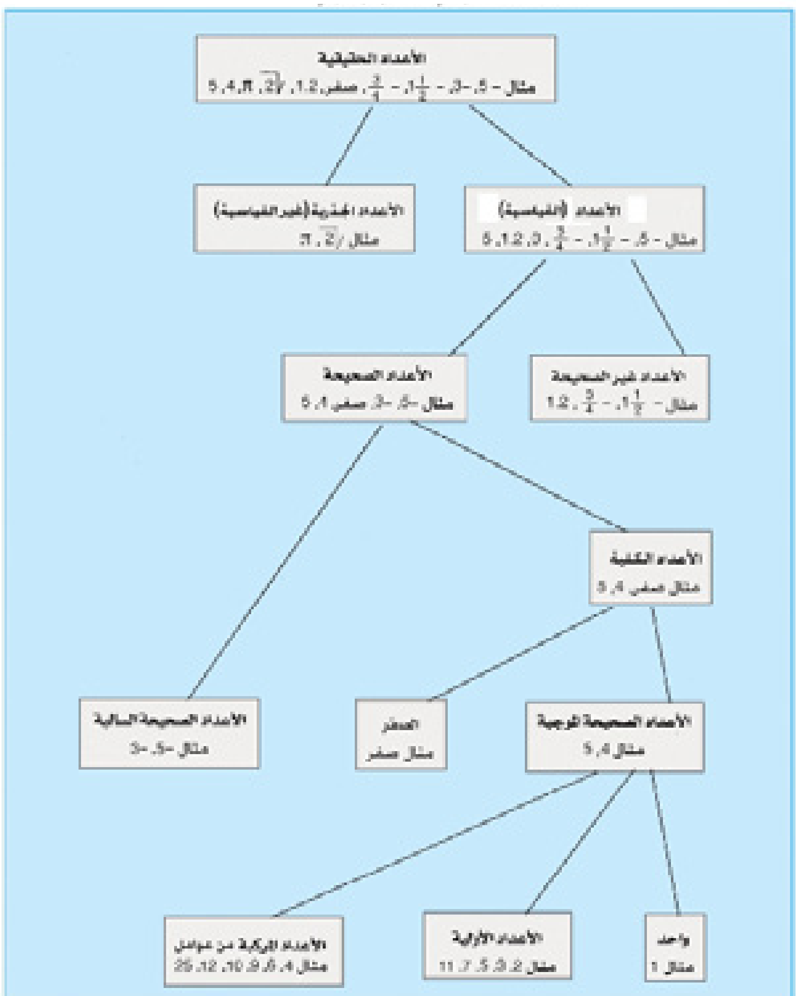
ج $\frac{7س}{6} \leq 21$ 　　 د $\frac{5ص+3}{2} < 9$

ى $\frac{-1}{3}ى < ى + 4$ 　　 و $7ك > \frac{3}{2}ك + 11$

5-1 حل المتباينتين أو أكثر في مجهول واحد آنياً

Solving Tow or More Inequalities in One Unknown Simulianeously

قبل حل المزيد من المتباينات ، سنستعيد إلى الذاكرة العلاقة بين الأنواع المختلفة للأعداد والتي تتلخص فيما يلي



مثال 8

حل المتباينتين الآتيتين: $\text{س} > 13$ و $2\text{س} + 3 \leqslant 39$

الحل :

لدينا $\text{س} > 13$ و $2\text{س} + 3 \leqslant 39$

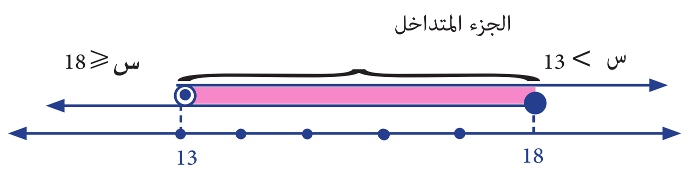
$2\text{س} \leqslant 39 - 3$

$2\text{س} \leqslant 36$

$\frac{2\text{س}}{2} \leqslant \frac{36}{2}$

$\text{س} \leqslant 18$

يمكن رسم خط الأعداد لإيجاد قيم س التي تحقق كلا المتباينتين . $\text{س} > 13$
$\text{س} \leqslant 18$



يمثل الجزء المتداخل من الخطين قيم س التي تحقق كلا المتباينتين ولهذا فإن الحل هو

$13 < \text{س} \leqslant 18$

> **ملحوظة:**
>
> كلمة آنيًا تعني إيجاد جميع قيم س التي تحقق كلاً من المتباينتين في نفس الوقت
>
> نطرح 3من كلا الطرفين
>
> اقسم كلا الطرفين على 2
>
> إن ذلك يعني تضمن المتباينتين الرقم 18 وليس الرقم 13

مثال 9

أوجد جميع قيم س الصحيحة التي تحقق المتباينة $4\text{س} - 5 < 29 \leqslant 5\text{س} - 6$

الحل :

$4\text{س} - 5 < 29 \leqslant 5\text{س} - 6$

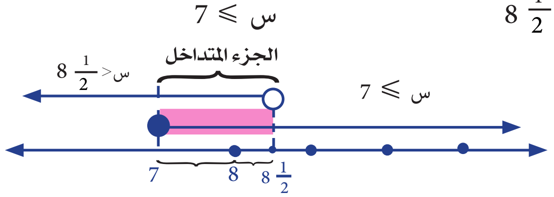
$4\text{س} - 5 < 29$ و $29 \leqslant 5\text{س} - 6$

$4\text{س} < 34$ و $35 \leqslant 5\text{س}$

$\text{س} < \frac{34}{4}$ و $\frac{35}{5} \leqslant \text{س}$

$\text{س} < \frac{17}{2}$ و $7 \leqslant \text{س}$

$\therefore \text{س} < 8\frac{1}{2}$ و $7 \leqslant \text{س}$



$\therefore 7 \leqslant \text{س} < 8\frac{1}{2}$

$\therefore$ **قيم س الصحيحة هي** 7 ، 8

> **ملحوظة:**
>
> ويعني ذلك أن س هي عدد صحيح
>
> ارسم خط الاعداد للحصول على المنطقة المتداخلة

مثال 10

أوجد قيم س الصحيحة الممكنة إذا كانت : $3 < \text{س} - 1 < 7$ ، $8 < 2\text{س} + 1 < 16$

الحل :

$3 < \text{س} - 1 < 7$

$3 < \text{س} - 1$ و $\text{س} - 1 < 7$

$4 < \text{س}$ و $\text{س} < 8$

$\therefore 4 < \text{س} < 8$

$8 < 2\text{س} + 1 < 16$

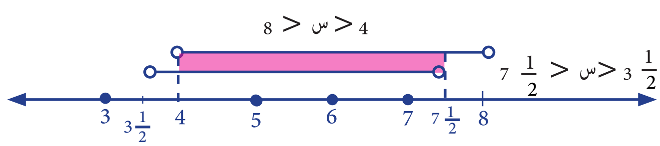
$8 < 2\text{س} + 1$ و $2\text{س} + 1 < 16$

$7 < 2\text{س}$ و $2\text{س} < 15$

$\frac{7}{2} < \text{س}$ و $\text{س} < \frac{15}{2}$

$3\frac{1}{2} < \text{س}$ و $\text{س} < 7\frac{1}{2}$

$\therefore 3\frac{1}{2} < \text{س} < 7\frac{1}{2}$



$\therefore$ قيم س الصحيحة هي 5 ، 6 ، 7

تمرين 1 - هـ :

1 - حل المتباينتين الآتيتين آنياً :

أ $\text{س} > 12$ ، $3\text{س} + 4 \le 55$

ب $\text{س} < 6$ ، $12\text{س} + 23 \ge 35$

جـ $2\text{س} < -4$ ، $6\text{س} + 32 \ge 8$

د $3\text{س} < 9$ ، $5\text{س} - 4 > 6$

هـ $4\text{س} \ge 10$ ، $3\text{س} - 9 \ge 6$

2 - حدد قيم س الصحيحة التي تحقق

أ $5\text{س} + 6 < 30 \le 7\text{س} + 9$

ب $-14 < 10\text{س} + 9 < 9$

3 - حدد قيم س الصحيحة التي تحقق :

أ $3 < \text{س} < 6$ ، $8 \le 2\text{س} \le 17$

ب $7 < \text{س} + 2 \le 9$ ، $10 \le 2\text{س} - 1 < 15$

جـ $-5 \le 3 - \text{س} \le -2$ ، $-11 \le 10 - 3\text{س} \le 1$

د $4\text{س} + 6 \le 5\text{س} - 1 \le 4\text{س} + 8$

6-1 متباينات من الدرجة الثانية في مجهول واحد :

متباينة الدرجة الثانية في المتغير الواحد س تكون على أحد الصور الآتية:

أس^2 + ب س + جـ > 0   أس^2 + ب س + جـ < 0

أس^2 + ب س + جـ ≥ 0   أس^2 + ب س + جـ ≤ 0

حيث ا ،ب ،جـ ∈ ح ،ولكن أ ≠ 0

ويمكننا حل المتباينة من الدرجة الثانية في س ببساطة إذا امكن تحويل مقدار الطرف الأيمن أس^2 + ب س + جـ الى حاصل ضرب مقدارين مثل :

(دس + هـ) (ن س+ م)

وهي طريقة تحويل المقدار الثلاثي الى حاصل ضرب مقدارين من الدرجة الأولى والتي تمت دراستها في مرحلة التعليم الأساسي .

فمثلا:

2س^2 - س-1 = (2س+1)(س-1)

3س^2 -8س-35= (3س+7)(س-5)

س^2 -4= (س-2)(س+2)

س^2 +3س-10=(س-2)(س+5)

وفي كلتا الحالتين نحتاج إلى خاصية ضرب عددين حقيقيين أ،ب وهي

1. إذا كان أ،ب عددين موجبين فإن أ×ب > 0
2. إذا كان أ،ب عددين سالبين فإن أ×ب > 0
3. إذا كان أ > 0 وكان ب < 0 أ×ب < 0
4. إذا كان أ < 0 وكان ب > 0 أ×ب < 0

والأمثلة الآتية توضح طريقة إيجاد مجموعة الحل لهذا النوع من المتباينات.

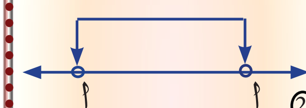
مثال 11

حل المتباينة 2س^2 - س ≤ 1 مع الرسم

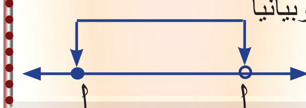
الحل :

المتباينة 2س^2 - س ≤ 1

① { س : أ < ب}
تسمى فترة محدودة مفتوحة ويعبر عنها بـ (أ،ب) وبيانياً



② { س : أ ≤ س < ب}
تسمى محمودة مفتوحة من اليسار ويعبر عنها بـ [أ ، ب) وبيانياً



نبدأ بتحليل الطرف الأيمن وتحويله إلى مقدارين من الدرجة الأولى كالآتي :

(2س+1)(س-1) ≥ 0

ثم نبحث متى يكون حاصل ضرب المقدار (2س+1) في المقدار (س-1) ليعطي ناتج يكون أكبر من أو يساوي صفر .

" علمنا أنه إذا اتفقت المعاملات في الإشارة فإن حاصل الضرب يكون موجباً وإذا اختلفت المعاملات في الإشارة فإن حاصل الضرب يكون سالباً ".

وهذا يحدث إذا كان كلا الحدين (2س+1) و(س-1) موجباً ، أو كان الحد (2س+1)< 0. وكذلك الحد(س-1) < 0 هي عبارة عن مجموعة حل متباينة متكونة من جزئين كل منهما متكون من جزئين.

أي أن مجموعة الحل هي :

({س:2س+1 >0}∩{س:س -1 >0 })∪ ({س:2س+1 < 0}∩{س:س -1 <0})

ولإيجاد مجموعة الحل هذه تجرى ثلاثة مراحل كالآتي :

الحالة الأولى : نفترض أن (2س+1)(س-1) ≥ 0

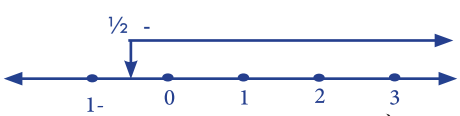
نتجت من 2س+1 ≥ 0 و س-1 ≥ 0

∴ 2س+1-1 ≥ 0-1 وكذلك س-1+1 ≥ 0+1

2س ≥ -1 وكذلك س ≥ 1

2س/2 ≥ -1/2

س ≥ -1/2



فمجموعة الحل للحالة الأولى هي {س:س ≥ 1}

س=[1،∞)

الحالة الثانية : نفترض أن (2س+1)(س-1) ≥ 0

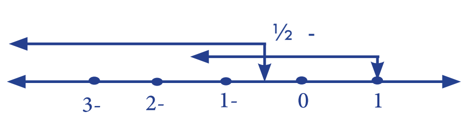
نتجت من 2س+1 ≤ 0 و س-1 ≤ 0

إذن 2س+1-1 ≤ 0-1 وكذلك س-1+1 ≤ 0+1

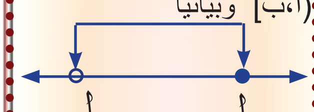
2س ≤ -1 وكذلك س ≤ 1

2س/2 ≤ -1/2

س ≤ -1/2 ⟸ س∈(-∞، -1/2]



3 { س : أ < س ≤ ب}
تسمى فترة محدودة مفتوحة من اليمين ويعبر عنها بـ (أ،ب] وبيانياً



4 { س : أ ≤ س ≤ ب}
تسمى محدودة مغلقة ويعبر عنها بـ [أ ، ب] وبيانياً

ومجموعة حل المتباينة للحالة الثانية هي : {س:س $< -\frac{1}{2}$ }

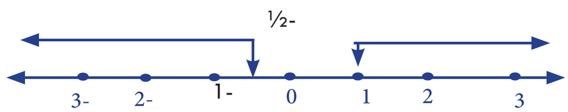
ثالثاً : وحيث أن المتباينة المعطاة $2س^2 - س - 1 \geqslant 0$ تتحقق بالحالة الأولى أو تتحقق بالحالة الثانية وعليه فأن مجموعة حل المتباينة المعطاة تنتج من اتحاد مجموعتي الحلين من كلا الحالتين الأولى والثانية :

أي أن مجموعة الحل هي: {س:س $\geqslant 1$ } $\cup$ {س: س $\leqslant -\frac{1}{2}$ }

وهي المجموعة {س:س $\geqslant 1$ أو س: س $\leqslant -\frac{1}{2}$ } $\Longleftarrow$

س = $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, \infty)$

وبيانياً مجموعة الحل هي



مثال 12

حل المتابينة $س^2$ - س $\leqslant$ 12 ومثل الحل بيانياً

الحل :

$س^2 - س - 12 \leqslant 12 - 12$

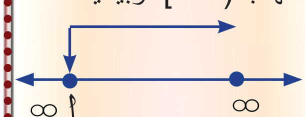
$س^2 - س - 12 \leqslant 0$

وبتحليل الطرف الأيمن نجد أن $س^2 - س - 12 = (س-4)(س+3)$

وعليه فإن $(س-4)(س+3) \leqslant 0$ أي أن حاصل ضرب المقدارين $(س-4)(س+3)$ يكون أقل من الصفر أو مساوياً للصفر ، وهذا يحدث في حالتين فقط كما عرفنا من خاصية ضرب عددين حقيقيين يكون الناتج سالباً فقط إذا كان أحد العاملين أو المقدارين سالبا.

والسؤال الوارد هنا هو أي المقدارين يكون سالباً ؟ وايهما يكون موجباً؟ بمجرد النظر لا نعلم أيهما السالب وأيهما الموجب قبل العمل التالي :

5
{ س : س> أ }
تسمى فترة لا نهائية ويعبر عنها بـ (أ،∞[وبيانياً



6
{ س : س ⩽ أ }
تسمى محدودة لا نهائية
ويعبر عنها بـ (-∞، أ] وبيانياً

الحالة الأولى :

نفرض أن $س-4 \geqslant 0$ و $س+3 \leqslant 0$

$\therefore س-4+4 \geqslant 4$ و $س+3-3 \leqslant -3$

$س \geqslant 4$ وأن $س \leqslant -3$

ولتحقيق هذين الشرطين تكون مجموعة الحل في هذه الحالة هي :

{س : س $\geqslant 4$ } $\cap$ {س:س $\leqslant -3$ }

وهذا مستحيل . أي أن مجموعة الحل في هذه الحالة هي المجموعة الخالية $\varnothing$.

الحالة الثانية :

نفرض أن س - 4 ≤0 و س + 3 ≥0

∴ س- 4 +4≥ 4 س+3 -3 ≤ -3

س ≥ 4 وس ≤ -3

ولتحقيق هذين الشرطين تكون مجموعة الحل هي :

{س : -3 ≥ س ≥4}

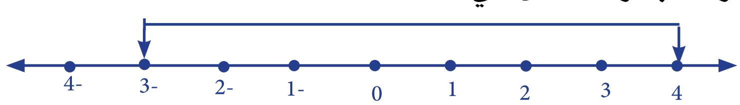
وحيث أن مجموعة حل المتباينة الأصلية تأتي من اتحاد مجموعة حل المتباينة في الحالة الأولى ومجموعة حل المتباينة في الحالة الثانية .

∴ مجموعة الحل هي :{س : -3 ≥ س ≥ 4 }∪∅

والتي هي {س : -3 ≥ س ≥ 4 }

∴ س = [-3، 4]

بيانياً تكون مجموعة الحل هي :



مثال 13

حل المتباينة 4 - س^2 > 0

الحل :

نُحلل الطرف الأيمن 4 - س^2 **إلى عاملين :**

4 - س^2 = (2 - س) (2 +س)

إذن (2 - س) (2 +س)> 0

حيث أن حاصل ضرب العاملين موجب وهذا يحدث فقط إذا كان العاملين موجبين معاً أو كان العاملان سالبين معا

أو نفرض أن :

2 - س > 0 وأن 2 +س> 0

-2 + 2 - س > -2 + 0 و -2 + 2 +س>-2 + 0

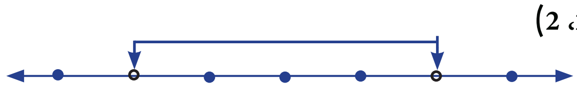
- س > -2 و س > -2

$\frac{-س}{-1} < \frac{-2}{-1}$ و س > -2

س < 2 و س >- 2

وتكون هنا مجموعة الحل في هذه الحالة هي {س : -2< س< 2}

∴ س = (-2، 2)



ثانياً نفترض أن :

2 - س >0   وأن   2 +س<0

-2 + 2 - س >-2 + 0   و   -2 + 2 +س<-2 + 0

- س > -2   و   س< -2

$\frac{-س}{-1}$ < $\frac{-2}{-1}$ و   س < -2

س > 2   و   س< -2

في هذه الحالة تكون مجموعة الحل هي { } أي مجموعة خالية

ثالثاً :

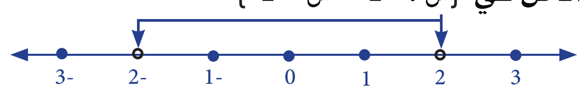
مجموعة حل المتباينة الأصلية 4 - س^2 > 0

هي اتحاد المجموعتين في الحالتين الأولى والثانية وهي المجموعة :

{س : 2 > س> -2 } ∪ ∅

أي أن مجموعة الحل هي {س : -2 < س< 2 }

و بيانياًهي:



مثال 14

حل المتباينة 9 > س^2 **ومثل ذلك بيانياً**

الحل :

بتحليل الطرف الأيمن للمتباينة 9 - س^2 > 0 إلى عاملين فيكون :

(3- س) (3+ س) > 0

الحالة الأولى :

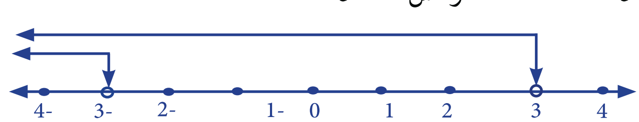
نفترض أن :

3 - س > 0   وأن   س + 3 > 0

-3 + 3 - س >-3 + 0   و   -3 + 3 +س> -3 + 0

- س > -3   و   س > -3

س < 3   و   س> -3



وفي هذه الحالة مجموعة الحل هي { س:س> -3}

والحالة الثانية :

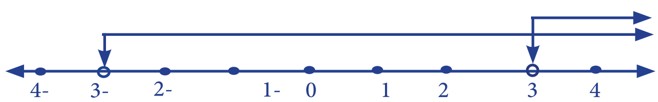
$3 - س < 0$ وأن $س + 3 > 0$

$-3 + 3 - س < -3 + 0$ و $-3 + 3 + س > -3 + 0$

$-س < -3$ و $س > -3$

$\frac{-س}{-1} > \frac{-3}{-1}$ و $س > -3$

$س > 3$ $س > -3$

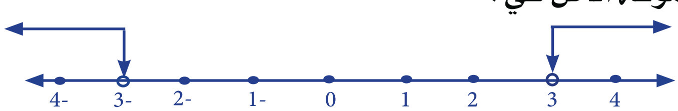


وفي هذه الحالة مجموعة الحل هي $\{س : س > 3\}$

وحيث أن المتباينة $9 - س^2 < 0$ **تتحقق بالحالة الأولى أوالحالة الثانية فمجموعة حل المتباينة الأصلية تكون هي اتحاد مجموعتي الحلين في الحالتين معا . أي مجموعة حل المتباينة المعطاة هي:**

$\{س : س > 3 \text{ أو } س < -3\} = (-\infty ، -3) \cup (3، \infty)$

وبيانياً مجموعة الحل هي :



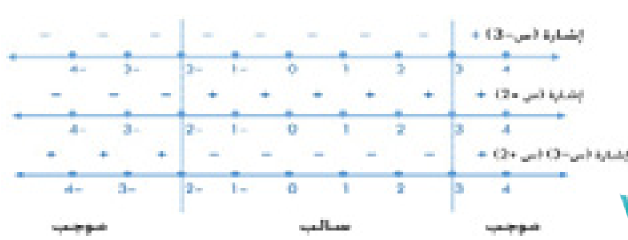
ملحوظة:

إذا كان جـ موجبة تكون إشارة العاملين متشابهتين إما سالبتين أو موجبتين حسب إشارة الحد الأوسط

طريقة تحديد إشارة المقدار أس^2 + ب س + جـ بإستخدام النقط الحرجة على خط الأعداد:

يمكننا حل الأمثلة الأربعة السابقة بطريقة أخرى تعرف بطريقة تحديد إشارة المقدار أس^2 + ب س + جـ من معرفة إشارات معاملاته . فلتحديد إشارة المقدار س^2 – س – 6 نحلله أولا إلى عاملين إن أمكن فيكون

س^2 – س – 6 = (س-3)(س+2) فإشارة المقدار (س-3)(س+2) تكون موجبة على الفترة (3 ، ∞)∪(-∞،-2) وتكون سالبة على الفترة (-2،3)

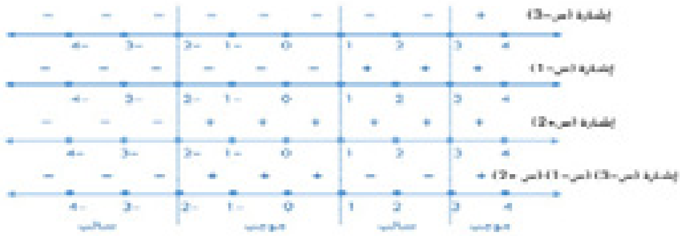


مثال 15

حدد إشارة المقدار (س-3)(س-1)(س +2)

الحل:

من خط الأعداد في الشكل التالي نجد أن :



ملحوظة:
إذا كان إشارة جـ سالبة تكون إشارة العاملين مختلفين والأكبر يأخذ إشارة الأوسط

فالمقدار (س-3)(س-1)(س +2)**يساوي صفراً إذا كانت س=** 3 أو س= - 2 أو س = 1
أي أن المقدار يساوي الصفر عند 3 ، 1 ، -2
ويكون المقدار (س-3)(س-1)(س +2)موجباً في الفترتين (3،∞)∪(-2،1).
ويكون المقدار(س-3)(س-1)(س +2) سالباً في الفترتين (1،3)∪(-∞، -2)

ملاحظة :

العددان اللذان يجعلان المقدار أس^2 + ب س + جـ=0 أو كمية غير معروفة يسميان جذري المعادلة أو العددان الحرجان هما اللذان يعتمد عليهما حل المتباينة التربيعية **أس^2 + ب س + جـ** ≥ 0 وهما اللذان نجزئ بهما خط الأعدا دإلى ثلاثة فترات نُحدد في كل منهما إشارة المقدار أس^2 + ب س + جـ الناتجة من حاصل ضرب إشارة عامليه .

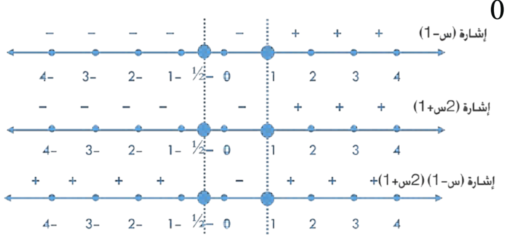
وبإستخدام طريقة تحديد إشارة المقدار نعيد حل الأمثلة السابقة .

مثال 16

حل المتباينة 2س^2 -س ≥ 1 **بطريقة تحديدا إشارة المقدار .**

الحل :

أولاً نحدد إشارة المقدار2س^2 -س -1 ≥ 0
أي أن المقدار (س-1)(2س+1) ≥ 0



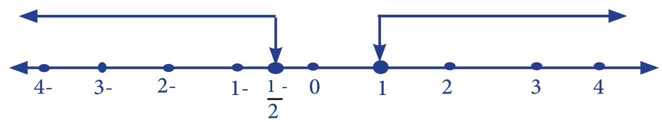
وذلك يتم كالاتي :
المقدار (س-1)(2س+1)=0 **عند العددين** 1 ، - $\frac{1}{2}$

أي أن النقطة الحرجة هي س=1 ، س= - $\frac{1}{2}$

من الشكل نجد أن إشارة المقدار(س-1)(2س+1)موجبة (أي ⩾0)عندما تكون س
في الفترتين (-∞،-$\frac{1}{2}$) ∪(1، ∞)

وعليه فأن مجموعة حل المتباينة المعطاة هي (-∞،-$\frac{1}{2}$] ∪[1، ∞)

وبيانياً



وهي نفس النتيجة التي تحصنا عليها سابقاً أنظر مثال(11) . لاحظ أنه قد تم رسم دائرة مغلقة على النقط الحرجة في الشكل السابق لأن علامة التباين هي ⩾.

مثال 17

حل المتباينة س^2 -س- 12⩾ بطريقة تحديد إشارة المقدار

الحل:

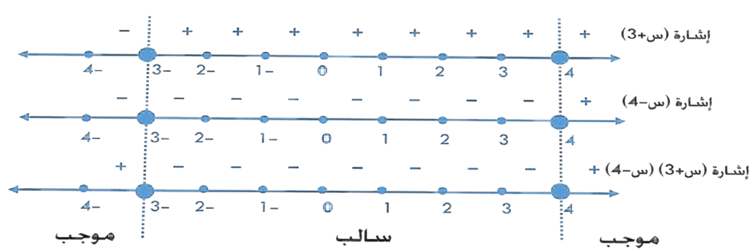
تُحدد إشارة المقدارس^2 -س- 12 ⩾0

(س+3)(س-4)⩾0

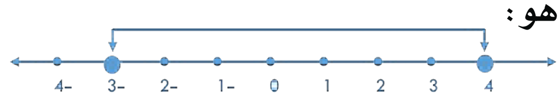
المقدار (س+3)(س-4) =0عندما س =-3 أو س =4

أي أن النقط الحرجة هي س=-3، س=4

والمقدار (س+3)(س-4)⩾0 عندما تكون س في الفترة [-3،4] وهي مجموعة حل المتباينة المعطاة بالشكل التالي



وحل المتباينة بيانياً هو :



وهو نفس الحل الذي تحصلنا عليه سابقاً انظرمثال(12)

مثال 18

حل المتباينة 4 - س^2 > 0

الحل:

نُحدد إشارة المقدار 4 - س^2 > 0

وهي إشارة المقدار (2- س)(2 + س) > 0

ومن الشكل المقابل يتضح أن المقدار(2- س)(2 + س)=0

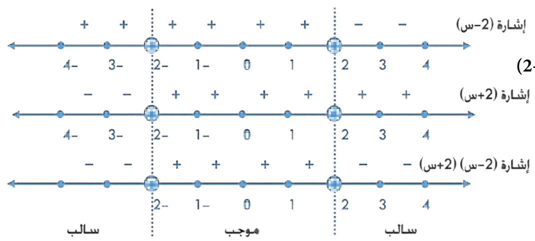
عندما س=2، س=-2

أي أن النقط الحرجة هي س=2 ،س=-2

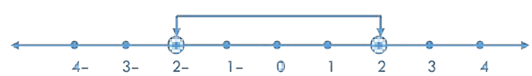
من الشكل يتضح أن المقدار (2- س)(2 + س) > 0

عندما تكون س في الفترة (2، -2)

∴مجموعة حل المتباينة المعطاة هي (2، -2)



وبيانياً:



وهي نفس النتيجة التي تحصلنا عليها سابقاً . انظر مثال 13.

لاحظ أنه قد تم رسم دائرة مفتوحة على النقط الحرجة كما في الشكل وذلك لأن علامة التباين هي >.

مثال 19

حل المتباينة 9 < س² بطريقة تحديد إشارة المقدار

الحل:

9- س² < 0

تُحدد إشارة المقدار 9- س²

فتوجد متى يكون (3- س)(3 +س) < 0

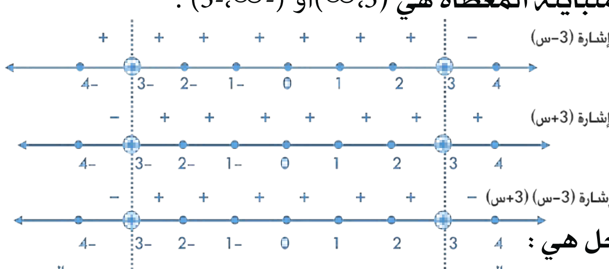
واضح أن المقدار(3- س)(3 +س) =0 ⟸ س= 3 ، س - 3

∴ النقط الحرجة هي ، س= 3، س -3

من الشكل (3- س)(3 +س) يكون سالباً عندما تكون في أحدى الفترتين

(3،∞) أو (-∞،-3)

∴ مجموعة حل المتباينة المعطاة هي (3،∞)أو (-∞،-3) .



وبيانياً مجموعة الحل هي :

وهي نفس النتيجة التي تحصلنا عليها سابقاً .انظر مثال (14)

تمرين (1 - و)

حلل كلاً من المتباينات التربيعية الآتية :

1. $س^2 - 6س + 8 \geqslant 0$
2. $س^2 - 36 > 0$
3. $س^2 + 3س + 2 \geqslant 0$
4. $س^2 - س - 2 < 0$
5. $2س^2 - س \leqslant 0$
6. $س^2 + 7س + 10 < 0$
7. $س^2 + 5س + 4 < 0$
8. $س^2 + 4س - 5 > 0$
9. $(2س - 1)^2 - 1 > (س - 1)(س + 1)$
10. $س^2 + 21 - 10س \leqslant 0$

7-1 القيمة المطلقة:

القيمة المطلقة لاي عدد حقيقي $\text{س} \neq 0$ هي العددالموجب الناتج من س أو معكوسه الجمعي

والقيمة المطلقة للعدد صفر تساويه ويرمز للقيمة المطلقة للعددس بالرمز $|\text{س}|$

ويمكن تعريف القيمة المطلقة لـ س بالآتي :

$$|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & \text{اذا كان س} \geqslant 0 \\ -\text{س} & \text{اذا كان س} < 0 \end{cases} \qquad \text{حيث أن } |\text{س}| = \sqrt{\text{س}^2}$$

فمثلاً

القيمة المطلقة للعدد 7 هي 7 لأن $7 > 0$

أي إن $|7| = 7$

والقيمة المطلقة للعدد -13 هي $-(-13)$ لأن $-13 < 0$

أي إن $|-13| = 13$

القيمة المطلقة للعدد $(3 - 5\frac{1}{2}) = 2\,\frac{1}{2}$

وذلك لأن $\left|3 - 5\frac{1}{2}\right| = \left|-2\frac{1}{2}\right| = 2\frac{1}{2}$

وفي حالة الحد المطلوب قيمته المطلقة يحتوي متغيرا مثل س فنكتب قيمته المطلقة

بصورة التعريف فلايجاد القيمة المطلقة للحد س − 3 نقول أن :

$$\text{هو } |\text{س} - 3| = \begin{cases} \text{س} - 3 & \text{إذا كان س} - 3 \geqslant 0 \\ -(\text{س} - 3) & \text{إذا كان س} - 3 < 0 \end{cases}$$

ويمكننا أن نكتبها بصورة افضل بعد إجراء بعض العمليات الرياضية على المتباينات التي تحتويها القيمة المطلقة كالأتي:

$$|\text{س} - 3| = \begin{cases} \text{س} - 3 \text{ ، } & \text{إذا كان س} \geqslant 3 \\ -(\text{س} - 3) \text{ ، } & \text{إذا كان س} < 3 \end{cases}$$

ومن هذا التعريف يتضح أن :

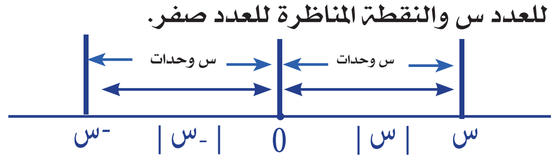
$|-13| = -(-13) = 13$. **لأنه عدد سالب . وأن :**

$\left|-\frac{1}{2}\,2\right| = -\left(-\frac{1}{2}\,2\right) = \frac{1}{2}\,2$ **لأنه عدد سالب**

أما العدد صفر فإن $|0| = 0$ لأنه مساوياً لمعكوسه الجمعي. فنلاحظ أن

القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي س هي $|\text{س}| \geqslant 0$.

وبيانياً على خط الأعداد القيمة المطلقة للعدد الحقيقي س هي المسافة بين النقطة المناظرة للعدد س والنقطة المناظرة للعدد صفر.



وحيث أن المسافة – 2 والصفر هي 2 . أي أن | - 2 | =2

والمسافة بين - 7والصفر هي 7. أي أن | - 7 | = 7

لذلك نقول أنه لأي عدد حقيقي سالب س تكون | - س | = س

وأنه لأي عدد حقيقي موجب ص | ص | = ص

أي أن : | - 8 | = 8 ، $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ ، $\left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{2}{3}$ ، $\left|\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$ وهكذا .

ولهذا سميت القيمة المطلقة للعدد أ ، (| أ |)مقياس أ .

8-1 خواص القيمة المطلقة (أو المقياس):

توجد عدة خواص للمقياس أوالقيمة المطلقة مستوحاه من التعريف الذي ذكرناه وهذه الخواص مهمة جداً في حل المعادلات أوالمتباينات التي تحتوي على قيم مطلقة... ومنها :

الخاصية الأولى :

| س | = | ـ س |

فمثلاً علمنا أن | 17 | = 17 ، وأن | – 17 | =17

وعليه فإن | -17 | = | 17 |

الخاصية الثانية:

| س | ≤ س ، س ≥ـ | س |

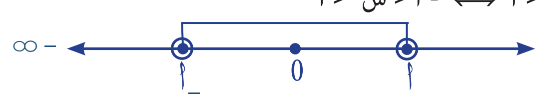
أي أن: – | س | ≤ س ≤ | س |

وعلى سبيل المثال : | -3 | =3 > – 3 وان – | 5 | = – 5 < 5

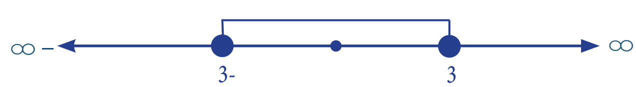
الخاصية الثالثة:

لكل أ > 0 ، إذا كانت : | س | < أ ⟺ - أ< س < أ

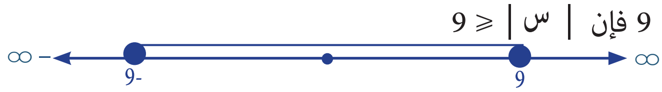
وبيانياً | س | < أ تعني:



فمثلاً إذا كانت | س | ≤3 فإن – 3≤ س ≤ 3



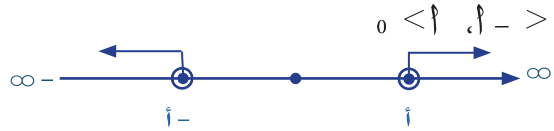
وإذا كان – 9 ≤ س ≤ 9 فإن | س | ≤ 9



الخاصية الرابعة:

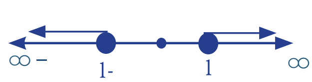
| س | > أ ⟺ س > أ أو س < – أ، أ> 0

وبيانياً | س | > أ تعني:



فمثلاً اذا كانت | س | ≥ 1 فان س ≥ 1 أو س ≤ – 1

وإذا كانت س ≥ 1 أو س ≤ – 1فإن | س | ≥ 1



الخاصية الخامسة:

$|\text{س ص}| = |\text{س}| \times |\text{ص}|$ لأي عددين س ، ص $\in$ ع

فمثلاً :

$|24| = |4 \times 6| = |4| \times |6|$

$|12\text{س}| = |12| \times |\text{س}| = |3| \times |4\text{س}| = |4| \times |3| \times |\text{س}|$

$|\text{س}(\text{س}-3)| = |\text{س}| \times |\text{س}-3|$

كل هذه الخواص مهمة ويجب أن يتعلمها الطالب ويمكن الإستفادة من الخاصيتين (3)،(4) في إيجاد مجموعات الحل للمتباينات كما سنوضح في المثالين الأتيين :

مثال 20

أوجد مجموعة الحل للمتباينة: $|2\text{س} - 3| \leq 5$

الحل:

الحل بإستخدام الخاصية (3) نجد أن :

$|2\text{س} - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2\text{س} - 3 \leq 5$

نحل المتباينات بإضافة العدد 3 لكل الأطراف

أي أن :

$-5 + 3 \leqslant 2\text{س} - 3 + 3 \leqslant 5 + 3$

$-2 \leqslant 2\text{س} \leqslant 8$

الأن نضرب الثلاثة اطراف في العدد لتحديد قيمة س :

$\frac{1}{2}(-2) \leqslant \frac{1}{2}(2\text{س}) \leqslant \frac{1}{2}(8)$

$-1 \leq \text{س} \leq 4$

وهذا يعني أن مجموعة الحل هي الفترة $[-1 ، 4]$

وبيانياً الحل كما هو مبين في الشكل التالي :

مثال 21

حل المتباينة $|2\text{س} - 1| > 5$

الحل:

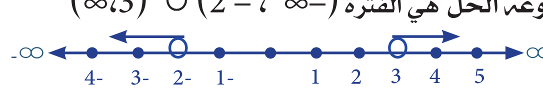
بما أن $|2\text{س} - 1| > 5$ **فمن الخاصية (4) فأنها تكافئ المتباينتين :**

$2\text{س} - 1 > 5$ أو $2\text{س} - 1 < -5$ وعليه فأن :

$2\text{س} > 6$ أو $2\text{س} < -4$

$\text{س} > 3$ أو $\text{س} < -2$

مجموعة الحل هي الفترة $(-\infty ، -2) \cup (3، \infty)$



مثال 22

إذا كان س - 5 $\geqslant$ 0 . فأوجد $(س^2 - 10س + 25)^{\frac{1}{2}}$

الحل :

$(س^2 - 10س + 25)^{\frac{1}{2}} = (س - 5)^2$

$= |س - 5|$

$=$ س - 5

وذلك لأن س- 5 $\geqslant$ 0 . معطى.

$(س^2 - 10س + 25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(س - 5)^2}$

$= |س - 5|$

$=$ س - 5

وذلك لأن س- 5 $\geqslant$ 0 . معطى.

الخاصية السادسة:

$\left|\frac{س}{ص}\right| = \frac{|س|}{|ص|}$ لأي س ، ص $\in$ ح ، ص $\neq 0$

فمثلاً :

$\left|\frac{-3}{12}\right| = \frac{|-3|}{|12|} = \left|\frac{-1}{4}\right| = \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$

الخاصية السابعة

$|س| = |ص| \Leftrightarrow$ س = ص أو س = – ص

فإذا كان $|أ| = 3$ فإن أ = 3 أو أ = – 3

و إذا كان أ = 3 أو أ = – 3 فإن $|أ| = 3$

الخاصية الثامنة

$|س + ص| \leqslant |س| + |ص|$

هذه الخاصية مهمة جداً في حل المتباينات

تمرين ١ –ز:

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية موضحاً اجابتك على خط الأعداد ؟

1 $|س - 5| \geqslant 7$

2 $|4 - 3س| \geqslant 2$

3 $|2س + 4| < 10$

4 $|س - 3| < 8$

5 $|1 - س| < 5$

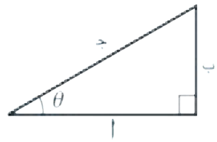
2
قواعد الجيب وجيب التمام والإتجاهات

قواعد الجيب، وجيب التمام ،والإتجاهات

Sunc and Cosinc Rulc and Bcarings

رأينا في الصف الأول ثانوي كيفية استخدام نظرية فيتاغورس والدوال المثلثية لحل المثلثات قائمة الزاوية .وحل المثلث يعني إيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزاويا غير المعلومة .وإذا كان المثلث لا يوجد به زاوية قائمة أو كان متساوي الساقين أو متساوي الأضلاع فأنه ليس من الملائم استخدام نضرية فيتاغورس والدوال المثلثية لحلها

اكتشف لنفسك قواعد جديدة لحل المثلثات العامة من الأنشطة في هذا الفصل

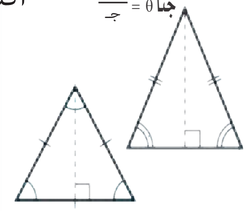


حـ ² + أ ² + ب ²

ظا $\theta = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

جا$\theta = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$

جتا$\theta = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$



في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادراً على

* استخدام قاعدة الجيب وقاعدة جيب التمام لحل المثلثات التى ليست قائمة

* تطبيق الصيغة :المساحة = $\frac{1}{2}$ أ ب جا حـ

للحصول على المساحة .وقياسات الزوايا .أو أطوال الأضلاع لمثلث

*إيجاد نقطة من نقطة أخرى

*حل المسائل عن الإتجاهات

لدراسة النسبة بين طول الضلع وجيب الزاوية المقابلة له

ملحوظة:

يمكن أداء هذا النشاط باستخدام برنامج الهندسة الديناميكية أو فقط الفرجار، والمنقلة، والمسطرة. وكلتا الطريقتين مشروحتان.

Geometics Sketchpad (GSP)

الـ (GSP) هي أداة قوية من أدوات تقانة المعلومات للإنشاء الهندسي

(أ) استخدام لوحة الرسم الهندسي (GSP)

الخطوات	العمل

1 - **لولوج البرنامج انقر على أيقونة** (GSP) **من على سطح المكتب**

2 – **أنقر أداة** Straightedge **لاختيار أداة** Line segment (•—•) .

3 - **استخدم أداة** Line segment **لرسم المثلث أ، ب ، جـ**

4 – **استخدم أداة النص** Text **لتعنون الرؤوس أ.ب.جـ.**

5 - **مستخدماً أداة** Selection Arrow **أظهر الضلع أ ب أنقر** Measure **من** Menu Bar **وأختر** length **سوف يظهر** (mAB =) **على الشاشة.**
كرر العملية للأضلاع ب جـ ، حـ أ

6 - **استحدم أداة الأسهم المختارة وبالضغط على مفتاح** Shift **لإسفل انقر على النقاط ا ، ب ، حـ على التوالي قبل رفع مفتاح** Shift .

7 - **أنقر للقياس من المسطرة الصغيرة وأختر الزاوية أ ب جـ سوف تظهر على الشاشة مثل " ق (أ ب حـ) = ").**

ملحوظة:

مرشد سريع للأدوات الأساسية في GSP معطاة بالأسفل

أيقونة اختيار السهم لاختيار نقطة أو خط

أيقونة النقطة لرسم نقطة

أيقونة البوصلة لرسم دائرة

أيقونة الرسم المعتدل لرسم خط مستقيم

أيقونة نص لكتابة عنوان لنقطة، خط... إلخ

8 - كرر الخطوات 6 ، 7 للزوايا أ حـ ب ، ب أ حـ .

9 - انقر للقياس من المسطرة الصغيرة واختر الحساب ، (سوف تظهر الحاسبة على الشاشة)

10 – انقر على

ق $\overline{\text{أب}}$ (من الشاشة الرئيسية) و / (أعلى شاشة الحاسب)

الدوال (على شاشة الحاسب) واختر جيب [ق أ $\hat{\text{حـ}}$ ب (على الشاشة الرئيسية)]

(على شاشة الحاسب) و OK (على شاشة الحاسب)

11 - كرر الخطوات 9 ، 10 لـ ق $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق ب $\hat{\text{أ}}$ حـ

ماذا تلاحظ عن النسب

$$\frac{(\text{ق } \overline{\text{أ ب}})}{\text{جا}(\text{ق أ } \hat{\text{حـ}} \text{ ب})} \qquad \frac{(\text{ق } \overline{\text{ب حـ}})}{\text{جا}(\text{ق ب } \hat{\text{أ}} \text{ حـ})} \qquad \frac{(\text{ق } \overline{\text{حـ أ}})}{\text{جا}(\text{ق أ } \hat{\text{ب}} \text{ حـ})}$$

12 – استخدم أداة Selection Arrow لسحب النقط أ ،ب ،حـ لتغيير أحجام الأضلاع والزوايا .

ماذا تلاحظ عن النسب المعطاة في الخطوة 11 ؟

(ب) باستخدام الفرجار والمنقلة ، والمسطرة (30 دقيقة)

أ – ارسم المثلث أ ب حـ ، أ ب = 6سم، ب حـ = 7 سم ، حـ أ = 8 سم ، قس الزوايا أ ، ب ،حـ . واحسب .

(أ) $\frac{\text{أب}}{\text{جاحـ}}$ (ب) $\frac{\text{ب حـ}}{\text{جا أ}}$ (حـ) $\frac{\text{حـ أ}}{\text{جاحـ}}$

2 - كرر النشاط 1 حيث أب = 10.6 سم ، ب حـ = 7. 2 سم ، وحـ أ = 9.3 سم

1-2 قاعدة الجيب Sine Rule

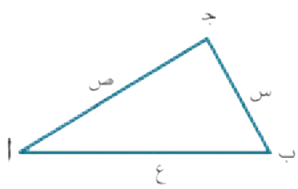
التعميم بالاستقراء

الناتج من الأنشطة يمكن تعميمه بالإستنباط

$$= \frac{\text{أ ب}}{\text{جاحـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{حـ أ}}{\text{جاب}}$$

هنا يسمى صيغة الجيب أو قاعدة الجيب

تكون هذه القاعدة أسهل للتذكر إذا أعدنا تسمية أضلاع المثلث مثل أ ، ب، حـ حيث س المقابل للزاوية $\hat{\text{أ}}$ ، ص المقابل للزاوية $\hat{\text{ب}}$ ، ع المقابل للزاوية $\hat{\text{حـ}}$.ومن ثم نجد

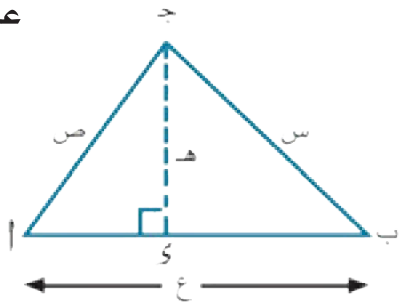


$$\boxed{\frac{\text{س}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{جاب}} = \frac{\text{ع}}{\text{جاحـ}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{جا أ}}{\text{س}} = \frac{\text{جاب}}{\text{ص}} = \frac{\text{جاحـ}}{\text{ع}}}$$

تنطبق تلك القاعدة على أي مثلث ولكنها تستخدم لحساب الأطوال وقياسات الزوايا في المثلثات والتي لا تحتوي على زاوية قائمة .إذا كان المثلث به زاوية قائمة فمن الأسهل استخدام دوال الجيب وجيب التمام أو الظل مثل الموضح في الصف الأول ثانوي .

سوف نتقدم الأن لبرهنة قاعدة الجيب

اعتبر المثلث العام أ ب حـ والذي ليس مثلث قائم الزاوية بإسقاط عمود من حـ ليقابل $\overline{\text{أ ب}}$ في د نجد مثلثين قائمي الزاوية.



معتبراً حـى = هـ

في △ أ ى حـ $\qquad$ جا أ = $\frac{\text{هـ}}{\text{ص}}$

∴ هـ = ص جا أ ....(1)

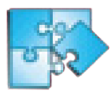
في △ ب ى حـ. $\qquad$ جا ب = $\frac{\text{هـ}}{\text{س}}$

∴ هـ = س جا ب ....(2)

من معادلة 1 ، 2 نجد أن :

س جا ب = ص جا أ

∴ $\frac{\text{س}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{جا ب}}$

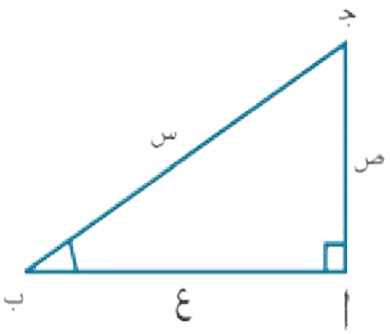


بالمثل بإسقاط عمود من أ على $\overline{\text{ب حـ}}$ يمكن إثبات أن

$\frac{\text{ص}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ع}}{\text{جا حـ}}$

وعليه نحصل على قاعدة الجيب :

$\frac{\text{س}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ع}}{\text{جا حـ}}$



تأمل المثلث حيث الزاوية أ = 90°

بمعنى $\frac{\text{جا ب}}{\text{ص}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{س}}$

نجد أن $\frac{\text{جاب}}{\text{ص}} = \frac{\text{جا } 90^\circ}{\text{س}}$

بمعنى $\frac{\text{جاب}}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{س}}$

نجد جاب $= \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

والتي تمثل دالة الحيب لزاوية $\angle$ ب

ونجد من ذلك أن للمثلث قائم الزاوية ، يكون من الأسهل إستخدام دالة الجيب عند استحدام قاعدة الجيب

نلاحظ أن في المعادلة

$$\frac{\text{س}}{\text{جا}\,\text{أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{جاب}}$$

يوجد أربعة متغيرات س ، ص ، أ ، ب . لحل أي منهم نحتاج معرفة القيم الثلاث الأخرى . لذلك يمكن استخدام قاعدة الجيب لحل المثلث بمعلومية :

إما (أ) قياسا زاويتين وضلع

أو (ب) ضلعين وزاوية ليست محصورة (بمعنى الزاوية لا تكون بين الضلعين المعطيين)

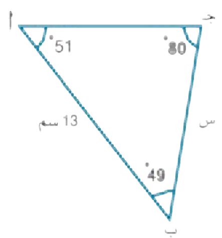
ملحوظة

لاحظ أن جا $90^\circ = 1$

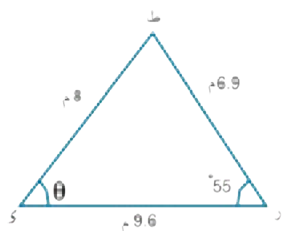
مثال 1 :

أوجد طول الضلع غير المعلوم وقياس الزاوية المشار إليها في كل من المثلثين

(أ)



(ب)



ملحوظة

الممارسة العامة : تقرب الأضلاع لثلاثة أرقام معنوية والزوايا لرقم عشري

الحل :

(أ) $\frac{\text{س}}{\text{جا}\,\text{أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{جاد}}$ (ب) $\frac{\text{جا ى}}{\text{م}} = \frac{\text{جا ر}}{\text{ل}}$

$\therefore \quad \dfrac{\text{س}}{\text{جا } 51^\circ} = \dfrac{13}{\text{جا } 80^\circ}$

$\therefore \quad \text{س} = \dfrac{13 \times \text{جا } 51^\circ}{\text{جا } 80^\circ} = 10.3$ سم

(لإقرب ثلاث أرقام معنوية)

$\therefore \quad \dfrac{\text{جا } \theta}{6.9} = \dfrac{\text{جا } 55^\circ}{8}$

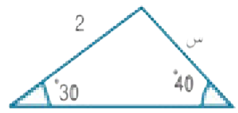
$\therefore \quad \text{جا } \theta = \dfrac{6.9 \times \text{جا } 55^\circ}{8} = 0.7065$

$\therefore \quad \theta = 45.0^\circ$ (لإقرب رقم عشري)

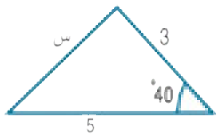
تمرين 2 – أ :

1 حدد في المثلثات الأتية إمكانية إستخدام قاعدة الجيب الأيجاد أطوال الأضلاع غير المعلومة وقياسات الزوايا المشار إليها

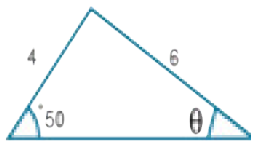
(أ)



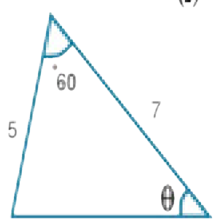
(ب)



(جـ)

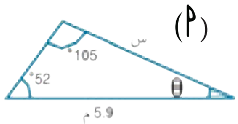


(د)

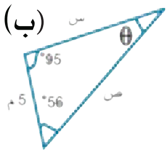


2 في المثلثات الإتية. استخدم قاعدة الجيب لإيجاد القيم غير المعلومة والزوايا. أعط إجابتك مقربة لثلاثة أرقام معنوية وقيم الزوايا مقربة ارقم عشري واحد

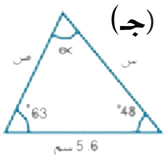
(أ)



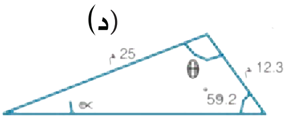
(ب)



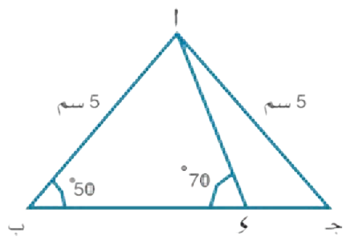
(جـ)



(د)



3 في المثلث متساوي الساقين أ ب حـ قياس ∠ أ ب حـ = 50° أ ب = أ حـ = 5سم .

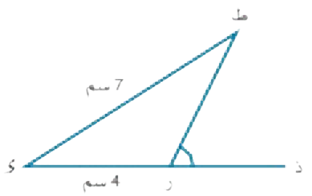


أ أحسب

(i) ∠ ب أ حـ (ii) ب حـ

ب النقطة ء تقع على ب حـ بحيث أن قياس ∠ أ ء ب = 70° استخدم قاعدة الجيب لحساب أ ء.

4 في الشكل ء ر ذ خط مستقيم . ء ط =7سم و ء ر = 4سم جا ∠ ط ر ذ = $\frac{3}{8}$ احسب جا ء ط ر اكتب اجابتك على صورة كسر في ابسط صورة



أنشطة

لدراسة العلاقة بين جتاحـ $= \dfrac{س^2 + ص^2 - ع^2}{2س ع}$ في المثلث أ ب حـ

(أ) بإستخدام الرسومات الهندسية (GSP) (ساعة)

ملحوظة

هذا النشاط يمكن تأذيته بإستخدام برنامج هندسة حركية أو باستخدام البرجل أو المنقلة، والمسطرة والطريقتان مشروحتان

الخطوات	العمل
1 -	لدخول البرنامج انقرمرتين على أيقونة (GSP) على سطح المكتب
2 –	أنقر أداة Straightedge لاختيار أداة Line segment ( ) .
3 -	استخدم أداة Line Segment لرسم المثلث أ ب جـ
4 –	استخدم أداة Text للإشارة على الرؤوس أ.ب.جـ
5 -	استخدم أداة Selection Arrow و الضلع الأكبر ب حـ أنقر على المسطرة الصغيرة للقياس واختر الطول ("ق ب حـ = " . سوف تظهرعلى الشاشة) كرر العملية للأصلاع أحـ ، أ ب .
6 -	استخدم الأداة Selection Arrow . واضغط على مفتاح المسافات لأسفل انقر على النقاط أ ، حـ ،ب . على التوالي قبل رفع مفتاح المسافات .
7 -	انقر القياس من الـ Menu Bar واختر الزاوية ا حـ ب سوف تظهر على الشاشة مثل ق (أ ب حـ) =).
8 -	انقر القياس من الـ Menu Bar وأختر(الحساب الآلة الحاسبة على الشاشة) .
9 -	انقر على الدوال (تظهر على الشاشة) اختر جتا [ن ∠ أحـ ب . (على الشاشة الرئيسية] (على شاشة الألة. و OK (على شاشة الألة) (جتا ق ∠ أ حـ ب =) سوف تظهر على الشاشة الرئيسية)
10 -	انقر القياس من الـ Menu Bar و اختر الحساب
11 -	انقر على (على شاشى الألة). ن $\overline{ب حـ}$ على الشاشة الرئيسية

2 ، ^ (على شاشة الألة) + (على شاشة الألة).

ے(حـ أ) (على الشاشة الرئيسية)

2 ، ^ (كل على شاشة الالة) – (على شاشة الألة)

ں ($\overline{\text{أ ب}}$) (على الشاشة الرئيسية)

2 ، ^ (كل على شاشة الألة)

[(على شاشة الألة / (على شاشة الآلة)]

، 2 (كل على شاشة الآلة)

ں ($\overline{\text{ب حـ}}$) (على الشاشة الرئيسية)

❖ (على شاشة الآلة)

ں $\overline{\text{حـ أ}}$ (على الشاشلة الرئيسية)

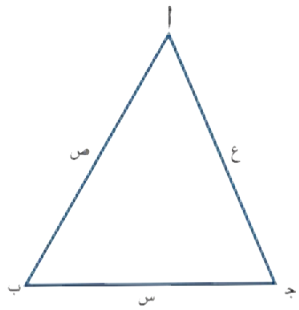
] (على شاشة الالة) ، و

OK (على شاشة الآلة)

ماذا تلاحظ عن القيم التي تحصلت عليها من الخطوات 9، 11 ؟

12 – **استخدم أداة** Selaction aarrow لسحب النقط $أ_1$ أو $ب_1$ أو حـ **لتغير أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا . ماذا تلاحظ في القيم التي تحصلت عليها من الخطوات 9 ، 11 ؟**

(ب) بإستخدام البرجل والمنقلة، والمسطرة (30 دقيقة)



1 - ارسم مثلث أ ب حـ الذي فيه س = 8 سم ، ص = 6 سم ،ع = 7 سم ، أوجد

قياس $\angle$ حـ احسب

(أ) **جتا حـ** (ب) $\dfrac{س^2 + ص^2 - ع^2}{2 \text{ س ص}}$

ماذا تلاحظ ؟

2 - كرر النشاط أ مع س = 6.5 سم ، ص = 8.5 سم ، ع = 10 سم

2-2 قاعدة جيب التمام

Cosine Rule

التعميم بالاستقراء

يمكن تعميم النتيجة من النشطة بالاستقراء :

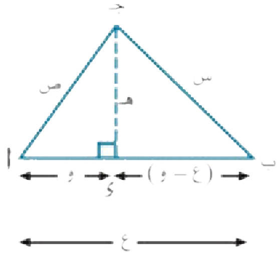
$$\text{جتاب} = \frac{س^2 + ص^2 - ع^2}{2 \text{ س ص}}$$

وهذا يسمى قاعدة جيب التمام أو صيغة جيب التمام

وبالمثل جتاحـ $= \dfrac{س^2 + ع^2 - ص^2}{2 \text{ س ع}}$ ، **جتا أ** $= \dfrac{ص^2 + ع^2 - س^2}{2 \text{ ص ع}}$

نستحدم هذه القاعدة عندما نعرف الأضلاع الثلاثة في مثلث ونريد ايجاد الزاوية

بإعادة الترتيب جتاأ = $\dfrac{\text{ص}^2 + \text{ع}^2 - \text{س}^2}{2\ \text{ص ع}}$



لدينا 2ص ع **جتا** أ = ص^2 + ع^2 - س^2

بمعنى س^2 = ص^2 + ع^2 - 2 ص ع **جتا** أ

بالمثل ص^2 = س^2 + ع^2 - 2س ع **جتا** ب

وكذلك ع^2 = س^2 + ص^2 - 2س ص **جتا** حـ

وهذه صياغة اخرى لقاعدة جيب التمام تستخدم عندما نعرف ضلعين في المثلث وقياس الزاوية بينهما ونريد ايجاد طول الضلع الثالث. نتقدم الأن لإثبات قانون جيب التمام

اعتبر المثلث أ ب حـ مثلثاً عاماً ليس قائم الزاوية لإسقاط عمود من حـ ليقابل أ ب في ى نجد مثلثين قائمي الزاوية .

حـ ى = هـ ، أ ى = و ، ب ى = ع - و

بتطبيق نظرية فيثاغورث على $\triangle$ **أ ى حـ ، نجد هـ**^{2} + و^2 = ص^2

$\therefore$ **هـ**^{2} = ص^2 - و^2 ....(1)

بتطبيق نظرية فيثاغورث على $\triangle$ **ب ى حـ ،نجد أن هـ**^{2} + (ع - و)^2 = س^2

$\therefore$ **هـ**^{2} = س^2 - (ع - و)^2..(2)

من معادلة (1) (2) نجد أن :

س^2 - (ع - و)^2 = ص^2 - و^2

$\therefore$ س^2 = ص^2 - و^2 + (ع - و)^2

= ص^2 - و^2 + ع^2 + و^2 - 2ع و

$\therefore$ س^2 = ص^2 + ع^2 - 2ع و..(3)

بما أن (و) عادة مجهولة. يجب التعبير عنها بدلالة أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا في المثلث أ ب حـ.

في $\triangle$ **أ ب حـ، جتا أ** = $\dfrac{\text{و}}{\text{ص}}$

$\therefore$ و = ص **جتا** أ

الاستنتاج

بالتعويض و= ص جتا أ في (3) **يعطي** س^2 = ص^2 + ع^2 - 2ص ع **جتا** أ **بالمثل بإسقاط أعمدة من أ . حـ للأضلاع المقابلة نستطيع إثبات أن**

ص^2 = س^2 + ع^2 - 2س ع جتا ب ، ع^2 = س^2 + ص^2 - 2س ص **جتا** حـ

لاحظ وجود أربعة متغيرات في كل من قواعد جيب التمام.

لحل أي منهما نحتاج معرفة قيم الثلاثة الأخرى.

لذلك.

$س^2 = ص^2 + ع^2 - 2ص\ ع$ جتا ا

$ص^2 = س^2 + ع^2 - 2س\ ع$ جتا ب

$ع^2 = س^2 + ص^2 - 2س\ ص$ جتا حـ

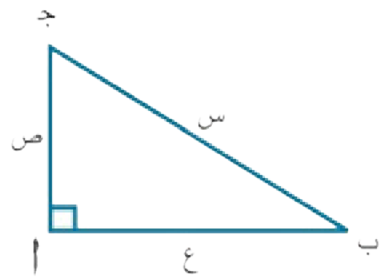
نستخدم لإيجاد طول الضلع الثالث عند إعطاء ضلعين وقياس الزاوية المحصورة (الزاوية المتكونة بين هذين الضلعين) . في حين

جتا ا $= \dfrac{ص^2 + ع^2 - س^2}{2\ ص\ ع}$

جتا ب $= \dfrac{س^2 + ع^2 - ص^2}{2\ س\ ع}$

جتا حـ $= \dfrac{س^2 + ص^2 - ع^2}{2\ س\ ص}$

تستخدم لإيجاد قياس الزاوية عند إعطاة أطوال أضلاع المثلث الثلاثة تأمل مثلثاً فيه قياس $\angle$ ا $= 90°$



بتطبيق $س^2 = ص^2 + ع^2 - 2ص\ ع$ جتا ا

نجد أن $س^2 = ص^2 + ع^2 - 2ص\ ع$ جتا $90°$.

بمعنى $س^2 = ص^2 + ع^2 - 2ص\ ع$ (صفر).

$\therefore$ $س^2 = ص^2 + ع^2$ (نظرية فيثاغورث)

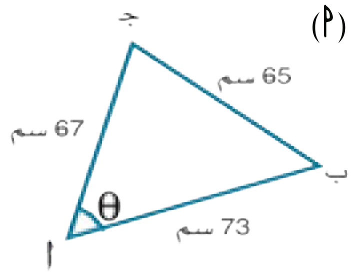
جتا $90° = 0$

هذه ليست مفاجأة حيث مستخدم نظرية فيثاغورث لإثبات قاعدة جيب التمام،وعليه فإن نظرية فيثاغورث حالة خاصة من قاعدة جيب التمام ، ولذا نستخدم في المثلث قائم الزاوية نظرية فيثاغورث والدوال المثلثية بدلاً من قانون جيب التمام .

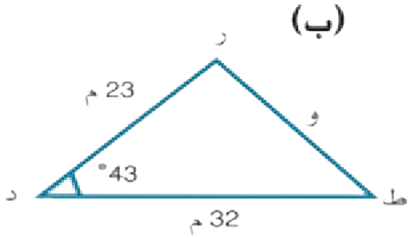
مثال 2 :

أوجد قياس الزاوية غير المعلومة وطول الضلع المشار إليه في المثلثات الأتية

(ا)



(ب)



الحل :

(أ) جتا θ = $\frac{ص^2 + ع^2 - س^2}{2 \ ص \ ع}$ = $\frac{67^2 + 73^2 - 65^2}{2 \times 67 \times 73}$ = 0.5718

∴ θ = 55.1° (لإقرب رقم عشري)

ملحوظة:
اعمل لأربعة ارقام معنوية
أعط الإجابات محتوية الزوايا مقربة لأقرب رقم عشري
أعط الإجابات متضمنة الأطوال لثلاثة أرقام معنوية

(ب) د^2 = ط^2 + ر^2 - 2ط ر **جتا د**

و^2 = 23^2 + 32^2 - 2 × 23 × 32 × **جتا** 43°

= 476.45

∴ و = 21.8 م (**لأقرب ثلاثة أرقام معنوية**)

مثال 3 :

أوجد أكبر زاوية في المثلث الذي أضلاعه س = 4 ، ص = 8 ، ع = 6

الحل:

أكبر زاوية في $\triangle$ وهي التي تقابل أكبر ضلع وهو ص

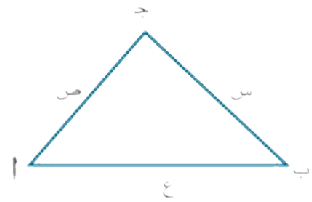
∴ **جتا ص** = $\frac{س^2 + ع^2 - ص^2}{2 \ س \ ع}$ = $\frac{16 + 36 - 64}{2 \times 4 \times 6}$ = -0.25

∴ ص = 140.5°

تمرين 2 – ب:

1 إذا كانت الإجابة ليست صحيحة قرب الإجابة بالدرجات لأقرب رقم عشري.

اذكر الخطأ في كل من المعادلات الآتية حيث تطبق قاعدة جيب التمام لحل المثلث أ ب حـ



أ $س^2 = ص^2 + ع^2 - 2ص\ ع$

ب $س^2 = ص^2 - ع^2 + 2ص\ ع$ جتا أ

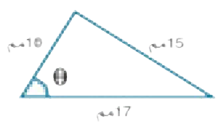
جـ $س^2 = ص^2 + ع^2 - ص\ ع$ جتا أ

د جتا ب $= \dfrac{س^2 + ع^2 - ص^2}{2\ س\ ص\ ع}$

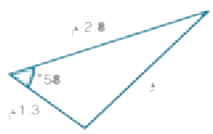
هـ جتا ب $= \dfrac{س^2 + ع^2 - ص}{س\ ع}$

2 - استخدم قاعدة جيب التمام لإيجاد الأطوال غير المعلومة أو قياسات الزوايا المشار إليها في كل من المثلثات الآتية :

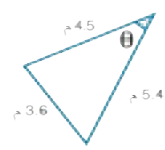
(أ)



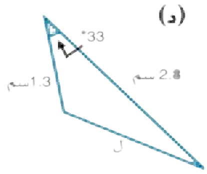
(ب)



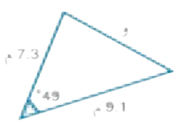
(جـ)



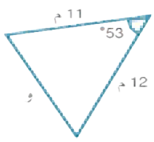
(د)



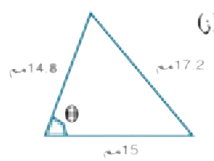
(هـ)



(و)

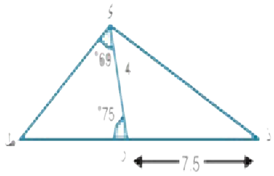


(ز)



3 في الشكل ط ر د ، خط مستقيم ، قياس $\widehat{طؤر}$ = 69° ، قياس ∠ ؤ رط = 75° ، ؤر = 4 سم رذ 7.5 سم ، أوجد

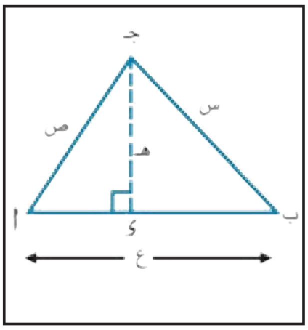
(أ) ؤط (ب) ؤذ



4 ؤ هـ م مثلث فيه ؤَ = 11 سم ، هـَ = 6سم ، مَ = 8سم ، أوجد أصغر زاوية في المثلث ؤ هـ م.

2 - 3 مساحة المثلث Area of Triangle

تأمل المثلث العام أ ب حـ لإيجاد مساحته ، نحتاج معرفة إرتفاعه ، بإسقاط عمود هـ من حـ يقابل أ ب في ى نجد



جاأ = $\frac{\text{هـ}}{\text{ص}}$

بمعنى هـ = ص جاأ

ونعرف أن

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الإرتفاع

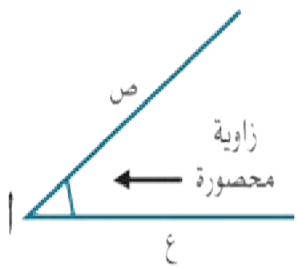
∴ مساحة المثلث Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ × ع × هـ

= $\frac{1}{2}$ ص ع جاأ حيث هـ = ص جاأ

لاحظ أن $\measuredangle$ أ زاوية محصورة بين الضلعين ص ، ع

بالمثل مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ س ص جاحـ

أو مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ س ع جاب



∴ لإيجاد مساحة المثلث أ ب حـ معطى ضلعين والزاوية المحصورة بينهما

الاستنتاج

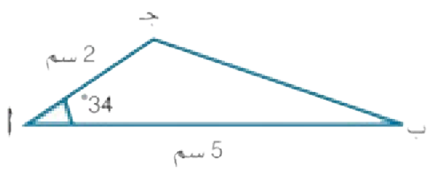
مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ س ص جاحـ

أو $\frac{1}{2}$ س ع جاب

أو $\frac{1}{2}$ ص ع جاأ

مثال 4 :

أوجد مساحة Δ أ ب حـ



ملحوظة:
ص = أحـ
ع = أب

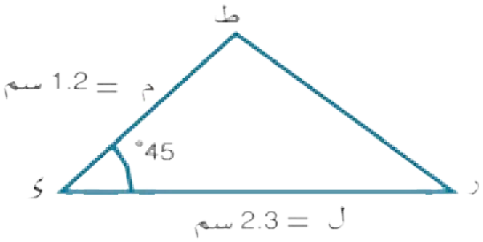
مساحة Δ ا ب حـ = $\frac{1}{2}$ ص ع **جا**أ

= $\frac{1}{2} \times 2 \times 5 \times$ **جا**34°

= 2.80 سم^2 **(مقرباً إلى ثلاثة أرقام معنوية)**

مثال 5:

في Δ ى طر ، ى ط = 1.2سم ، ى ر = 2.3سم ، قياس ط $\hat{ى}$ ر = 45° أوجد مساحة Δ ى ط ر



الحل:

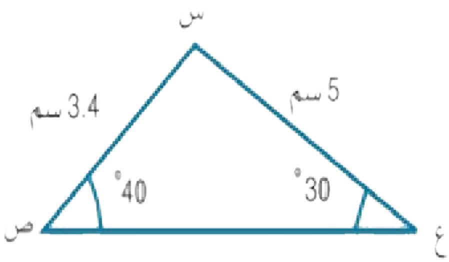
مساحة Δ ى ط ر = $\frac{1}{2}$ ل م جاى

= $\frac{1}{2} \times 2.3 \times 1.2 \times$ **جا**45°

= 0.976 سم^2 (مقرباً إلى ثلاثة أرقام معنوية)

مثال 6:

في Δ س ص ع ، قياس $\angle$ ص = 40° ، قياس $\angle$ ع = 30° ، س ص = 3.4 سم ، س ع = 5 سم .احسب مساحة Δ س ص ع .



الحل:

علينا أولاً إيجاد قياس الزاوية المحصورة $\measuredangle$ س

$\measuredangle$س = 180° - 40° - 30° (مجموع الزوايا في المثلث)

= 110°

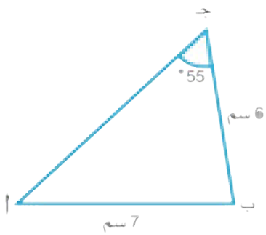
$\therefore$ مساحة المثلث س ص ع = $\frac{1}{2}$ ص ع جاس

= $\frac{1}{2}$ × 5 × 3.4 × جا110°

= 7.99 سم^2 (لإقرب 3 أرقام معنوية)

مثال 7:

في $\triangle$ أ ب حـ ، أ ب = 7 سم ، ب حـ = 6 سم ، قياس $\measuredangle$ حـ = 55° ، احسب مساحة $\triangle$ أ ب حـ.



الحل:

علينا إيجادقياس الزاوية المحصورة بْ قبل ايجاد المساحة

الضلع أ حـ المقابل $\measuredangle$ ب مجهول ، لذا علينا أولاً ايجاد قياس $\measuredangle$ أ .

بتطبيق $\frac{\text{جاأ}}{\text{س}} = \frac{\text{جاحـ}}{\text{ع}}$ (قاعدة الجيب)

$\therefore$ نجد $\frac{\text{جاأ}}{6} = \frac{\text{جا}55}{7}$

$\therefore$ جاأ = $\frac{6\ \text{جا}55^\circ}{7}$

$\therefore$ قياس $\measuredangle$ أ = 44.6°

$\therefore$ قياس $\measuredangle$ ب = 180° - 55° - 44.6° (مجموع زوايا المثلث)

= 80.4°

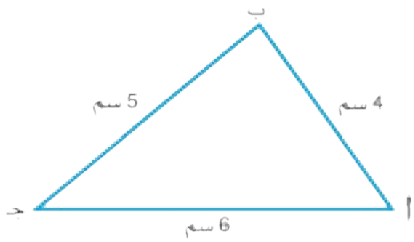
$\therefore$ مساحة $\triangle$ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ س ع جا ب

= $\frac{1}{2}$ × 6 × 7 × جا 80.4°

= 20.7 سم^2 (مقرباً لثلاثة أرقام معنوية)

مثال 8 :

في Δ ا ب حـ ، ٩ ب = 4 سم ، ب حـ = 5 سم ، حـ ٩ = 6 سم احسب مساحة Δ ٩ ب حـ



الحل :

بتطبيق جتا حـ = $\frac{س^2 + ص^2 - ع^2}{2 س ص}$ (قاعدة جيب التمام)

نجد أن جتا حـ = $\frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 (5)(6)} = \frac{45}{60} = 0.75$

∴ قياس ∠ حـ = 41.4°

ملحوظة:
نحتاج أولاً ايجاد احدى الزوايا وليس من المهم ايها

∴مساحة Δ ا ب حـ = $\frac{1}{2}$ × س ص جا حـ

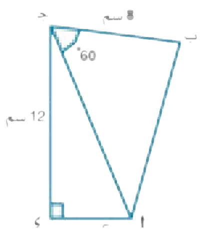
= $\frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times$ جا 41.4°

= 9.92 سم^2 (مقرياً لثلاثة أرقام معنوية)

مثال 9 :

٩ ب حـ شكل رباعي فيه قياس ∠ ٩ ء حـ = 90° ، قياس ∠ ب حـ ٩ = 60 ، ء ٩ = 5 سم ، ب حـ = 8سم ،ءحـ = 12 سم ، اوجد مساحة الشكل .

الحل :



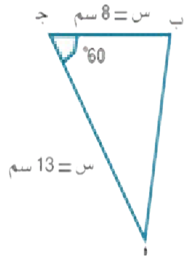
مساحة Δ حـ ء ٩ = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الإرتفاع

= $\frac{1}{2} \times 5 \times 12$

= 30 سم^2

ملحوظة:
مساحة الرباعي = مساحة المثلثين

لإيجاد مساحة Δ ا ب حـ ، أوجد أولاً طول $\overline{\text{أ حـ}}$



أ حـ ^{2} = 25 + 144 = 169

$\therefore$ أحـ = $\sqrt{169}$ = 13 سم (لا يوجد طول سالب)

$\therefore$مساحة Δ ا ب حـ = $\frac{1}{2}$ س ص جا حـ

= $\frac{1}{2}$ × 8 × 13 × جا 60°

= 45.03 سم

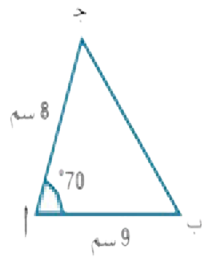
مساحة أ ب حـ ء = 30 + 45.03

= 75.0 سم^3 (مقرباً لثلاثة أرقام معنوية)

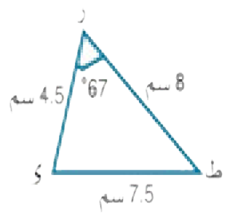
تمرين 2 - جـ :

1 - أوجد مساحة المثلثات الأتية

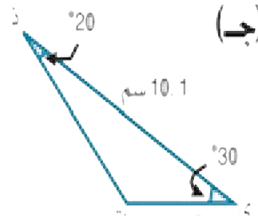
(أ)



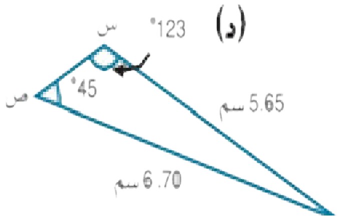
(ب)



(جـ)



(د)



2 جد لكل من الأتي أن أ ب حـ مثلث فيه الأضلاع س ، ص ، ع ، اوجد مساحة المثلث أ ب حـ.

أ قياس $\angle$ أ = 24° ، ص = 5 سم ، ع = 6 سم

ب قياس $\angle$ ب = 65° ، س = 42 سم ، ع = 2.7 سم

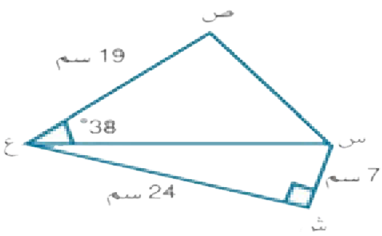
جـ قياس $\angle$حـ = 149° ، س = 9 سم ، ص = 2.16سم

3 أوجد مساحة Δ ا ب حـ في كل من الحالات الأتية :

(أ) س = 4سم ص = 5 سم ع = 8 سم

(ب) س = 9.01 سم ص= 8.03 سم ع = 7.05سم

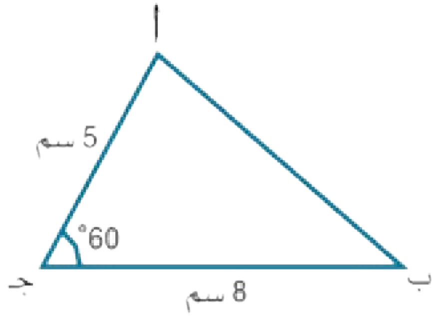
4 ش س ص ع شكل رباعي فيه قياس $\angle$ ش = 90° ، قياس $\angle$ س ع ص = 38° ، ش س = 7سم ، ش ع = 24سم ، ص ع = 19 سم ، احسب مساحته .



5 في المثلث أ ب حـ قياس $\angle$ ا ب حـ = 60° ، أ حـ = 5 سم ، ب حـ = 8 سم احسب

أ مساحة المثلث أ ب حـ

ب طول أ ب

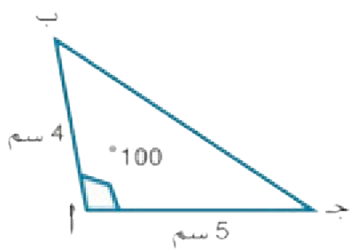


6 في Δ ٲ ب حـ ، ٲ ب = 4سم ، ٲ حـ = 5سم ، قياس ∠ب ا حـ = 100° استخدم بقدر الضرورة المعلومات المعطاة بالشكل لحساب

ٲ مساحة Δ ٲ ب حـ

ب $(\text{ب حـ})^2$

جـ [جا80° = 0.985 - جتا 80° = 0.174]

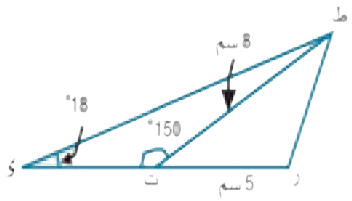


7 - **في الشكل** ء ت ر خط مستقيم قياس ∠ط ءت = 18° قياس ∠ ء ت ط = 150° ، ط ت = 8 سم ، ت ر = 5سم

احسب

ٲ ء ت

ب مساحة Δ ء ط ر

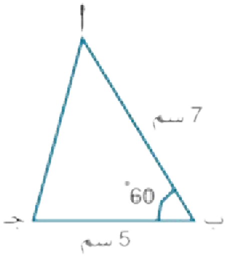


8 - **في المثلث ا ب حـ** ٲ ب = 7سم ،**ب حـ**= 5 سم قياس

∠ ٲ ب حـ = 60°

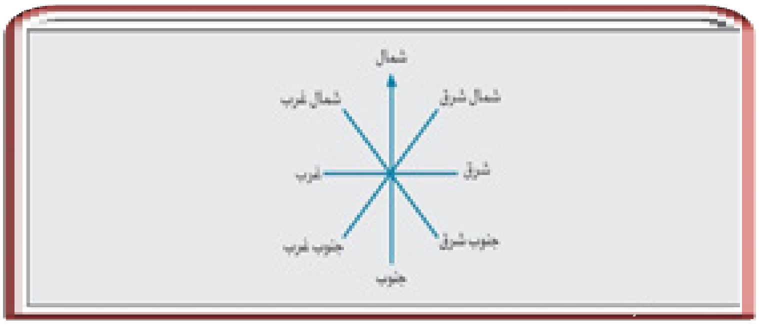
(أ) احسب مساحة المثلث

(ب) احسب بقاعدة جيب التمام طول ٲ حـ



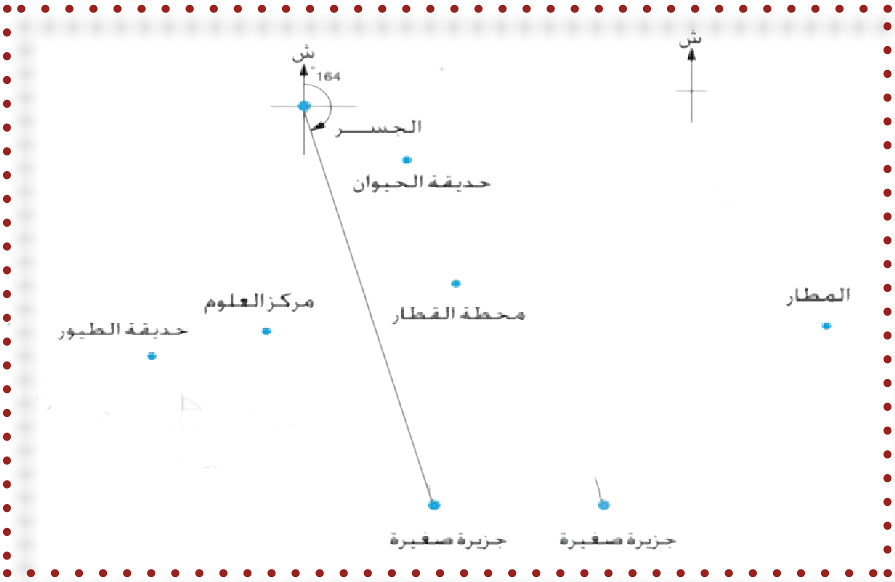
2 - 4 الإتجاهات Bearings

يبين الشكل نقاط البوصلة الثماني الأساسية حيث الإتجاهات ش ، حـ ، س، غ تدل على شمال وجنوب وشرق وغرب على التوالي.



قد تكون قرأت عبارات مثل «الجبل يقع إلى الشمال الشرقي من البحيرة » ا لإتجاه شمال شرقي (اختصاره ش س) في المنتصف بين الشمال والشرق والزاوية بين ش س مقدارها 45° .

للحصول على اتجاه الجزيرة الصغيرة من الجسر يجل رسم السهم الأساسي (↑)عند الجسر ومن ثم استخدم المنقلة لقياس الزاوية من خط الشمال في اتجاه عقارب الساعة للخط الذي يربط الجزيرة الصغيرة بالجسر الزاوية المقاسة 164° ونقول أن اتجاه الجزيرة الصغيرة من الجسر 164°

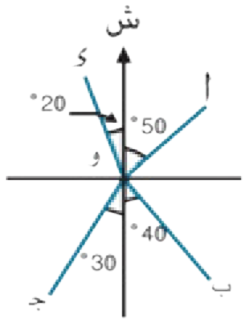


❖ عند البحث عن الإتجاه ، نقيس دائماً مع اتجاه عقارب الساعة من الشمال .
❖ تعين الإتجاهات دائماً بثلاثة ارقام

مثال 10:

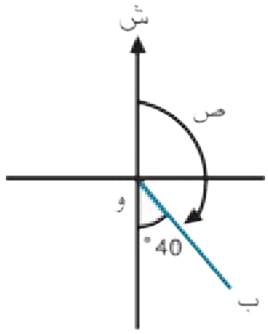
اكتب اتجاه

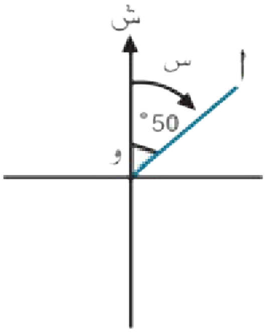
(أ) أ من و (ب) ب من و (حـ) حـ من و (د) ى من و



الحل :

اتجاه أ من و يكون 050°





(ب)يعطي قياس $\angle$ ص الأتجاه لـ ب من و

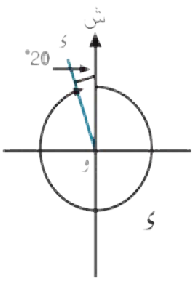
$\angle$ ص = 180° - 40° = 140° (الزاوية المجاورة على الخط المستقيم)

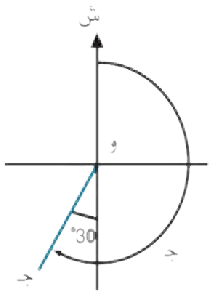
∴ اتجاه ب من ويكون 140°

(حـ) يعطي قياس $\angle$ حـ اتجاه حـ من و

$\angle$ حـ = 180° + 30° = 210°

∴ اتجاه حـ من و يكون 210°





(د)يعطي قياس $\angle$ ى اتجاه ى من و قياس

$\angle$ ى = 360° - 20° = 340°

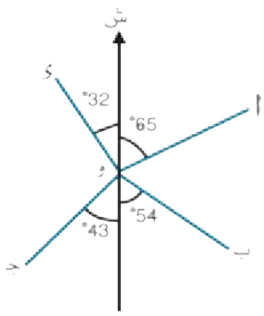
∴ اتجاه ى من و يكون 340°

مثال : 11

اوجد الإتجاهات لـ

(أ) و من ﻫ   (ب) و من ب

(حـ) و من حـ   (د) و من د



الحل :

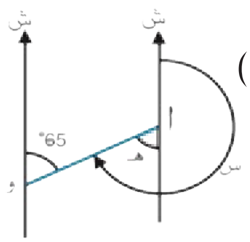
(أ) يعطي قياس $\measuredangle$ س الأتجاه لـ و من أ

قياس $\measuredangle$ هـ = 65° (زوايا متبادلة وخطوط متوازيان)

$\therefore$ قياس $\measuredangle$ س = 180° + $\measuredangle$ هـ

= 180° + 65° = 245°

$\therefore$ اتجاه ومن ﻫ يكون 245°



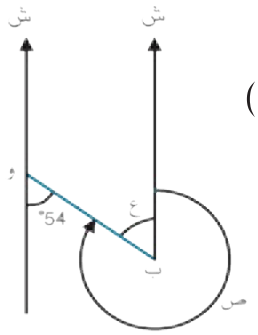
(ب) يعطي قياس $\measuredangle$ ص الأتجاه لـ و من ب

قياس $\measuredangle$ ع = 54° (زوايا متبادلة وخطوط متوازيان)

$\therefore$ قياس $\measuredangle$ ص = 360° - 54°

= 306°

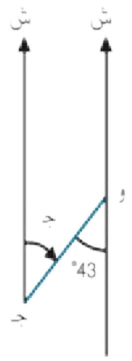
$\therefore$ اتجاه ومن ب يكون 306°



(حـ) يعطي قياس $\measuredangle$ جـ الأتجاه لـ و من حـ قياس

قياس $\measuredangle$ حـ = 43° (زوايا متبادلة وخطوط متوازيه)

$\therefore$ اتجاه ومن جـ يكون 043°

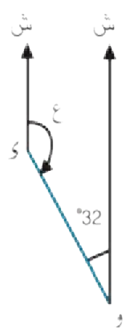


(د) يعطي قياس $\measuredangle$ ع الأتجاه لـ و من ى

قياس $\measuredangle$ ع = 180° - 32° (زوايا داخلة وفي جهة واحدة)

= 148°

$\therefore$ اتجاه ومن ى يكون 148°

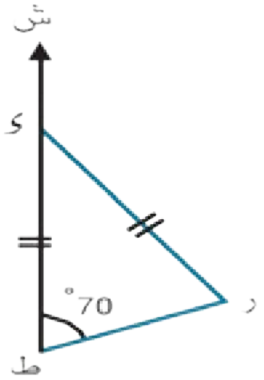


مثال 12 :

تكون النقط ى ، ط ، ر في مستوى الأرض والإتجاه لـ ر من ط يكون 070° بمعلومية أن ى ط = ى ر أوجد اتجاه :

(أ) ر من ى

(ب) ى من ر.



الحل :

(أ) يعطي قياس ∠ س الأتجاه لـ ر من ى

قياس ∠ هـ = 70° (قاعدة المثلث المتساوي الساقين)

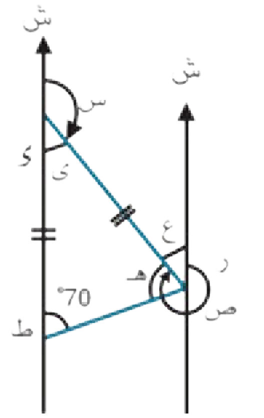
∴ قياس ∠ ى = 180° - 70° - ∠ هـ **(مجموع زوايا المثلث)**

= 180° - 70° - 70° = 40°

∴ قياس ∠ س = 180° - 40° (الزوايا المجاورة على خط مستقيم)

= 140°

∴ اتجاه ر من ى يكون 140°



(ب) يعطي قياس ∠ ص الأتجاه لـ ى من ر

قياس ∠ ع = قياس ∠ ى (زوايا متبادلة ، خطوط متوازية)

= 40°

∴ قياس ∠ ص = 360° - 40° (الزواياحول نقطة)

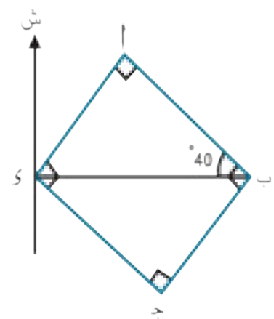
= 320°°

∴ اتجاه ى من ر يكون 320°

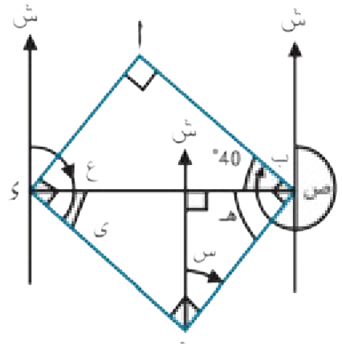
مثال 13 :

ا ، ب ، حـ ، ى أربعة أركان لقطعة أرض مستطيلة ومستوية ، بمعلومية أن ب تقع في الشرق من ى بحيث ∠أ ب ى = 40° ، احسب اتجاه

(أ) أ من ب　　　(ب) ب من حـ　　　(جـ) حـ من ى



الحل :



(أ) يعطي قياس ∠ ص اتجاه أ من ب

قياس ∠ ص = 270° + 40° = 310°

∴ اتجاه أ من ب يكون 310°

(ب) يعطي قياس ∠ س الأتجاه ب من حـ

∴ قياس ∠ هـ = 90° - 40°(ركن مستطيل)

= 50°

∴ قياس ∠ س = 180° - 90° - 50° (مجموع زوايا مثلث)

= 40°

∴ اتجاه ب من حـ يكون 040°

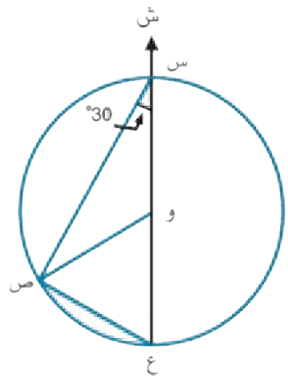
(حـ) يعطي قياس ∠ ع اتجاه حـ من ى

∴ قياس ∠ ى 40°(زوايا متبادلة ، خطوط متوازية)

∴ قياس ∠ ع = 90° + 40° = 130°

∴ اتجاه حـ من ى يكون 130°

مثال 14:



س ، ص ، ع ثلاث نقاط با رض مستوية تقع على محيط دائرة مركزها و. ع تقع إلى الجنوب من س ، و. قياس ∠ ص س ع = 30° . احسب اتجاه .

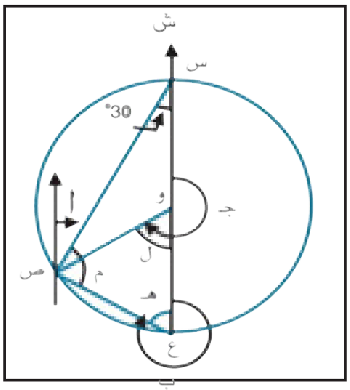
(أ) س من ص (ب) ص من ع (حـ) ص من و

الحل

(أ) يعطي قياس ∠ أ اتجاه س من ص

قياس ∠ أ = 30° (زوايا متبادلة / خطوط متوازية)

∴ اتجاه س من ص يكون 030°



(ب) يعطي قياس ∠ ب إتجاه ص من ع

قياس ∠ ص= 90° (زاوية في نصف دائرة)

∴ قياس ∠ هـ = 180° - 90° - 30°(مجموع زوايا مثلث)

= 60°

∴ قياس ∠ ب = 360° - 60° (مجموع زوايا حول نقطة)

= 300°

∴ اتجاه ص من ع يكون 300°

(حـ) يعطي قياس ∠ حـ اتجاه ص من و

∴ قياس ∠ ل = 2 (30°) (∠ مركزية = ضعف زاوية محيطية)

= 60°

∴ قياس ∠ حـ = 180° + 60° = 240°

∴ اتجاه ص من و يكون 240° .

تمرين 2 – د:

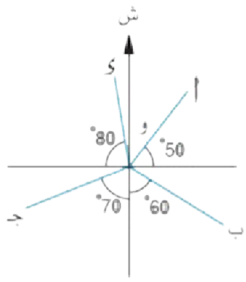
1 اكتب اتجاه :

أ أ من و

ب ب من و

جـ حـ من و

د ى من و



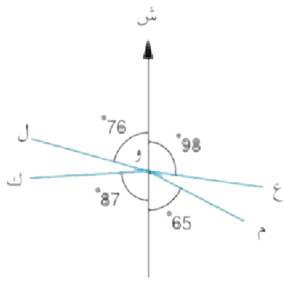
2 أوجد اتجاه و من :

أ ع

ب ك

جـ ل

د م

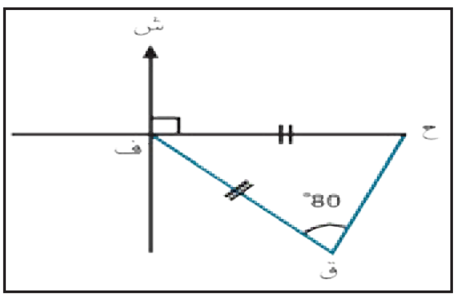


3 النقط ح ، ف ، ن على أرض مستوية ح تقع إلى الشرق من ف. ف ح = ف ن ، ∠ ف ن ح = 80° ،

أوجد اتجاه

أ ن من ف   ب ف من ن

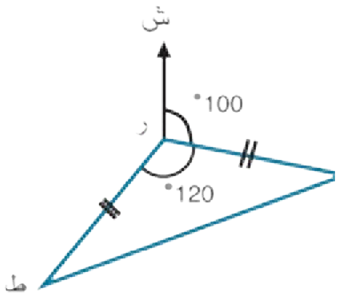
جـ ن من ح   د ح من ن



4 - المدن ى، ط ، ر تكون بحيث ى، ط على ابعاد متساوية من ر من يكون اتجاه ى من ر 100° ويكون اتجاه ط من ر

(أ) ر من ط

(ب) ط من ى



تمرين 2 - 5: مسائل تتضمن حساب المثلثات والاتجاهات

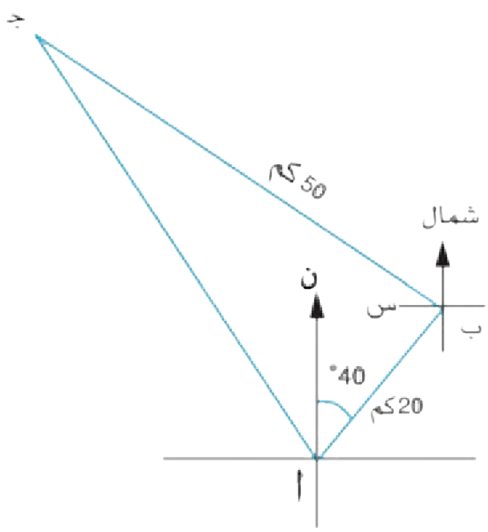
PROBLEMS INVOIVING TRIGONOMETRY AND BEARINGS

مثال 15:

تسافر فرقة بحث في البحر 20 كم من القاعدة أ في اتجاه 040° إلى ب ثم 50 كم في اتجاه 300° إلى حطام السفينة حـ .

(أ) كم تبعد السفينة الغارقة عن القاعدة ؟

(ب) ما اتجاه السفينة الغارقة من القاعدة ؟



الحل :

(أ) يعطي قياس ∠ أب س = 90° - 40° (زوايا متتامة)

= 50°

قياس∠ س ب حـ = 300° - 270° = 30°

∴ قياس∠ أب حـ = 50° + 30° = 80°

$\overline{\text{أحـ}}^2 = 20^2 + 50^2 - 2(20)(50)$ جتا 80° = 2552.7

أحـ = $\sqrt{2552.7}$

= 50.524 = 50.5 كم (لإ قرب ثلاث أرقام معنوية)

ولهذا فإن السفينة تحطمت على بعد 50.5 كم من القاعدة

(ب) يطبق $\frac{\text{جا}\,\text{أ}}{50} = \frac{\text{جا}\,\text{ب}}{50.524}$

$\text{جا}\,\text{أ} = \frac{50\,\text{جا}\,\text{ب}\,80^\circ}{50.524} = 0.97459$

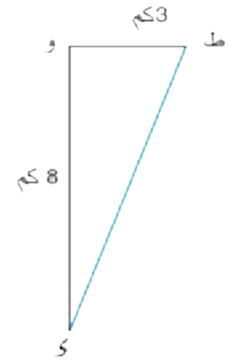
قياس $\angle$ أ $= 77.1^\circ$

$\therefore$ $\angle$ حـ أ ن $= 77.1 - 40^\circ = 37.1^\circ$

فإن موقع تحطم السفينة من القاعدة $= 360^\circ - 37.1^\circ = 322.9^\circ$

تمرين 2 - هـ:

1 - ى ، و ، ط ثلاث نقط با رض مستوية ونقطة ى تقع على جنوب و، ط تقع شرق و ، ط تقع شرق و ، و ى = 8 كم وط = 3 كم احسب اتجاه ط من ى

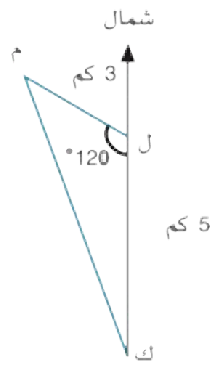


2 في الشكل ل تقع 5 كم ، في اتجاه شمال من ك ، ل، م = 3 كم قياس ∠ ك ل م = 120° احسب .

أ اتجاه م من ل

ب المسافة التي تقطعها ل إلى الشرق من م .

جـ مسافة ك م.



3 في الشكل أ تقع 10 كم ، شمال حـ ، أ ب = 5 كم، ب حـ = س كم ∠ حـ أ ب = 70°

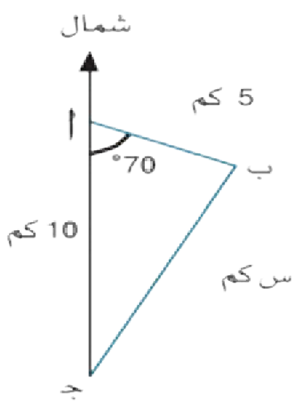
أ احسب اتجاه أ من ب

ب استخدم المعلومات المتاحة في ايجاد قيمة $س^2$

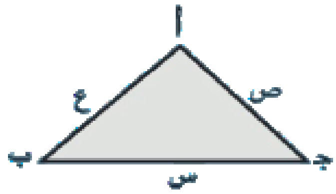
[جتا70° = 0.342

جا70° = 0.940

ظا70° = 2.75]



ملخص



1- قاعدة الجيب

$$\frac{\text{س}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ع}}{\text{جا جـ}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{جا أ}}{\text{س}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{ص}} = \frac{\text{جا جـ}}{\text{ع}}$$

– تستخدم قاعدة الجيب لحل المثلث اذا كان معلومًا فيه

(أ) قياسا زاويتين وطول ضلع

أو (ب) طولا ضلعين وقياس زاوية غير محصورة بينهما

2- قاعدة جيب التمام

$$\begin{cases} \text{س}^2 = \text{ص}^2 + \text{ع}^2 - 2\,\text{ص ع جتا أ} \\ \text{ص}^2 = \text{س}^2 + \text{ع}^2 - 2\,\text{س ع جتا ب} \\ \text{ع}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2 - 2\,\text{س ص جتا جـ} \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} \text{جتا أ} = \dfrac{\text{ص}^2 + \text{ع}^2 - \text{س}^2}{2\,\text{ص ع}} \\ \text{جتا ب} = \dfrac{\text{س}^2 + \text{ع}^2 - \text{ص}^2}{2\,\text{س ع}} \\ \text{جتا جـ} = \dfrac{\text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{ع}^2}{2\,\text{س ص}} \end{cases}$$

تستخدم قاعدة جيب التمام لحل المثلث إذا كان معلومًا فيه

(أ) أطوال ثلاثة أضلاع.

أو (ب) طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما.

3- إذا كان معلومًا في المثلث طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة، فإن:

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2}\,\text{س ص جا جـ}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{س ع جا ب}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{ص ع جا أ}$$

4- الاتجاه

– عند البحث عن اتجاه دائمًا تقيس في اتجاه عقارب الساعة من ناحية الشمال.

– الاتجاه يتعين دائمًا بثلاثة أرقام.

3

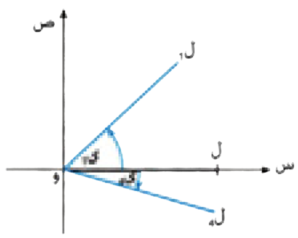
النسب والدوال المثلثية

النسب والدوال المثلثية

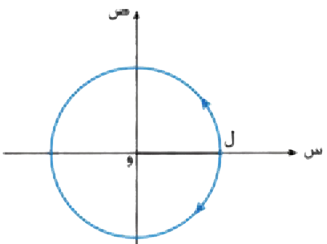
Trigonometric Ratios & Functions

1 - 3 الزوايا الموجبة والسالبة

يوضح الشكل 3 - 1 قطعة مستقيمة و ل على محور س التي تدور حول (و) في اتجاه عكس حركة عقارب الساعة لترسم إلى ول$_1$. الزاوية ى$_1$ التي رسمت تعرف بالزاوية الموجبة. عندما يرسم ول إلى ول$_4$ حول (و) مع حركة عقارب الساعة فإن الزاوية التي ترسم ى$_4$ تعرف بالزاوية السالبة. وعلى ذلك فإن الزاوية الموجبة هي زاوية ترسم من دوران و ل حول(و)عكس حركة عقارب الساعة. الزاوية السالبة هي زاوية ترسم من دوران و ل حول (و) مع حركة عقارب الساعة



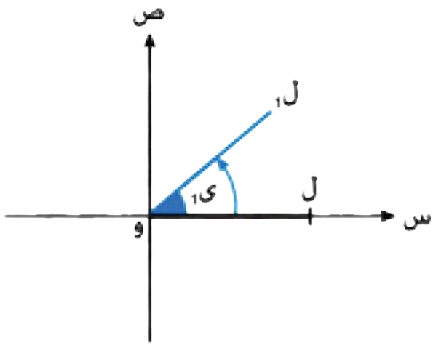
شكل 3 - 1



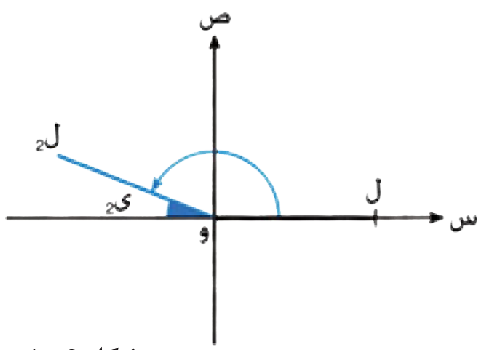
شكل 3 - 2

2 - 3 الزوايا الموجبة والسالبة

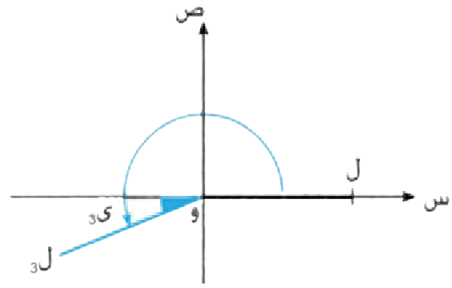
نفرض أن قطعة مستقية ول كما في الشكل 3 - 2 والتي يمكن أن تدور حول وإلى أي وضع في الأرباع الأربعة. لأية زاوية دوران تسمى الزاوية بين الوضع النهائي و ل ومسقطها على محور س بالزاوية الأساسية. إذا رسمت إلى محور السينات. فقياس الزاوية الأساسية يساوي صفراً. إذا رسمت إلى محور ص. فقياس الزاوية يساوى 90° توضح الأشكال 3 - 3. 3 - 4 . 3 - 5 . 3 - 6 أوضاعاً نهائية أخرى للقطعة و ل.



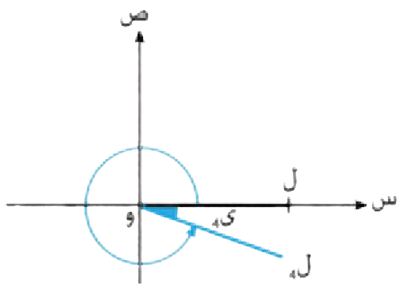
شكل 3 - 3



شكل 3 - 4



شكل 3 - 5



شكل 3 - 6

في الشكل 3 - 3 قياس الزاوية الأساسية ل و $ل_1$ = $ى_1$

في الشكل 3 - 4 قياس الزاوية الأساسية ل و $ل_2$ = 180° − ق ∠ ل و $ل_2$ = $ى_2$

في الشكل 3 - 5 قياس الزاوية الأساسية ل و $ل_3$ = ق ∠ ل و $ل_3$ - 180° = $ى_3$

في الشكل 3 - 6 قياس الزاوية الأساسية ل و $ل_4$ = 360° - ق ∠ ل و $ل_4$ = $ى_4$

للزوايا التي قياساتها أكبر من 360° نحصل على قياس الزاوية الأساسية بطرح 360° من قياس الزاوية المعطاة بالترتيب إذا كان ضروريا . حتى نحصل أولاً على زاوية يقل قياسها عن 360° تم تقدم كما في الأشكال 3 - 3 . 3 - 4 . 3 - 5 . 3 - 6 .

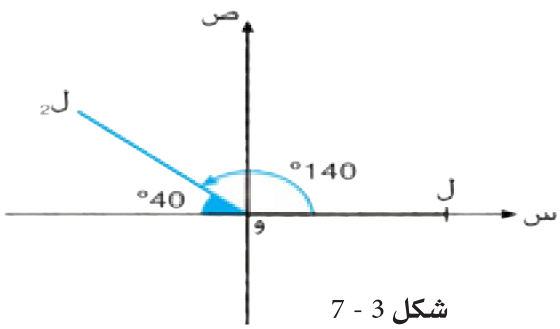
مثال 1

أوجد قياس الزاوية الأساسية من الدورانات الآتية حول نقطة الأصل في مستوى الإحداثيات

(أ) 140°　　(ب) 240°

(جـ) 330°　　(د) 400°

(د) - 80°　　(و) - 600°



شكل 3 - 7

الحل :

(أ) في شكل 3 - 7 قياس زاوية الدوران = 140°

تقع الزاوية في الربع الثاني

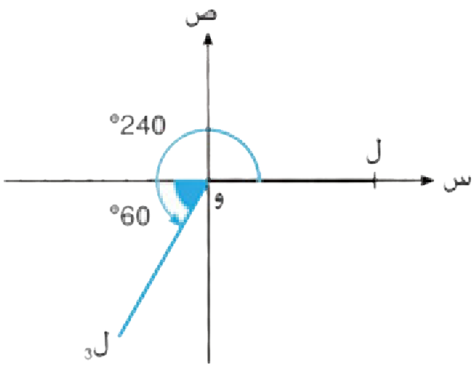
الزاوية الأساسية تساوي :

180° - 140° = 40°

(ب) في شكل 3 - 8 قياس زاوية الدوران = 240°

تقع الزاوية في الربع الثالث

قياس الزاوية الأساسية يساوي : $240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$

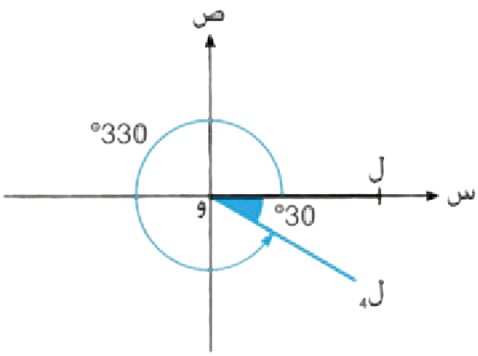


شكل 3 - 8

(جـ) في شكل 3 - 9 قياس زاوية الدوران = 330°

تقع الزاوية في الربع الرابع

قياس الزاوية الأساسية يساوي : $360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$



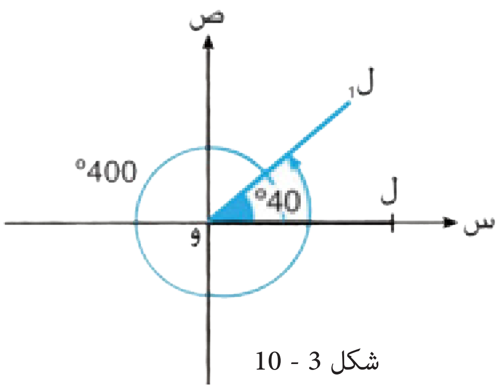
شكل 3 - 9

(د) في شكل 3 - 10 قياس زاوية الدوران = 400°

قياس الزاوية الأساسية يساوي : $400^\circ - 360^\circ = 40^\circ$

تقع الزاوية في الربع الأول

قياس الزاوية الأساسية = 40°



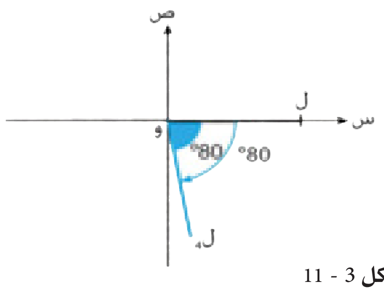
شكل 3 - 10

(هـ) في شكل 3 - 11

قياس زاوية الدوران = - 80 ˚

تقع الزاوية في الربع الرابع

قياس الزاوية الأساسية تساوي 80 ˚



الشكل 3 - 11

(و) في شكل 3 - 12

قياس زاوية الدوران = – 600˚

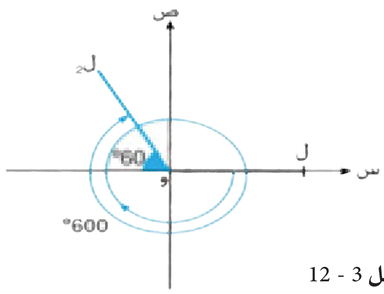
باتخاد القيمة العددية للعدد – 600˚ . يكون لدينا 600˚

إذن 600˚ - 360˚ = 240˚

تقع الزاوية (– 240˚) في الربع الثاني

(هذه الزاوية قيست مع اتجاه عقارب الساعة)

قياس الزاوية الأساسية يساوي 240˚ - 180˚ = 60˚



شكل 3 - 12

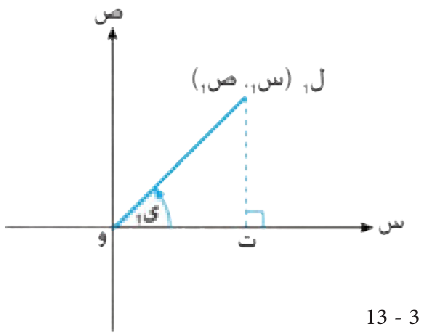
3 - 3 النسبة المثلثية لزاوية

نفرض ∠ س و ل$_1$ في الشكل (3 - 13) ل$_1$ هي النقطة (س$_1$، ص$_1$) قياس الزاوية الأساسية س و ل$_1$ يساوي ى$_1$ ويمكن إيجاد النسبة المثلثية لأية زاوية بمراعاة قياس زاويتها الأساسية وإشارة النسبة.

إذن جا ∠س و ل$_1$ = جا ى$_1$ = $\frac{\text{ص}_1}{\text{و ل}_1}$

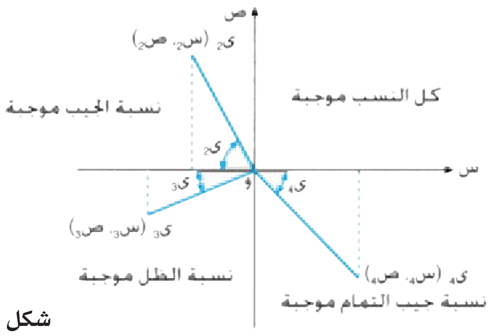
جتا ∠ س و ل$_1$ = جتا ى$_1$ = $\frac{\text{س}_1}{\text{و ل}_1}$

ظا ∠ س و ل $_1$ = ظا ى $_1$ = $\frac{ص_1}{س_1}$



شكل 3 - 13

يعتبر و ل $_1$ صورة نصف القطر الدائر و ل من محور السينات . هذه الصورة دائماً تؤخذ حيث لها قيمة موجبة . القيمتان س $_1$ ، ص $_1$ موجبتان . إذن جميع النسب المثلثية موجبة في الربع الأول .



شكل 3 - 14

بنفس الطريقة يمكن الحصول على النتائج الآتية

في الربع الأول : جميع النسب موجبة

في الربع الثاني : الجيب فقط موجب

في الربع الثالث : الظل فقط موجب

في الربع الرابع : جيب التمام فقط موجب

يوضح شكل 3 - 14 زاوية واحدة في كل من الأرباع الثاني والثالث والرابع مع قياسات زواياها الأساسية على الترتيب ى $_2$. ى $_3$. ى $_4$. بالإضافة إلى نسب الجيب وجيب التمام والظل ويوجد ثلاث نسب مثلثية أخرى معرفة كا لأتي :

(1) قاطع تمام θ وتكتب قتاθ . وتساوي $\frac{1}{جاθ}$

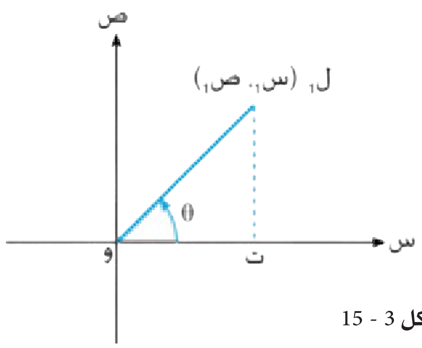
(2) قاطع θ وتكتب قا θ . ويساوي $\frac{1}{جتاθ}$

(3)ظل تمام θ وتكتب ظتا θ . وتساوي $\frac{1}{ظاθ}$

من الممكن أن نعبر عن نسبة مثلثية معلومة بدلالة نسبة أخرى . لاحظ شكل 3 - 15

جا θ= $\frac{ص_1}{و ل_1}$ ، جتا θ = $\frac{س_1}{و ل_1}$

إذن $\frac{جا θ}{جتا θ} = \frac{\frac{ص_1}{و ل_1}}{\frac{س_1}{و ل_1}} = \frac{ص_1}{س_1}$



شكل 3 - 15

ولكن $\frac{ص_1}{س_1}$ = ظا θ

إذن $\frac{جا θ}{جتا θ}$ = ظا θ

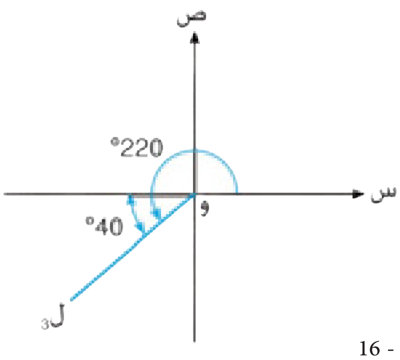
وبالمثل نستنتج أن $\frac{جتا θ}{جا θ}$ = ظتا θ

مثال 2

اوجد قيمة كل من النسب المثلثية الأتية باستخدام الألة الحاسبة

(أ) جا 220° (ب) جتا 325° (ج) ظا 410°

(د) جتا 500° (هـ) جا (- 160°)



شكل 3 - 16

الحل :

(أ) في الشكل 3 - 16

بفرض زاوية قياسها 220°

إذن قياس الزاوية الأساسية يساوي

220° - 180° = 40°

إشارة جيب الزاوية في الربع الثالث سالبة

جا 220° = - جا 40° = - 0.6428

(ب) في الشكل 3 - 17

قياس الزاوية 325°

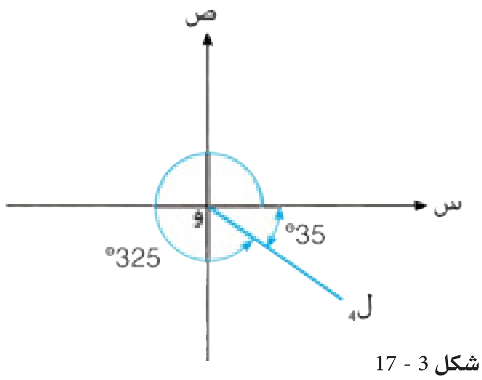
تقع هذه الزاوية في الربع الرابع

وجيب التمام موجب

قياس الزاوية الأساسية يساوي

$360^\circ - 325^\circ = 35^\circ$

إذن جتا 325° = جتا 35° = 0.8192



شكل 3 - 17

(جـ) في الشكل 3 - 18

قياس الزاوية 410°

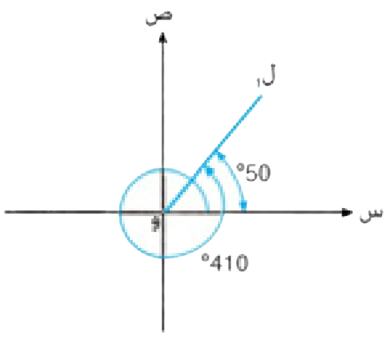
$410^\circ - 360^\circ = 50^\circ$

قياس الزاوية الأساسية = 50°

تقع هذه الزاوية في الربع الأول

والظل موجب

إذن ظا 410° = ظا 50° = 1.192



شكل 3 - 18

(د) في الشكل 3 - 19

قياس الزاوية المعلومة = 500°

$500^\circ - 360^\circ = 140^\circ$

الزاوية التي قياسها 140° . تقع في الربع الثاني

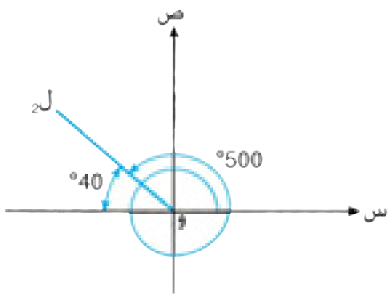
جيب تمامها سالب

قياس الزاوية الأساسية يساوي

$180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

إذن جتا 500° = - جتا 40°

= - 0.7660



شكل 3 - 19

(هـ) في الشكل 3 - 20

قياس الزاوية المعلومة = - 160°

إذن الزاوية تقع في الربع الثالث

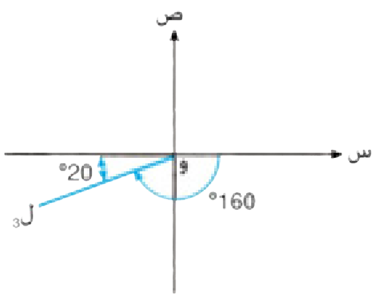
وجيبها سالب

قياس الزاوية الأساسية يساوي

$180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$

إذن جا(-160°) = - جا 20°

= - 0.3420



شكل 3 - 20

تمرين 3 – أ :

1 اوجد قياس الزاوية الأساسية لكل من القياسات الأتية :

- أ 165°
- ب 250°
- جـ 306°
- د -70°
- هـ -200°
- و 420°
- ط 560°
- ى -290°
- ك -250°
- ل -320°

2 اوجد قيمة كل من النسب المثلثية الأتية:

- أ جا 210°
- ب جتا 46°
- جـ ظا 142°
- د جا 140°
- هـ جتا 123°
- و ظا 305°
- ز - جتا 230°
- ح - جا 253°
- ط ظا 350°
- ى جتا (-53°)
- ك جا (-152°)
- ل ظا (-200°)

3 –عبر عن الأتي بدلالة نسبة مثلثية في س فقط حيث س زاوية حادة:

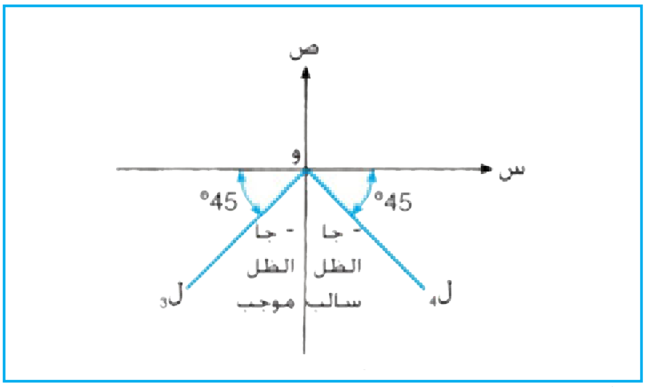
- أ جا $(90^\circ -$ س$)$
- ب جتا $(90^\circ -$ س$)$
- جـ ظا $(90^\circ -$ س$)$
- د جا $(180^\circ -$ س$)$
- هـ جتا $(180^\circ -$ س$)$
- و ظا $(180^\circ -$ س$)$
- ز جا $(180^\circ +$ س$)$
- ح جتا $(180^\circ +$ س$)$
- ط ظا $(180^\circ +$ س$)$
- ى جا $(270^\circ -$ س$)$
- ك جتا $(360^\circ -$ س$)$
- ل ظا $(360^\circ -$ س$)$

مثال 3:

إذا كان جاس $= -\frac{1}{\sqrt{2}}$ وكانتا جا س° ، ظا س° لهما إشارتان مختلفتان فأوجد قيم س حيث

$0 <$ س $< 360^\circ$

ملحوظة:
هنا س لا تمثل مقدار زاوية بل قيمة عددية . مقدار الزاوية س°



شكل 3 - 21

الحل :

جاس° $= -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftarrow$ س° تقع في الربعين الثالث والرابع

ظا س ° موجب في الربع الثالث . سالب في الربع الرابع . إذن لكي يكون الجيب والظل لهما إشارتان مختلفتان فالزاوية المطلوبة تكون في الربع الثالث .

قياس الزاوية الأساسية = 45 °

إذن س = 180° + 45° = 225°

عندما 0 > س< 360°

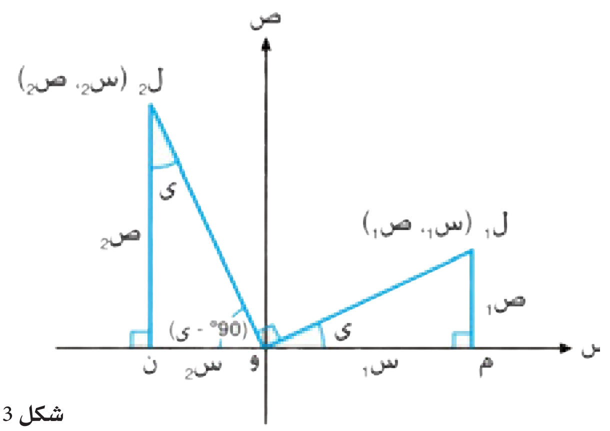
مثال 4:

عبر عن:

(أ) جا (ى + 90°) (ب) جتا(ى + 90°) (جـ) ظا(ى + 90°)

بدلالة نسبة مثلثية واحدة في ى حيث ى زاوية حادة .

(أ)



شكل 3 - 22

الحل :

في الشكل 3 - 22 ل1 ل2 هما النقطتان (س1، ص1) (س2، ص2) على الترتيب .

ق (∠ س و ل1)= ى. ق (∠ ل1 و ل2) = 90° ل2 ن . ل1 م عمودان على محور س.

جا(ى + 90°) = جا ∠ل2 و ن

= جا(90° - ى)

$$= \frac{ص_2}{و ل_2}$$

في Δ و ل2 ن . ق (∠ و ل2 ن) = ى.

$$جتا ى = \frac{ص_2}{و ل_2}$$

إذن جا (ى + 90°) = جتا ى

(ب) جتا(ى + 90°) = − جتا(∠ ل$_2$ و ن)

= − جتا(90° − ى)

= $\frac{س_2}{و ل_2}$

في Δ و ل$_2$ ن . $\frac{س_2}{و ل_2}$ = − جا ى

إذن جتا(ى + 90°) = − جا ى

(جـ) ظا(ى + 90°) = − ظا ∠ ل$_2$ و ن

= − ظا(90° − ى)

= $\frac{ص_2}{س_2}$

في Δ و ل$_2$ ن . $\frac{ص_2}{س_2}$ = − ظتا ى

إذن ظا (ى + 90°) = − ظتا ى

تمرين 3 - ب

1 اوجد س حيث $0^\circ \leqslant$ س $\leqslant 360^\circ$ مقرباً الإجابات لرقم عشري واحد :

أ جا س = 0.8934   ب جا 2 س = − 0.2571

جـ جتا س = 0.8625   د جتا 2س = − 0.3239

هـ ظا $\frac{س}{2}$ = 0.4348   و ظاس = ± 1.546

ح جتاس = ± 0.3830   ط ظا 2س = 0.6976

جـ جاθ = − 0.7660 ، − $180^\circ \leqslant$ θ $\leqslant 180^\circ$ ، جتاθ سالب .

د جتاθ = − 0.3567 ، $180^\circ \leqslant$ θ $\leqslant 540^\circ$ ، جاθ موجب .

2 اوجد الزاوية θ حسب الشروط المعطاة :

أ جا θ = 0.5 حيث $0^\circ <$ θ $< 360^\circ$. جتا θ موجب .

ب ظا θ = + $\sqrt{3}$ حيث $0^\circ \leqslant$ θ $\leqslant 360^\circ$. جا θ سالب .

3 اوجد س حيث س $0^\circ \leqslant$ س $\leqslant 360^\circ$

أ جا س = جتا 35° ب جتا س = جا42°

جـ جا س = − جتا 30° د جا س = جا 320°

هـ ظا س= جتا 180° و جا 2س = جتا 40°

ز جتا $\frac{س}{2}$= جا 55°

4 في كل من الأسئلة الآتية أوجد قيمة س حيث $0^\circ \leqslant$ س $\leqslant 360^\circ$ لأقرب درجة

أ 2 جا س = 1   ب 2 جا س = جتا س

جـ جتا $\frac{س}{2}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ د 2 جا $\frac{س}{2}$ =1

5 - أوجد القيم العددية لكل من جتا 2 س ، ظا 3س ، جا 4 س عندما س= $\frac{3\pi}{5}$ راديان .

3 - 4 ثلاث متطابقات مثلثية بسيطة

يوضح شكل 3 - 23 مثلث ن م ل القائم الزاوية فيه ق ∠ ن م ل = 90° . ق ∠ م ن ل = θ

باستخدام نظرية فيثاغورث :

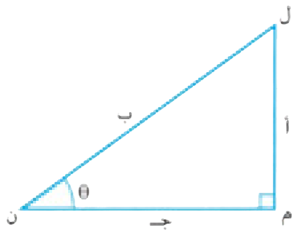
أ² + جـ² = ب²

بقسمة المعادلة على ب².

إذن $\frac{أ^2}{ب^2} + \frac{جـ^2}{ب^2} = \frac{ب^2}{ب^2}$ ⇐ جا²θ + جتا²θ = 1

∴ جتا² θ + جا² θ =1

حيث $(\frac{أ}{ب})^2$ = جا² θ ، $(\frac{جـ}{ب})^2$ = جتا² θ



شكل 3 - 23

هذه العلاقة في الحقيقة صحيحة لجميع قيم θ وتسمى متطابقة مثلثية . وقد شرحت هنا في حالة زاوية حادة . ولكن يمكن البرهنة على صحتها لجميع قيم θ.

بما أن جتا² θ + جا² θ = 1 ....(1)

بقسمة طرفي المعادلة على جتا² θ نجد أن

$\frac{جتا^2 \theta}{جتا^2 \theta} + \frac{جا^2 \theta}{جتا^2 \theta} = \frac{1}{جتا^2 \theta}$

⇐ ظا²θ + 1 = قا²θ

وأكثر شيوعاً 1 + ظا²θ = قا²θ ....(2)

بالمثل بقسمة المعادلة (1) على جا² θ نجد أن

⇐ظتا²θ + 1 =قتا²θ ....(3)

المتطابقات الثلاثة (1) ،(2)،(3)مفيدة في حل المعادلات المثلثية

مثال 5:

اثبت صحة المتطابقات الأتية

(أ) **جا** $^4\theta$ - **جتا** $^4\theta \equiv 1 - 2$ **جتا** $^2\theta$

(ب) **قا** $^4\theta$ - **قا** $^2\theta \equiv$ **ظا** $^4\theta$ + **ظا** $^2\theta$

ملحوظة:
عادة نبدأ بالطرف الأصعب ونحاول استخدام المتطابقات السابقة لتحويله إلى الصيغة في الطرف الأخر . اتجه دائماً إلى المتطابقة المعتادة ثم اتجه إلى الصيغة النهائية التي تريدها

الحل :

(أ) **جا** $^4\theta$ - **جتا** $^4\theta$

= (**جا**$^2\theta$ + **جتا**$^2\theta$) (**جا**$^2\theta$ - **جتا**$^2\theta$)

= $1 \times$ [(1 - **جتا**$^2\theta$) - **جتا**$^2\theta$]

= 1 - 2 **جتا** $^2\theta$

(ب) **قا**$^4\theta$ - **قتا**$^4\theta$

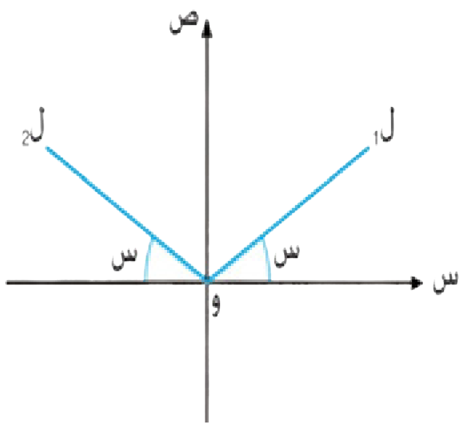
= **قا**$^2\theta$ (**قا**$^2\theta$ - 1)

= (**ظا**$^2\theta$ + 1) (**ظا**$^2\theta$)

ظا$^4\theta$ + **ظا**$^2\theta$

3 - 5 المعادلات المثلثية

تسمى المعادلة جا س = 0.5 معادلة مثلثية . نجد أن س = 30° . ولكن حل المعادلة عبارة عن أي قياس زاوية جيبها 0.5 في الربع الأول أو الربع الثاني مثلاً 30° ، 150° ، 390° ، 510°، .... إذا لم تُذكر حدود لـ س .



شكل 3 - 24

إذن للمعادلات المثلثية التي يطلب فيها عدد محدود من الحلول ، يجب أن يتضمن السؤال حدود قياسات الزاوية . لقد تعرضنا من قبل لهذه المعادلات في هذا الفصل عندما عالجنا الزوايا الأساسية . الآن سوف نتعرض لمعادلات تتضمن نسباً مثلثية للقوة 2 أي للدوال التربيعة والمعادلات التي تحتوي نسبتين مختلفتين . الأمثلة التالية سوف توضح الطرق المتضمنة .

مثال 6:

إذا كان 6 جاس + $\frac{1}{\text{جا س}}$ = 5 . فأوجد قيم س حيث 0 ˚ ≤ **س** ≤360˚ التي تحقق المعادلة

الحل :

بما أن 6 جاس + $\frac{1}{\text{جاس}}$ = 5

بالضرب في **جاس** .

⇐ 6 **جا**^{2}س + 1 = 5 جاس

⇐ 6 **جا**^{2}س - 5 **جا** س + 1 = 0

⇐ (3 **جاس** - 1) (2 **جا** س - 1) = 0

⇐ 3 **جاس** - 1 = 0 أو 2 **جاس**- 1 = 0

⇐ **جاس** = $\frac{1}{3}$ أو **جاس** = $\frac{1}{2}$

⇐ س = 19.5˚ . 160.53˚ . أو س = 150˚ . 30˚

إذن س = 19.5˚ .30˚ 150˚. 160.5˚ حيث 0 ˚ ≤ **س** ≤360˚

مثال 7:

أوجد قيم س بين 0˚ . 360˚ التي تحقق المعادلة جتا^2 س - 2**جا**^{2}س =0

الحل :

جتا^{2}س - 2**جا**^{2}س =0 ....(1)

باستخدام **جا**^{2}س +**جتا**^{2}س = 1

نجد أن**جتا**^{2}س = 1 -**جا**^{2}س

بالتعويض عن جتا^{2}س س بالمقدار (1 - **جا**^{2}س) في المعادلة (1)

إذن 1 - **جا**^{2}س - 2**جا**^{2}س = 0

⇐ 1 - 3**جا**^{2}س = 0

⇐ **جا**^{2}س = $\frac{1}{3}$

⇐ **جاس** = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ = 0.5774 أو **جا** س = -$\frac{1}{\sqrt{3}}$ = - 0.5774

⇐ س = 35.3˚ . 144.74˚ أو س = 215.26˚ . 324.74˚

⇐ س = 35.3˚ ، 144.7˚ ، 215.3˚، 324.7˚ حيث 0˚ < س< 360˚

مثال 8

أوجد جميع قيم س مقربة لأقرب رقم عشري واحد حيث $0^\circ < س < 360^\circ$ والتي تحقق المعادلة

4 جاس جتاس = جتاس

الحل:

بما أن 4 جاس جتاس = جتاس

⇐ 4 جاس جتاس - جتاس = 0

⇐ جتاس (4 جاس - 1)=0

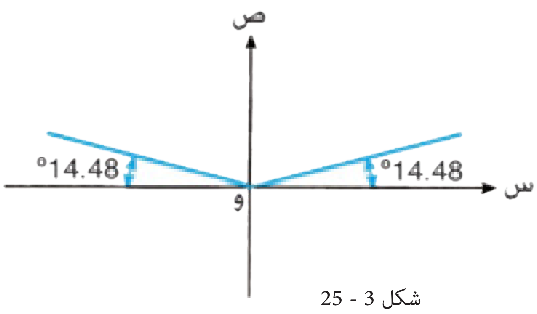
إذن جتاس = 0 أو 4 جاس - 1 =0

⇐ جاس = $\frac{1}{4}$

عندما جتاس= 0 ∴ س = 90° ، 270°

عندما جاس = $\frac{1}{4}$ إذن قياس الزاوية الأساسية 14.48°

∴ س = 165.5° ، 14.5°



شكل 3 - 25

قيم س التي تحقق المعادلة 4 جاس جتاس = جتاس هي 90°. 270°. 165.5°. 14.5° . حيث $0^\circ < س < 360^\circ$

مثال 9:

حل المعادلة 2 جتا^{2}س - 5 جتاس + 2 = 0 حيث $0^\circ < س < 360^\circ$

الحل:

بما أن 2جتا^{2}س - 5جتاس + 2 = 0

⇐ (2جتاس - 1) (جتاس - 2) = 0

⇐ 2جتاس - 1 = 0 أو جتاس - 2 = 0

⇐ جتاس = $\frac{1}{2}$ أو جتا س = 2

⇐ س = 60° . 300° . جتاس = 2 ليس لها حل

إذن س = 60° . 300° حيث $0^\circ < س < 360^\circ$

مثال 10:

إذن كان 2 ظا س – 1 = ظتاس .فأوجد قيمة س من 0° إلى 180° التي تحقق المعادلة المعطاة .

الحل :

بما أن 2 ظاس – 1 = ظتاس

⇐ بالضرب في ظاس . 2 ظا^{2}س - ظاس=1

⇐ 2 ظا^{2}س - ظاس - 1 =0

⟸ (2 ظا س + 1) (ظاس - 1) = 1

⟸ 2 ظا س + 1 = 0 أو ظاس - 1 = 0

⟸ ظاس = - $\frac{1}{2}$ أو ظاس = 1

⟸ س = 153.43° أو س = 45°

إذن س = 45° . 153.4° حيث 0° ≤ س ≤ 180°

مثال :11

أوجد جميع قياسات الزوايا من 0° إلى 360° المتضمنة والتي تحقق:

(أ) 4 جا س جتا س = 3 جا^2 س

(ب) جا (2 س - 10°) = - جا 54°

(جـ) قا^2 س = 3 ظا^2 س - 1

(د) 8 جا^2 س = قتا س

الحل :

(أ) 4 جا س جتا س = 3 جا^2 س

4 جا س جتا س - 3 جا^2 س = 0

جا س (4 جتا س - 3 جا س) = 0

جا س = 0 أو 4 جتا س - 3 جا س = 0

س = 0°، 180°، 360° أو 4 جتا س = 3 جا س

$\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} = \frac{4}{3}$

ظا س = $\frac{4}{3}$

س = 53.1°، 233.1°

إذن س = 0°، 53.1°، 180°، 233.1°، 360°

جا 54° = جا 234° = جا360°
(الربعان الثالث والرابع)

(ب) جا (2 س - 10°) = - جا 54°

2 س - 10° = 234°، 306°، 594°، 666°

إذن س = $\frac{234° + 10°}{2}$ ، $\frac{306° + 10°}{2}$ ، $\frac{594° + 10°}{2}$ ، $\frac{666° + 10°}{2}$

= 122°، 158°، 302°، 338°

إذن 2 س - 10 = 234°، 306° ... إلخ.

أيضًا. إذا كان 0 ≥ س ≥ 360° فإن - 10° ≥ 2س - 10° ≥ 710°

(جـ) قا^2 س = 3 ظا^2 س - 1

1 + ظا^2 س = 3 ظا^2 س - 1

2 ظا^2 س = 2

ظا^2 س = 1

ظا س = ± 1

س = 45°، 135°، 225°، 315°

(د) 8 جا^2 س = قتا س

8 جا^2 س = $\frac{1}{\text{جا س}}$

جا^3 س = $\frac{1}{8}$

جا س = $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

إذن س = 30°، 150°

تمرين 3 – د :

أثبت المتطابقات الآتية :

أ $\frac{1+ \text{ظا س}}{\text{قا س}} \equiv \frac{1+ \text{ظتا س}}{\text{قتا س}}$

ب ظاθ + ظتا θ ≡ قا θ قتا θ

ج $\frac{1+ \text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} \equiv \frac{\text{جتا}\theta}{1-\text{جا}\theta}$

د (جا θ + قا θ $)^2$ + جتا^2 θ ≡ (1 + ظاθ $)^2$ + 1

هـ (جاθ + جتاθ) (قا θ+ قتاθ) - 2 = ظا θ + ظتاθ

و ظاθ + ظتا θ+ قاθ + قتاθ ≡ (1 +جاθ)(1 + جتاθ) قا θ قتاθ - 1

ز قتا θ - جا θ ≡ جتاθ ظتاθ

ح (جاθ + قتاθ $)^2$ + (جتاθ + قاθ$)^2$ - (ظاθ + ظتاθ $)^2$ = 5

تمرين 3 – هـ :

1 أوجد قيم س لكل من المعادلات الأتية حيث $0^\circ \leqslant$ س $\leqslant 360^\circ$

أ جاس = قتاس

ب 2جاس جتاس = جاس

ج 2 جتا^{2}س - 3 جتاس + 1 = 0

د 2جتا^2 س - 2جتاس + جا^{2}س=0

هـ قا^2 س - 1 = ظاس

و جاس قاس + 1= 2 ظاس

2 أوجد س في كل من المعادلات الأتية

أ 6 جا^{2}س - 5 جاس + 1 = 0 حيث $0^\circ \leqslant$ س $\leqslant 180^\circ$

ب 3جاس + 3جتاس = $\frac{1}{\text{جتاس} - \text{جاس}}$ حيث $0^\circ \leqslant$ س $\leqslant 360^\circ$

ج 2 ظتا^{2}س - 5 ظتا س + 2 = 0 حيث $0^\circ <$ س $< 360^\circ$

د جتا^{2}س – 3 جا^2 س + 3 =0 حيث $0^\circ \leqslant$ س $\leqslant 360^\circ$

هـ 3 جاس + 2 = قتاس حيث $0^\circ <$ س $< 180^\circ$

و جا^2 (س + 15°) = 0.6 حيث $0^\circ \leqslant$ س $\leqslant 360^\circ$

ز جتا^2 (2س + 10°) = 0.2 حيث $0^\circ \leqslant$ س $\leqslant 360^\circ$

6-3 الأشكال البيانية للدوال المثلثية

الشكل البياني للدالة ص = جاس حيث $0^\circ \leqslant$ س $\leqslant 360^\circ$

بفترات 10° **نكون جدولاً لقيم س ، جاس من** 0° **إلى** 90° **، كما هو موضح فيما يلي ، قيم جاس مقربة إلى رقمين معنويين .**

س	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
جاس	0	0.17	0.34	0.50	0.64	0.77	0.87	0.94	0.98	1.0

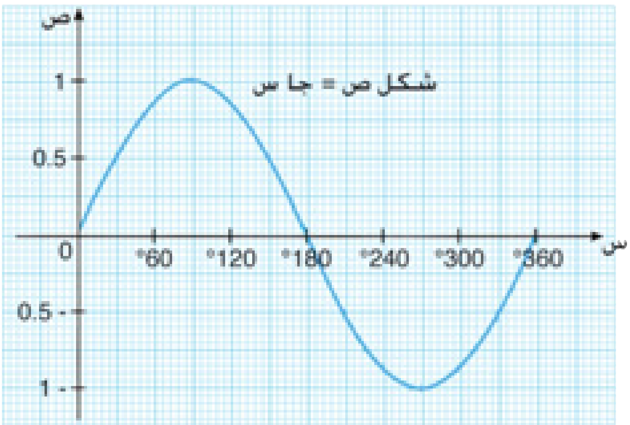
شكل 3 - 25

القيم الأكبر من 90° **لم تسجل مثلاً**

جا 100° = **جا** (180° - 100°)

= جا 80°

وعلى ذلك ، نستطيع أن نوجد جيب أية زاوية مضاعفة لـ 10° **من الجدول حيث** $0^\circ \leqslant$ **س** $\leqslant 90^\circ$ **بأخذ مقياس رسم 1 سم ليمثل** 60° **على المحور الأفقي 1 سم ليمثل 0.5 على المحور الرأسي. الشكل البياني المرسوم للدالة ص = جاس لقيم س من** 0° **إلى** 360° **كما هو مبين في الشكل 3 - 26**

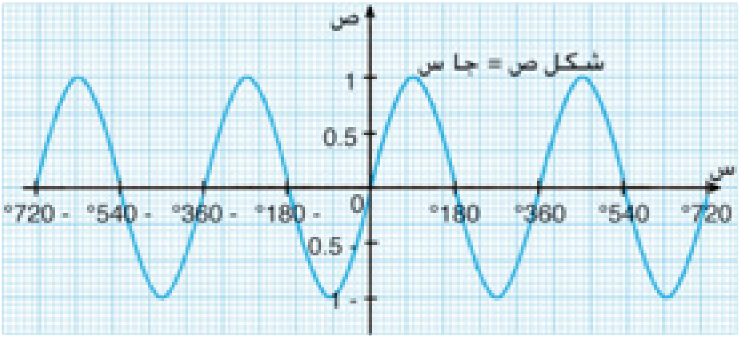


شكل 3 - 26

إذا امتد الشكل البياني على جانبي محور السينات . سوف نحصل على شكل بياني كالمبين في الشكل 3 - 27

من رسم ص = جاس في شكل 3 - 27 نلاحظ أن مدى الدالة ص = جاس من – 1 إلى 1.

لاحظ أن المنحنى يكرر نفسه بعد كل فترة مقدارها 360° **. الشكل البياني يمكن أن يمد أكثر من جانبي محور س . هذا الشكل تطبيقات عملية ويسمى أيضاً منحنى جيبي .**



شكل 3 - 27

الشكل البياني للدالة ص = جتاس حيث 0 ° ≥ س ≥ 360°

يأخد فترات طولها 10° مرة أخرى نكون جدولاً لقيم جتاس من 0° إلى 90° ، للزوايا الأكبر من 90° نستخدم (جتا 180° - ى) . نفرض أننا نريد ايجاد جتا 110° ، فإننا نعلم أن :

جتا 110° = - جتا (180° - 110°) = - جتا 70° وعلى ذلك جدول الزوايا من 0° إلى 90° سوف يعطى مرة أخرى جميع القيم العددية اللازمة للدالة جتا (أنظر شكل 3 - 28)

س	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
جتاس	1	0.98	0.94	0.87	0.77	0.64	0.50	0.34	0.17	0

شكل 3 - 28

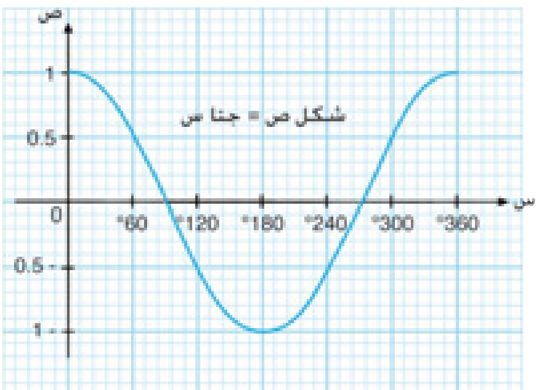
يوضح شكل 3 - 29 الشكل البياني للدالة ص = جتاس على الفترة 0 ° ≥ س ≥ 360° بمد قيم س إلى - 720° ≥ س ≥ 720° نحصل على الشكل البياني الموضح في الشكل 3 - 30

إذا نضرنا للأشكال البيانية للدالة ص = جتا س في الأشكال 3 - 29 . 3 - 30 فأن النقاط الأتية يمكن أن نلاحظها .

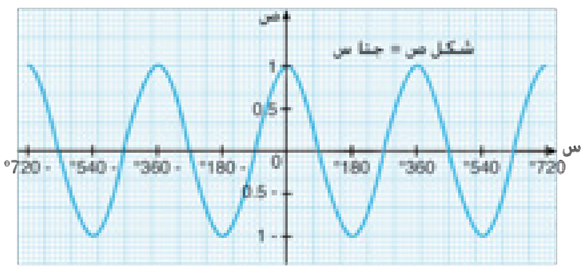
1 - مدى ص = جتا س من - 1 إلى 1

2 - الشكل البياني يكرر نفسه . هذا واضح في شكل 3 - 30

3 - الشكل البياني للدالة ص = جتاس مطابق لـ ص = جاس



شكل 3 - 29



شكل 3 - 30

عند مقارنة الشكلين ص = جاس ، ص = جتاس ، يمكن أن نرى أن لهما نفس المدى والشكل . إذا كان المنحنيات على نفس المحور فأن أحد المنحنيين يمكن رسمه فوق الأخر بنقله 90° على محور س إما جهة اليمين أواليسار .

الدورة

في الشكل ص = جاس . إذا بدأنا عند س = 0° ورسمنا الشكل حتى س = 360° فإننا نمر بجميع قيم الدالة . جاس. ثم نعود إلى جاس = 0 . هذه الفترة من 360° تسمى دورة الدالة . الدالة ص = جتاس لها أيضاً دورة من 360°.

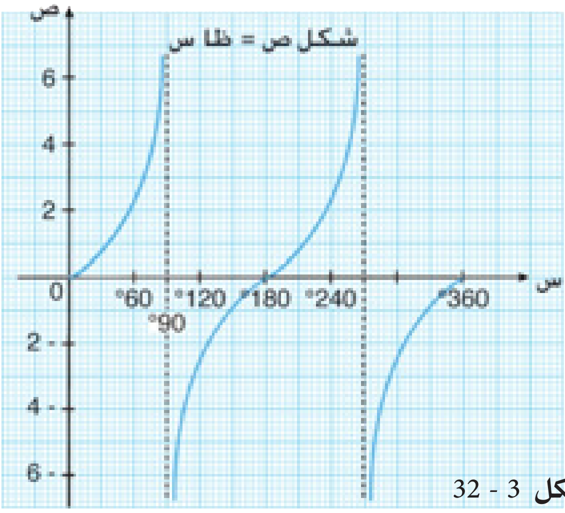
الشكل البياني للمنحنى ص = ظاس

سوف نبدأ بتكوين جدول لقيم كل من س ، ظاس على 0° ≤ س ≤ 180° بفترات من 30° بالنظر إلى الجدول للظلال الطبيعية . يمكن إن نحصل عى معظم القيم المطلوبة لـ ظاس ماعدا ظا 90° . نأخذ قيماً قليلة لـ س قريبة من 90° . للتغلب على هذه الصعوبة . بذلك نحصل على الجدول المبين في الشكل 3 - 31

س	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	150°	180°
ظاس	0	0.58	1.73	2.75	3.72	5.67	5.67-	3.73-	2.75-	1.73-	0.58-	0

شكل 3 - 31

حذفت قيم س بين (80° ، 100°) لان قيم ظلالها كبيرة وليس من الممكن رسم هذه النقط على نفس الشكل البياني للزوايا في الربع الثالث . ظا ى = ظا (ى – 180°) حيث 180° ≤ ى ≤ 270° . وللزوايا في الربع الرابع ظا ى = - ظا (360° - ى) حيث 270° ≤ ى ≤ 360°. إذن الجدول في شكل 3 - 31 كاف لجميع قياسات الزوايا إلى 360°



شكل 3 - 32

لاحظ النقاط الأتية عن الشكل البياني ص = ظاس

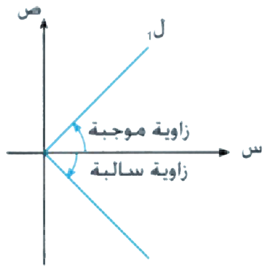
1 – الشكل غير متصل أي يوجد فواصل في الشكل عند س = 90° ، س = 270°

2 - عند النقط قبل س = 90° مباشرة تزداد قيمة ظا س بسرعة ويصبح المنحنى أقرب فأقرب لخط رأسي خلال س = 90° ولكن الشكل لا يمس هذا المستقيم . مثل هذا الخط المستقيم يسمى خطاً تقاربياً . بالمثل عند النقط بعد س = 90° مباشرة يقترب المنحنى من قيم سالبة كبيرة لـ ص . يوجد خط تقاربي آخر س = 270°

3 - ليس من الممكن رسم الشكل البياني ص = ظاس كاملاً بل نستبعد نقط النهاية س = 90° س = 270° الشكل البياني بين هاتين القيمتين يعطي فكرة عن مدى الدالة.

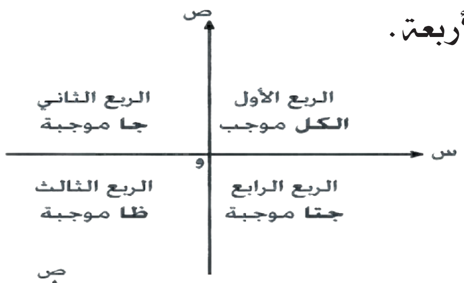
الملخص

(1) الزاوية الموجبة : هي دوران عكس عقارب الساعة من الإتجاه الموجب لمحور س حول نقطة الأصل
الزاوية السالبة : هي دوران مع عقارب الساعة من الإتجاه الموجب لمحور س حول نقطة الأصل



(2) الزاوية الأساسية : هي زاوية حادة بين دوران نصف القطر حول نقطة الأصل ومحور س.

(3) يوضح الشكل إشارات النسب المثلثية في الأرباع الأربعة.

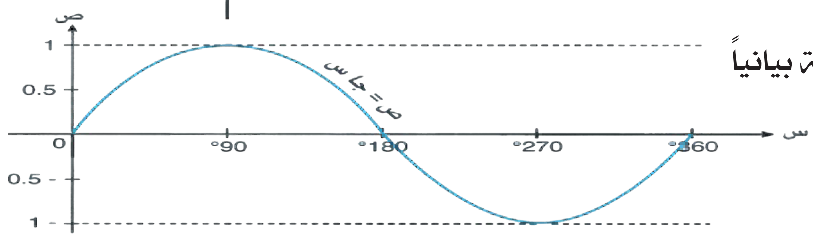


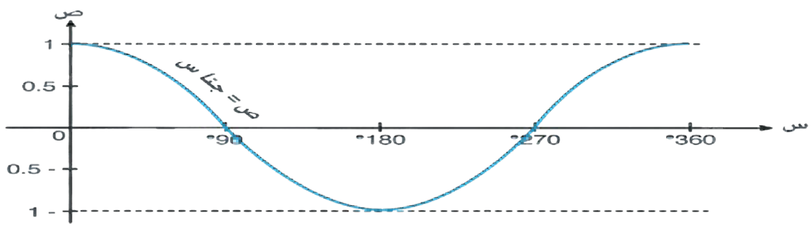
(4) $جا^2\theta + جتا^2\theta = 1$

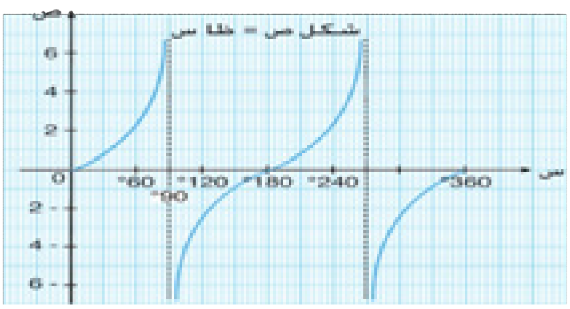
$1 + ظا^2\theta = قا^2\theta$

$1 + ظتا^2\theta = قتا^2\theta$

(5) أشكال الدوال المثلثية بيانياً







تمرين 3 – و.:

1 - إذا كان 2 جا$^2\theta$ – جتا$^2\theta = 1$ فاثبت أن جا$^2\theta = 2$ جتا$^2\theta$.

من ثم أوجد قيم ظا θ الممكنة .

2 - إذا كان 3 قا$^2\theta$ + ظا$^2\theta = 5$ فأوجد القيم الممكنة لكل من

أ ظا θ ب جتا θ جـ جاθ

3 – اوجد بدون استخدام الجداول أو الألة الحاسبة . قيم كل من

أ ظا θ . جتا θ . إذا كان جا$\theta = \frac{15}{17}$، θ زاوية منفرجة.

ب ظتا θ . جاθ إذا كان قا$\theta = \frac{29}{20}$. θ زاوية منعكسة.

4 - أثبت صحة المتطابقات الآتية :

أ قاθ ظا θ + قتا $\theta \equiv$ قا$^2\theta$ قتاθ

ب قتا$^2\theta$ قا$^2\theta$ = قتا$^2\theta$ + قا$^2\theta$

جـ $\dfrac{1 - \text{جتا}^2\theta}{\text{قا}^2\theta - 1} = 1 - \text{جا}^2\theta$

د $\sqrt{\text{قا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta} + \sqrt{\text{قتا}^2\theta - \text{ظتا}^2\theta} \equiv 2$

هـ قاθ – جا$\theta \equiv \dfrac{\text{ظا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta}{\text{قا}\theta + \text{جا}\,\theta}$

و $\dfrac{1 + \text{جا}\theta}{1 - \text{جا}\theta} \equiv (\text{قا}\theta + \text{ظا}\,\theta)^2$

5 – أ أوجد قيمة:

(i) جا $\frac{5}{3}\pi$ (ii) جتا $(-\frac{3}{4}\pi)$

ب إذا كانت س زاوية منفرجة . وأن جاس = 0.91 فأوجد قيمة ظا 5س.

6 – إذا كان د: س ← أ +ب جاس . حيث س بالراديان .

د $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ =1 ، د $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ = 2 فأوجد قيمة كل من أ ، ب .

احسب :

(أ) د $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

(ب) د(ن π)حيث ن عدد صحيح موجب

7 - أوجد جميع قياسات الزوايا بين 0° .360° التي تحقق المعادلات :

(1) جاس = - جا60°

(2) ظا2ص = - 1

8 - أثبت صحة المتطابقة ظا$^2\theta$ – جا$^2\theta$ = ظا$^2\theta$ جا$^2\theta$

9 – أثبت المتطابقة

$$\frac{\text{ظتا أ} - \text{ظا أ}}{\text{ظتا أ} + \text{ظا أ}} = \text{جتا}^2\text{أ} - \text{جا}^2\text{أ}$$

10 - أوجد قياسات الزوايا بين 0°، 360° التي تحقق المعادلات:

أ ظا (ى + 20°) = - 0.8

ب 2 جتا^2 ص +3 جاص =0

جـ ظاع - 2جا ع =0

4

العلاقات والدوال والأشكال البيانية

العلاقات، والدوال، و الأشكال البيانية

Relations Function and Graphs

▬ نود الإشارة هنا بأن موضوع الدالة إحدى المتطلبات الأساسية لفروع الرياضيات المختلفة ، الدالة هي حالة خاصة من العلاقة

في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادراً على أن :

❖ تتعرف على أنواع الدوال وتبدى فهماً لها .

❖ تبحث في إيجاد النطاق والمدي لمجموعة من الدوال .

❖ تتعرف على أشكال بعض الدوال .

❖ تبدى فهماً للمتغير المستقل والمتغير التابع .

❖ تتعرف على الدوال الصريحة (الدوال الجبرية) .

1-4 العلاقة بين مجموعتين

أول عالم أعطى مفهوم رياضي للمجموعة العالم الألماني "كانتور" (1846 - 1918م)

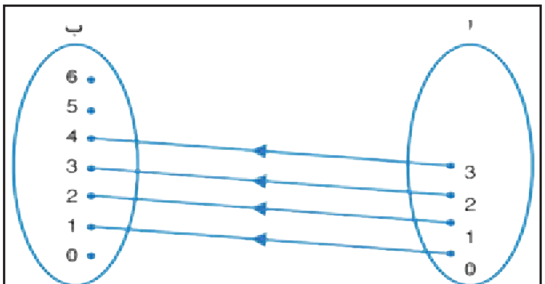
المجموعة ببساطة هي تجمع من الأشياء المعرفة تعريفاً جيداً، نفرض لدينا مجموعة

أ = {0 ، 1 ،2 ، 3} المجموعة ب = {0 ، 1 ،2 ، 3 ، 4 ،5 ، 6}

هيا ندرس العلاقة « أقل بواحد » من أ إلى ب

إحدى الطرق لتوضيح العلاقة هو رسم مخطط سهمي كما موضح في شكل 4 - 1 الأسهم في شكل 4 - 1

تربط عناصر المجموعة أ بعناصر المجموعة ب



شكل 4 - 1

لاحظ أن العلاقة لها معنى أي اتجاه ترسل فيه كما هو موضح بالأسهم في الشكل 4 - 1 العلاقة من المجموعة أ إلى المجموعة ب هي ربط عناصر من أ بعناصر من ب . شكل 4 - 1 يوضح علاقة تناظر احادي

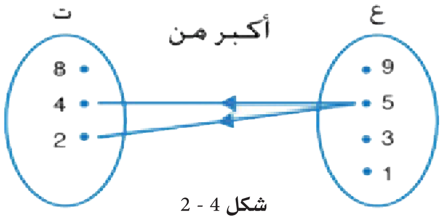
. أنواع أخرى من العلاقات مثل علاقة تناظر عنصر بأكثر أوتناظر أكثر من عنصر وعلاقة أكثر بأكثر .

تمرين 4 – أ:

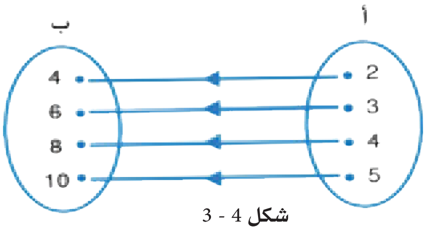
1 مجموعتان من الأعداد ع .ت موضحتان في الشكل 4 - 2 انقل وأكمل المخطط السهمي لتوضيح العلاقة « أكبر من » من المجموعة ع إلى المجموعة ت .

2 باستخدام نفس المجموعتين ت . ع في السؤال (1) ارسم المخطط السهمي يوضح العلاقة « أصغر من » من المجموعة ع إلى المجموعة ت .

3 ما العلاقة من المجموعة أ إلى المجموعة ب الموضحة في شكل 4 - 3.

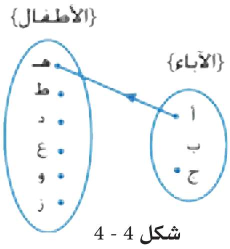


شكل 4 - 2



شكل 4 - 3

4 أ والد هـ ، ب والد كل من ط ، د ، ع ، ج والد كل من و ، ز



شكل 4 - 4

انقل شكل 4 - 4 ثم أكمل المخطط السهمي لتوضيح العلاقة « والد »من الأباء إلىمجموعة الأطفال .

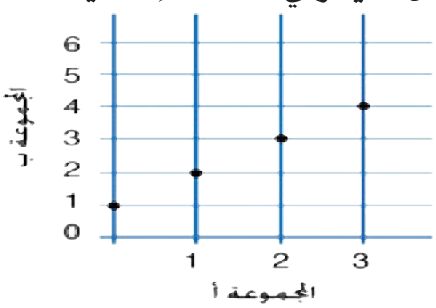
5 باستحدام نفس المجموعتين في السؤال (4) ارسم المخطط لتوضيح العلاقة « ابن أو ابنه .... » من مجموعة الأطفال إلى مجموعة الأباء .

6 انشئ مخططاً سهمياً لتوضيح علاقة « عامل لـ » من المجموعة أ ={ 2 ، 5 ،7 ، 13 } إلى المجموعة ب = {1 ، 4 ،15 ، 35 ، 40} .

4-2 العلاقة كمجموعة من الأزواج المرتبة

في الجزء 4 - 1 كان لدينا المجموعة أ = {0 ، 1 ، 2 ، 3} والمجموعة ب = { 0 ، 1، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ،6} مرتبطتان بالعلاقة « أقل بواحد » من أ إلى ب مثلاً 2 أقل بواحد من 3 يوجد سهم مرسل من 2 إلى 3 . العلاقة يمكن أيضاً أن توضح باختصار بالزوج المرتب (2 ،3) . العنصران في الزوج مرتبان حيث العنصر الأول ينتج من المجموعة أ والعنصر الثاني ينتج من المجموعة الثانية ب .

إذا كان س ∋ أ ، ص ∋ ب . فإن جميع الأزواج المرتبة (س ،ص) هي { (0 ،1) ، (1،2) ، (2 ، 3) ، (3 .4)} هذه المجموعة من الأزواج المرتبة تعرف العلاقة « أقل بواحد من »من المجوعة أ إلى المجوعة ب شكل 4 - 3 الشكل الديكارتي للعلاقة . إحداثيات النقط هي عناصر الأزواج المرتبة في العلاقة .



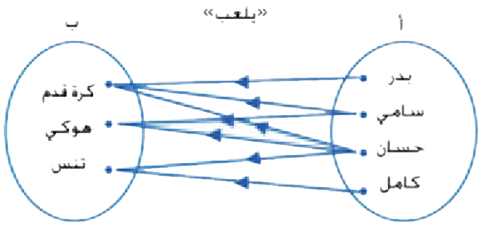
شكل 4 - 5

تمرين 4 – ب:

1 يوضح شكل 4 - 6 العلاقة « يلعب » للمجموعتين الموضحتين .

أ عبرعن العلاقة كمجموعة من الأزواج المرتبة . (استخدم الحروف الأولى المناسبة .)

ب ارسم الشكل الديكارتي للعلاقة



شكل 4 - 6

2 أ = { 1 ، 2 ،3 ، 4 ، 5 ، 6 } ، ب = { 2 ، 3 ،5 }

أ وضح العلاقة « مضاعف» من أ إلى ب بمخطط سهمي .

ب اكتب العلاقة كمجموعة من الأزواج المرتبة .

3 العلاقة بين مجموعتين معرفة بمجموعة ازواج مرتبة {(- 1 ، 2) ، (1،4) ،(3 ،6) ، (8،5)، (7 ،10)} اسرد عناصر المجموعتين وصف بكلمات العلاقة الممكنة بين المجموعة الأولى والمجموعة الثانية .

4 س = { 2 ، 4 ،6 ، 8 } ص = { 1 ،2 ، 3، 4 ،5 }

أ إذا كانت ل ∋ س ، ع ∋ ص . اسرد مجموعة الأزواج المرتبة في العلاقة « ل ضعف ع»

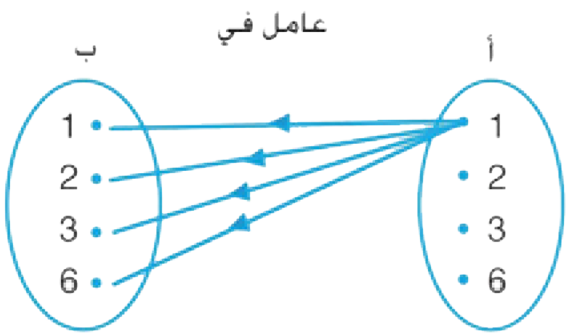
ب وضح العلاقة باستخدام شكل ديكارتي

5 إذا كان أ = ب = { 1 ، 2 ،3 ، 6 }

أ انقل واكمل شكل 4 - 7 للعلاقة « عامل لـ :» من المجموعة أ إلى المجموعة ب .

ب عبر عن العلاقة كمجموعة من الأزواج المرتبة .

جـ وضح العلاقة بشكل ديكارتي



شكل 4 - 7

ملحوظة:
عندما تتساوي مجموعتان أ ، ب نشير للعلاقة المتصلة أ ، ب كعلاقة على أ

6) اسرد مجموعة الأزواج المرتبة التي تصف العلاقة « أقل من» على المجموعة أ ={ 1 ، 2 ،3 ، 4 ، 5 } ثم ارسم الشكل الديكارتي للعلاقة .

7)علاقة ر معرفة بالمجموعة { ($\frac{1}{2}$، 8) ، (1،4) ،(2، 2)، (4، 1) ، (8 ، $\frac{1}{2}$)}

أ) اسرد مجموعة العناصر الأولى للأزواج مجموعة العناصر الثانية للازواج . صف بكلمات علاقة ممكنة بين المجموعة الأولى والمجموعة الثانية .

ب) ارسم الشكل الديكارتي للعلاقة ثم ارسم منحنى خفيف يمر بالنقط .

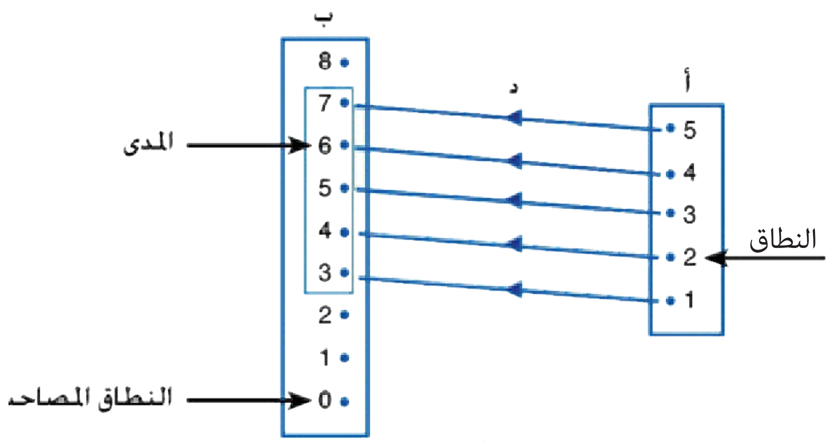
4 - 3 الدالة والراسم

يمكن أن توجد علاقة خاصة بين مجموعتين أ،ب إذا ارتبط كل عنصر من أ بعنصر واحد وواحد فقط من عناصر ب . رغم أن بعضاً من عناصر ب ربما لا يرتبط بأي عنصر من عناصر أ. تعرف هذه العلاقة بالدالة . تعرف أيضاً الدالة بالراسم (التطبيق) . الراسم طريقة رسم أكثر ضرورة لفهم الدالة .

افرض العلاقة « أقل بأثنين من » من المجموعة أ إلى المجموعة ب كما هو موضح في المخطط السهمي في شكل 4 - 8

هذه العلاقة ايضاً دالة أو راسم حيث كل عنصر من المجوعة أ يتصل بعنصر واحد وواحد فقط بعنصر من المجموعة ب رمزياً نكتب د : س ⟵ س + 2 والذ ي يعني أن «الدالة د ترسم من س إلى س + 2» في الرمز الدّالي نكتب د(س) : د(س) = س + 2 تقراء «دالة س» .

مجمموعة العناصر في أ للراسم تعرف « بالنطاق» بينما تعرف مجموعة العناصر في ب « بالنطاق المصاحب »، المجموعة الحقيقية للصور (مثل د (أ))تسمى « المدى » والمدى هو مجموعة جزئية من النطاق المصاحب بالرجوع إلى شكل 4 - 8 مرة اخرى العنصر 3 في النطاق



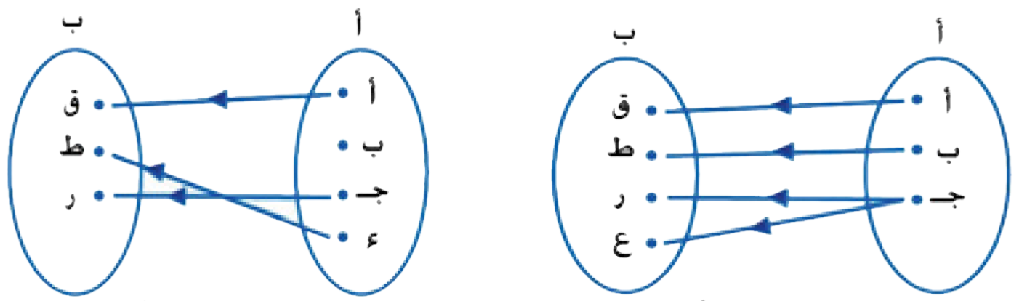
شكل 4 - 8

رسم إلى العنصر 5 في المدى . يعرف العنصر 5 بانه « صورة » العنصر 3 تحت الراسم د. في الرمز الدالي إذا كان :

د(س) =س + 2 ، س = 3

د(3) = 3 + 2 = 5

من المهم أن تعرف أن الدالة دائماً علاقة . لكن العلاقة يمكن أن تكون أولا تكون دالة . بعبارة أخرى الدالة حالة خاصة من العلاقة . الشكل 4 - 9 يوضح علاقتين ليستا بدالتين .



ليست دالة لأن
جـ له صورتان
(1)

ليست دالة لأن
ب ليس لها صورة
(2)

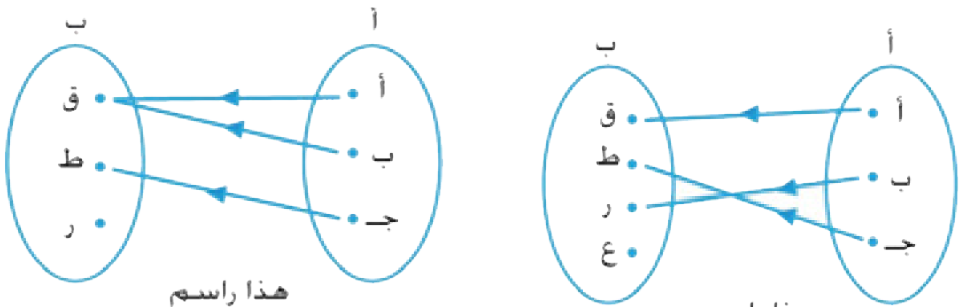
شكل 4 - 9

يوضح شكل 4 - 10 مثالين من الدوال أو الرواسم .

يوضح شكل 4 - 10(1) علاقة « واحد – واحد » بينما 4 - 10 (2) يوضح علاقة من « كثير إلى – واحد » هذه العلاقات دوال .

النوعان الأخران من العلاقات يشيران إلى علاقات « واحد – لكثير » « كثير – لكثير »ليستا دالتين

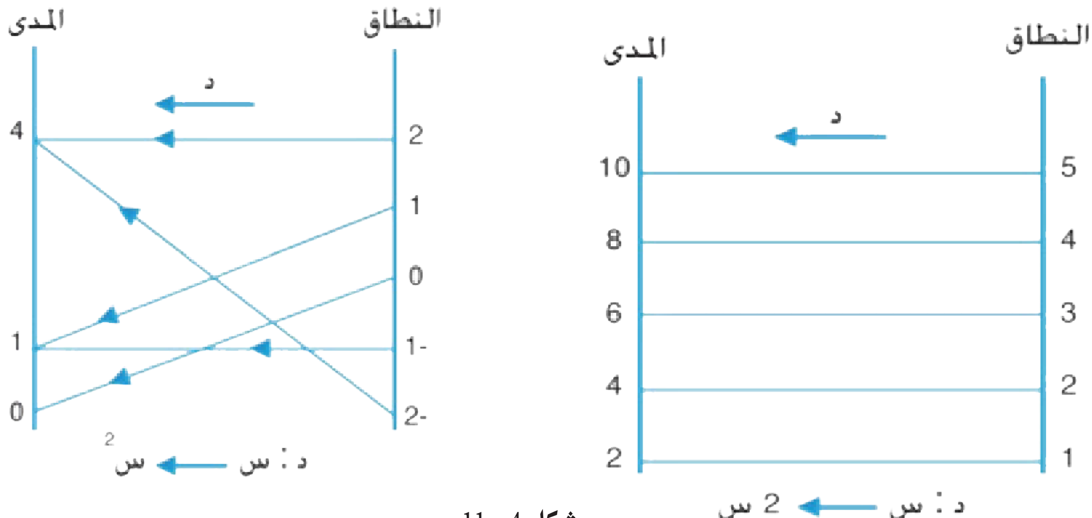
العلاقات بين الأعداد يمكن أيضاً أن توضح بمخطط سهمي له خطان متوازيان كما في شكل 4 - 11



هذا راسم
رغم أن ع في ب
(1)

هذا راسم
رغم أن أ. ب في أ
ارتبطا بالعنصر ق
(2)

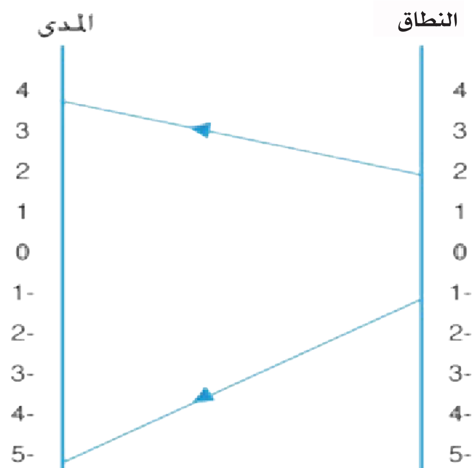
شكل 4 - 10



شكل 4 - 11

مثال 1

المخطط السهمي في شكل 4 - 12 يمثل جزئاً من الشكل البياني لمستقيم أو دالة خطية د(س) . عين هذه الدالة . ثم أوجد د (- 2)



شكل 4 - 12

افرض أن الدالة الخطية هي د(س) = أس + ب .من المخطط السهمي نجد أنه عندما

س = 2 ، د(س) = 4

⟸ 4 = 2 أ+ ب ....(1)

عندما س = - 1 ، د(س) =- 5

- 5 = - أ + ب ....(2)

بطرح (2) من (1) 9 = 3 أ

⟸ أ =3

من 2 ب =- 2

إذن الدالة د(س) = 3 س - 2

د (- 2) = 3 (- 2) - 2

⟸ = - 8

تمرين 4 – ج:

1 إذا كانت ر عملية الضَّعف ع = {1. 3. 5. 7} فاسرد عناصر ع المجموعة التي رسمت إليها ع تحت الراسم ر.

2 عملية د ترسم أي عدد س إلى العدد 2 س + 1. أوجد صورة كل من قيم س الأتية تحت الراسم د:

أ 1 ب 2 جـ 0 د - 1

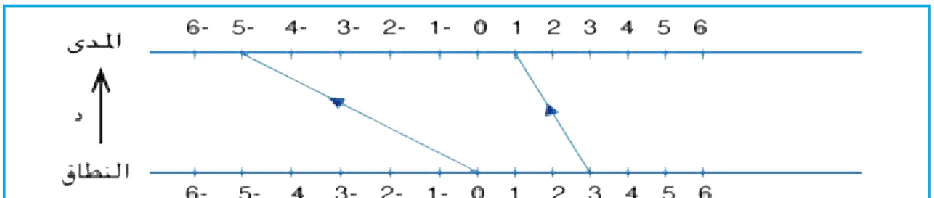
3 إذا كان د: س ⟵ 2س + 3. فأوجد :

أ د(0) ب د(1) جـ د(- 2) د د ($\frac{1}{2}$)

4 إذا كان د: س ⟵ 3(س – 1) فأوجد :

أ د(1) ب د(3) جـ د(- 1) د د($\frac{1}{2}$)

5 المخطط السهمي في الشكل 4 - 13 يمثل جزءاً من الشكل البياني للدالة الخطية د(س) . حدد هذه الدالة . ثم أوجد د(1) ، د(- 4)



شكل 4 - 13

6 ماصورة الأتي تحت الراسم س ⟵ س^2 - 1؟

أ 1 ب 3 جـ - 2 د - 1

7 إذا كان د: س ⟵ جاس ْ فأوجد :

أ د(30) ب د(45) جـ د(90) د د(50)

8 إذا كان د: س ⟵ جتا2س ْ . فأوجد :

أ د(30) ب د(0) جـ د(45) د د(10)

9 للدالة د(س) = س2 - 3س + 5 فأوجد :

أ د(0) ب د(1) جـ د(2) د د(- 2)

10 إذا كان د: س ⟵ س^3 - 4س^2 + 2س+ 8 . فأوجد صورة كل مما يأتي تحت الراسم د:

أ 0 ب 1 جـ - 1 د 2

4 - 3 - 1 المتغير المستقل والمتغير التابع

Independent and depende nt variable

المتغير الذي مجموعته الشاملة هي نطاق دالة ما يسمى بالمتغير المستقل والمتغير الذي مجموعته الشاملة هي مدى الدالة يسمى بالمتغير التابع فالدالة التي على صورة : ص= د(س) فالمتغير س هنا هو المتغيرالمستقل وأن المتغير ص هي المتغير التابع ولعل الحكمة في هذا أن تعريفنا للدالة بأن المتغير س هو الأصل ، وأما ص المتغير التابع لقيم س بمعنى أن قيم ص تتوقف على قيم س بطريقة تحددها طبيعة الدالة د.

4 - 4 الدالة الصريحة

يقال عن الدالة د بأنها صريحة إذا كان معطاة بالمعادلة

ص= د(س) مثل ص = $3 س^2 - 5س + 11$

أي أن المتغير التابع في أحدى طرفي المعادلة التي تعرف دالة والطرف الآخر لا يحتوي الإ على المتغير المستقل .

وقد تكون الدالة الصريحة على صورة س = د(ص) .

تعريف : يقال للدالة أنها دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة منها ومن تلك الدوال .

4 - 5 الدالة كثيرة الحدود

ليكن د: ح ⟵ ح دالة معرفة بالقاعدة

$د(س) = أ_ن س^ن + أ_{ن-1} س^{ن-1} + ... + أ_2 س^2 + أ_1 س + أ_0$ ، $أ_ن \neq 0$ ،

$أ_ن$ ، $أ_{ن-1}$ ، .... $أ_2$ ، $أ_1$ ، $أ_0$ أعداد حقيقية تسمى الدالة د دالة كثيرة الحدود من الدرجة ن (جميع الأسس صحيحة غير سالبة) وتسمى الأعداد $أ_ن$ ، $أ_{ن-1}$ ، .... $أ_2$ ، $أ_1$ ، $أ_0$ معاملاته

ويسمى معامل اكبر قوى المعامل الرئيسي

مثلاً :-

1 . د(س) = $5س^4 - 2س^3 + 12$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة ، ∀س ∈ ح .

2. د(س) = $س^2 + 3س - 7$ دالة كثيرة الحدود من الدرجةالثانية نطاقها ∀س ∈ ح

ملاحظات :

1 . في حالة ن = 3 تكون الصورة العامة للدالة كثيرة الحدود

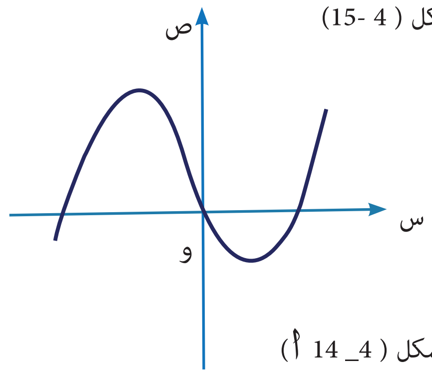
$$ص = أ_3 س^3 + أ_2 س^2 + أ_1 س + أ_0 ، أ_3 \neq 0 ، س \in ح$$

دالة من الدرجة الثالثة (دالة تكعيبية)

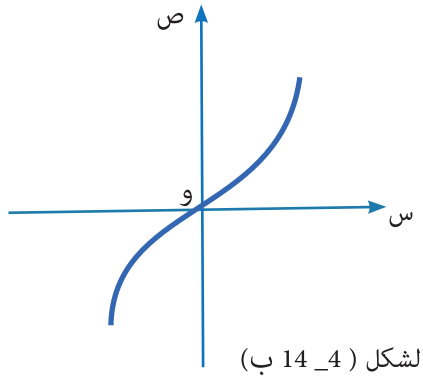
مثلاً ص = $س^3 - 2س$ نطاقها ح ،مداها ح ، ص = $س^3$، ∀س ∈ ح، ∀ص ∈ ح

بيانها على الترتيب كما هو بالشكلين (4 - 14أ) ، (4 - 14ب)

بالشكل (4 -15)



بالشكل (4_ 14 ب)



بالشكل (4_ 14 أ)

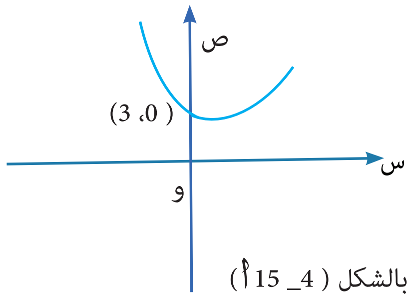
2 –**في حالة** $ن = 2$ **تكون الصورة العامة للدالة كثيرة الحدود**

ص $= أ_2 س^2 + أ_1 س + أ_0 ، أ_2 \neq 0$

دالة من الدرجة الثانية (الدالة تربيعية)

مثلاً : ص $= س^2 - 2س + 3$ بيانها كما هو بالشكل

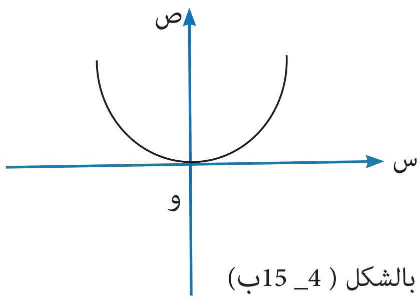
(4 - 15 أ) نطاقها ح ومداها $[2 ، \infty)$



بالشكل (4_ 15أ)

ص $= س^2$ **بيانها كما هو بالشكل** (4 - 15 ب)

نطاقها ح ومداها $[0 ، \infty)$



بالشكل (4_ 15ب)

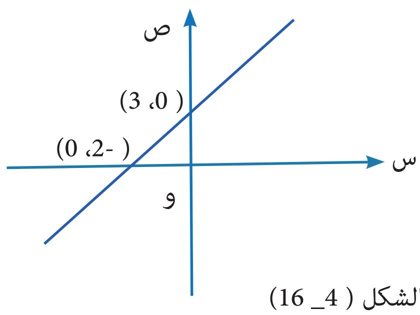
3 - **في حالة** $ن = 1$ نحصل على دالة خطية من الدرجة الأولى وتعرف كما يلي :

د : ح ← ح **حيث د** (س) **= ص =** $أ_1 س + أ_0 ، أ_1 \neq 0$

فمثلاً : ص = $\frac{3}{2}$ س + 3

بيانها كما هو بالشكل (4 - 16)

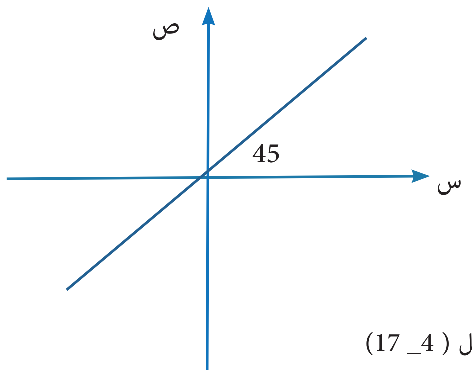
نطاقها ∀ س ∈ ح ومداها ∀ ص ∈ ح



بالشكل (4_ 16)

حالات خاصة

أ) ص = س يسمى دالة محايدة (قيم س هي نفسها قيم ص) نطاقها ح ومداها ح وتمثل مستقيم يمر بنقطة الأصل ويميل على محور السينات بزاوية 45° في الإتجاه الموجب لمحور السينات

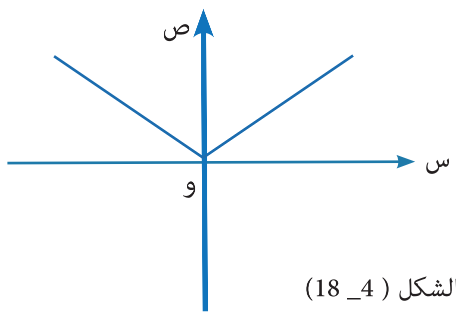


بالشكل (4_ 17)

ب) ص = | س | تسمى دالة القيمة المطلقة وتكتب على النحو التالي :

$$|س| = \begin{cases} س & س \geq 0 \\ -س & س < 0 \end{cases} \quad ، \quad \sqrt{س^2} = |س|$$

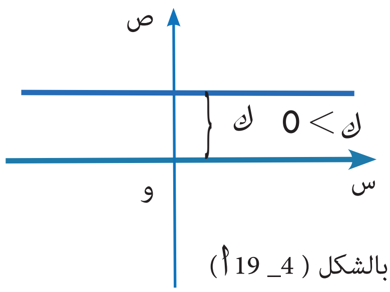
مجال الدالة . مجموعة الأعداد الحقيقية ومداها [0 ، ∞)



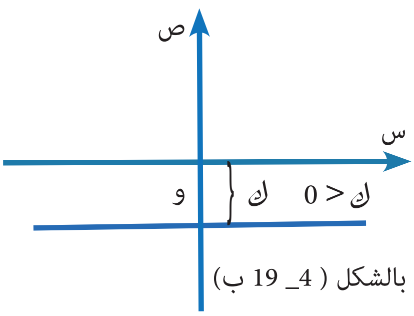
بالشكل (4_ 18)

4 - **في حالة** ~~ن~~ = 0 نحصل على دالة ثابتة وتعرف كما يلي :

د : ح ← ح حيث د (س) = ك، ك ∈ ح وتمثل بيانياً بخط مستقيم // **محور السينات ويمر بالنقطة** (0، ك) كما هو بالشكل



بالشكل (4_ 19أ)



بالشكل (4_ 19 ب)

4 - 6 الدالة الكسرية

هي الدالة التي يمكن كتابتها والتعبير عنها

د(س) = $\frac{ن(س)}{ع(س)}$ فإن د معرفة بشرط أن المقام ع (س) ≠ 0 مجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ماعدا التي تجعل المقام يساوي صفر، مداها حسب التعويض في المعادلة

فمثلاً : ص = $\frac{س}{س - 3}$ ، س $\neq$ 3

، ص= $\frac{1}{س}$ ، س $\neq$ 0

4 - 7 الدالة الجدرية

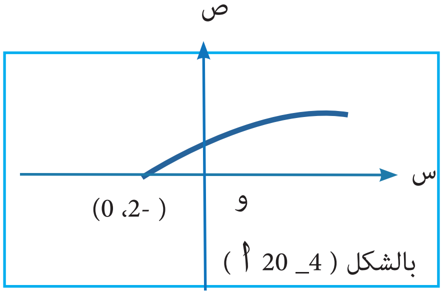
هي الدالة التي يمكن كتابتها والتعبير عنها

ص = $\sqrt{د(س)}$ مجال الدالة مجموعة الأعداد الحقيقية التي تجعل مابداخل الجدر أكبر من أو يساوي صفر بمعنى :

د (س) $\geqslant$ 0

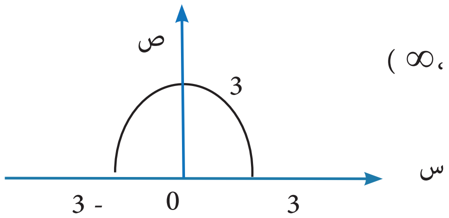
مثلاً : ص = $\sqrt{س + 2}$ ، س + 2 $\geqslant$ 0

س $\geqslant$ - 2 $\Leftarrow$ نطاقها [- 2 ، ∞) مداها [0 ، ∞)



بالشكل (4_ 20 أ)

، ص = $\sqrt{9 - س^2}$ نطاقها [- 3 ، 3] مداها [0 ،∞)



بالشكل (4_ 20 ب)

مثال 2:

عين نطاق (مجال) الدالة ص = $\sqrt{س - 5}$

الحل :

س – 5 $\geqslant$ 0 $\Leftarrow$ س $\geqslant$5

فيكون نطاق د هو [5، ∞)

مثال 3:

عين نطاق الدالة س = $\frac{س + 3}{س - 2}$

الحل :

بالنسبة للدالة مجالها ح ، المقام $\neq$ 0

س – 2 $\neq$ 0 $\therefore$ س $\neq$ 2 فيكون نطاق الدالة

$\forall$ س $\in$ ح - { 2 }

مثال 4:

عين نطاق الدالة ص = $\frac{س}{\sqrt{س - 3}}$

الحل :

الدالة معرّفة بشرط أن س – 3 >0 $\Leftarrow$

س > 3 فيكون مجال الدالة $\forall$ س $\in$ (3،∞)

تمرين 4 – ب:

عين نطاق ومدى مما يأتي :

أ د(س)= 8

ب ص = $\sqrt{س + 2}$

جـ ص= $\frac{5س}{1 - 2 س}$

د ص= | س - 4|

هـ ص= $\sqrt{4 - س^2}$

و ص= $\sqrt{س^2 - 4}$

4 - 8 جبر الدوال

فيما سبق درست العمليات الجبرية المعرفة بالجمع والطرح والضرب والقسمة على الأعداد ، فالعمليات الجبرية المذكورة تطبق أيضاً على الدوال تماماً .

لتكن د1 ، د2 دالتين ، فإن الدوال

$د_1 \pm د_2$ ، $د_1 . د_2$ ، $\frac{د_1}{د_2}$ ، $\frac{د_2}{د_1}$ هي مجموعة الأزواج (س، ص) بحيث يمثل س العناصر المشتركة التي تنتمي إلى نطاق كل من الدالتين أي ؛ س $\in$ نط د1 $\cap$ نط د2

والعنصر ص يمثل العمليات الأربع السالفة الذكر ،

العمليات الجبرية للدوال تعرف بما يلي :

$د_1 \pm د_2 = \{ (س،ص)$ س $\in$ نط $د_1 \cap$ نط $د_2$، ص $= د_1(س) \pm د_2(س) \}$

$د_1 . د_2 = \{ (س،ص)$ س $\in$ نط $د_1 \cap$ نط $د_2$، ص $= د_1(س) . د_2(س) \}$

$د_1 \div د_2 = \{ (س،ص)$ س $\in$ نط $د_1 \cap$ نط $د_2$، ص $= \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ ، $د_2(س) \neq 0 \}$

ملحوظة:

إن $د_2 \neq 0$ تعني أن $\frac{د_1}{د_2}$ تكون معّرفة فقط بحدف أي عنصر س $\in$ نط $د_2$ ويجعل $د_2(س) = 0$

مثال 1:

إذا كانت $د_1(س) = س^2 + 1$، $د_2(س) = س - 2$ ن الدوال الآتية :

أ) $د_1 + د_2$ ، ب) $2د_1 - 3د_2$ جـ) $د_1.د_2$ ء) $\frac{د_1}{د_2}$ ، $\frac{د_2}{د_1}$

$\because$ نط $د_1$ = ح ، نط $د_2$ = ح $\therefore$ نط $د_1 \cap$ نط $د_2$ = ح

أ) $(د_1 + د_2)$ (س) = $د_1$(س) + $د_2$(س)

= $س^2 + 1 +$ س $- 2$

= $س^2 +$ س $- 1$

ب) $2 د_1 - 3 د_2 = 2($س$^2 + 1) - 3($س $- 2)$

$= 2$س$^2 - 3$س $+ 8$

(جـ) $د_1 . د_2$: ح $\longrightarrow$ ح حيث

$(د_1 . د_2)$ (س) = $($س$^2 + 1)$ (س $- 2)$

د) $\frac{د_2}{د_1}$ (س) = $\frac{س - 2}{س^2 + 1}$ ، س $\in$ ح

❖ **تذكر في حالة نط $د_1 \cap$ نط $د_2$ = $\varnothing$ فإن الدوال الجبرية تكوت غير معرفة**

تمرين 4 – هـ :

1 إذا كانت $د_1(س) = \frac{1}{س}$ ، $د_2(س) = \frac{1}{س + 1}$ دالتين حقيقيتين فأوجد كلا من الدوال الأتية :

أ $د_1 - د_2$ ب $د_1 . د_2$ جـ $\frac{د_1}{د_2}$ د $\frac{د_2}{د_1}$

2 إذا كانت $د_1(س) \frac{س}{س^2 - 1}$ ، $د_2(س) = \sqrt{2س - 1}$

دالتين حقيقيتين

أ **اوجد كلاً من الدالتين** $\frac{د_1}{د_2}$ ، $\frac{د_2}{د_1}$

ب **احسب العنصر 3 بواسطة كل منها**

5 النهايات والإتصال

1 قيم غير معينة

2 النهاية

3 حساب النهاية بطرق مختلفة

4 النهايات من الجهتين اليمنى واليسرى

5 نهاية دالة عند اللا نهاية

6 مفهوم اتصال دالة عند نقطة

النهايات

Limits

نشأ علم التفاضل والتكامل لوصف الكيفية التي تتغير فيها الأشياء ، ويعتمد كل من التفاضل والتكامل بصورة أساسية على مفهوم النهايات ، مفهوم النهاية يعتبر حجر الأساس الذي تبني وتتطور عليه موضوعات التفاضل والتكامل.

في نهاية الفصل سوف تكون قادراً على أن :

- ❖ تبدى فاهماً لنهاية الدالة عند نقطة .
- ❖ تستعمل الرموز للتعبير عن النهاية .
- ❖ إيجاد قيمة النهاية .
- ❖ تبدى فاهماً للمتغير المستقل والمتغير التابع .
- ❖ تستعمل الرموز للتعبير عن النهاية
- ❖ ايجاد قيمة النهاية بتطبيق نظريات النهايات
- ❖ ايجاد قيمة النهاية بالتحليل
- ❖ ايجاد النهاية في مالا نهاية لدوال نسبية
- ❖ تظهر فهما للنهاية من اليمين لليسار
- ❖ تبحث في اتصال الدوال عند نقطة

5 - 1 قيم غير معينة

$\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ $\qquad$ $\dfrac{\infty}{\infty}$

نعرف أن خواص الأعداد الحقيقية لا تسمح بالقسمة على الصفر .

واذن لا نستطيع اختصار الكسر $\dfrac{س}{س}$ في حالة ما إذا كانت س تساوي صفراً لأن الأختصار ماهو الا عملية قسمة . وحيثما تجرى عملية اختصار مثل هذا الكسر فلا بد أن نتدارك هذه الحالة فنقول:

$\dfrac{س}{س} = 1$ بشرط أن $س \neq 0$

وبالمثل $\dfrac{س - 2}{س - 2} = 1$ بشرط أن $س \neq 2$

، $\dfrac{1 - س^2}{1 - س} = \dfrac{(1 - س)(1 + س)}{1 - س}$

$= 1 + س$ بشرط أن $س \neq 1$

فالكسر $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ليس عدداً حقيقياً (أو أي عدد آخر) ولذا نقول أنه غير معرف

أي لا نعرف ما يناظره من بين الأعداد الحقيقية ، ولا نسطيع أعطاءه أي معنى .

كذلك الكسر $\frac{\infty}{\infty}$ هو أيضاً غير معرف Undefined لأن ∞ ليست عدداً حقيقاً حقيقياً كما ذكرنا من قبل . واذن لا نستطيع القسمة عليه ، ومن باب اولى لا نجد عدداً حقيقاً يناظر هذا الكسر .

وهناك صور اخرى غير معرفة سوف لا نهتم بها في هذا الكتاب.

5 - 2 معنى النهاية

في هذا الفصل نتناول مشكلة من أهم المشكلات التي نلقاها في كثير من الأبحاث النظرية والتطبيقات العلمية ، فضلاً عن أنها مقدمة لا غنى عنها لدراسة الموضوع الرئيسي في هذا الكتاب وهو موضوع للتفاضل والتكامل ، وهذه المشكلة نقدمها عن طريق المثال الآتي :

مثال 1:

اعتبر الدالة د = { (س،ص) : ص = $\frac{2س^2 - س - 6}{س - 2}$ }

والتي تحدد بالمعادلة ص = د (س) = $\frac{2س^2 - س - 6}{س - 2}$

نلاحظ أننا نستطيع أن نوجد قيمة د(س) عند أي قيمة (حقيقية) للمتغير س ما عدا القيمة س = 2 ، إذ أن التعويض بالعدد 2 في د (س) يعطينا د(2) = $\frac{صفر}{صفر}$ وهذا ليس عدداً حقيقياً – كما ذكرنا في بند 5 - 1 وعلى هذا فإن نطاق الدالة د هو فئة الأعداد الحقيقية باستثناء العدد 2 .

والمشكلة التي نبحثها في هذا الفصل هي : إذا كان من المستحيل ايجاد قيمة د (س) عندما س= 2 فما هي أقرب قيمة تأخذها د(س) عندما تكون س اقرب مايمكن من العدد 2 ؟ أو ماهي القيمة التي تقترب منها د(س) عندما يكون الفرق بين س و العدد 2 فرقاً صغيرا جداً يقترب من الصفر ؟

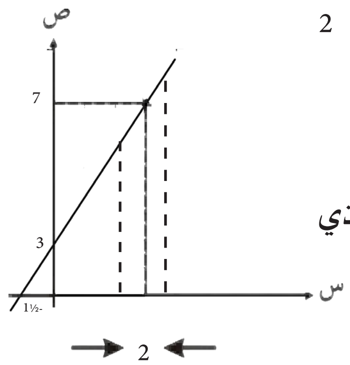
وفي بحث هذه المشكلة بالنسبة لهذا المثال ، نلاحظ ان :

$$د (س) = \frac{2س^2 - س - 6}{س - 2} = \frac{(س - 2)(2س + 3)}{س - 2}$$

$$= 2س + 3 \quad ، \quad بشرط\ س \neq 2$$

ومعنى هذا أنه إذا كانت لدينا دالة اخرى ف = {(س ،ص) : ص = 2 س + 3 } ، فان الدالتين د ، ف تشتركان في جميع الأزواج المرتبة فيما عدا الزوج (2،7) الذي ينتمي إلى الدالة ف ولا ينتمي إلى الدالة د .

كما أن هذا يعني من الناحية الهندسية أن الشكل البياني للدالة د هو نفس الشكل البياني للدالة ف محدوفاً منه نقطة واحدة أي أن الشكل البياني للدالة د هو المستقيم ص = 2 س + 3 منقوصاً منه النقطة (2،7)



شكل 5 - 1

وهذه الملحوظة توحي بأننا لو أخترنا س قريباً جداً من العدد 2 فان د(س) تقترب جداً من العدد 7.

ولكي نختبر هذا الإيحاء أو هذا التخمين نحسب بعض قيم د(س) = $\frac{2\text{س}^2 - \text{س} - 6}{\text{س} - 2}$ بالقرب

من القيمة س = 2 كما هو مبين بالجدولين (5 - أ) (5 - ب) ، حيث حسبنا قيم د(س) المناظرة لبعض قيم س التي تقترب شيئاً فشيئاً من العدد 2 . سواء كان الإقتراب من يمين اويسار العدد 2 .

س	د (س)
3	9
2.5	8
2.1	7.2
2.01	7.02
2.001	7.002
2.0001	7.0002
2.00001	7.00002
↓	↓
2	7

جدول 5 - أ

س	د (س)
1	5
1.5	6
1.9	6.8
1.99	6.98
1.999	6.998
1.9999	6.9998
1.99999	6.99998
↓	↓
2	7

جدول 5 - ب

س تقترب من 2 من اليمين

$3 \leftarrow 2$

جدول (5 – أ)

س تقترب من 2 من اليسار

$2 \rightarrow 1$

جدول (5 – ب)

من الجدولين (5 - أ) ، (5 - ب) نرى أن د (س) تقترب كما توقعنا من العدد 7 كلما اقتربت س من العدد 2 . وهذا يتضح كذلك هندسياً ، إذ نرى من الشكل (5 – 1) أنه كلما اقترب الإحداثي السيني س من القيمة 2 كلما اقترب الإحداثي الصادي د (س) من القيمة 7 سواء أكان هذا الإقتراب من اليمين أو من اليسار .

وبهذا نكون قد وصلنا – بطريقة تجريبية – إلى حل لمشكلتنا . فالعدد 7 هو أقرب قيمة تأخذها د (س) عندما تكون س أقرب مايمكن من العدد 2 .

والعدد 7 الذي توصلنا إليه يسمى حينئذ بنهاية د(س) عندما تقترب س من العدد 2 . ونعبر عن هذا رمزياً كالأتي

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow 2} \text{د(س)} = 7$$

مثال 2:

فإذا اعتبرنا الدالة د (س) معرفة بالمعادلة :

$$د(س) = 4\ س - 5\ \text{حيث}\ س \in ح$$

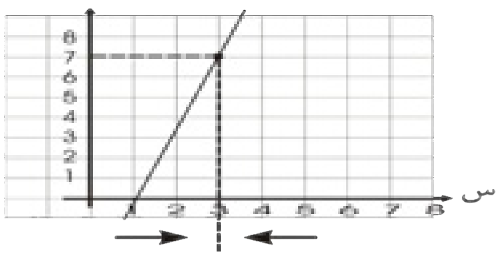
وعوضنا عن قيمة س بقيم تقترب من القيمة 3 دون أن تصل إلى 3 كما هو موضح بالجدول (1)

س	د (س)
4	11
3.75	10
3.5	9
3.1	7.4
3.01	7.04
3.00	7.004
⋮	⋮
3	7

س	د (س)
2	3
2.5	5
2.75	6
2.9	6.6
2.99	6.96
2.999	6.996
⋮	⋮
3	7

جدول (1)

من الجدول السابق نلاحظ أن قيمة الدالة د(س) تقترب من القيمة 7 كلما اقتربت س من القيمة 3 من الناحيتين اليمنى واليسرى (أي من خلال قيم أكبر من س وقيم أقل من س) ، كما هو موضح في الشكل 5 - 2



شكل 5 -2

وبذلك نقول أن أقرب قيمة نهـــا د(س) عندما تقترب س من العدد3 (من الجهتين اليمنى واليسرى) هي القيمة 7 وفي هذه الحالة يسمى العدد 7 نهاية الدالة د(س) عندما تقترب س من العدد 3 وتكتب رياضياً :

$$\lim_{س \leftarrow 3} 4س - 5 = 7$$

وبصفة عامة يمكن القول بأنه إذا كانت د(س) دالة تقترب من القيمة الحقيقية ل كلما اقتربت س من القيمة أ (من ناحية اليمين وناحية اليسار)،فإن نهاية د(س) عندما تقترب س من القيمة أ تكتب رياضياً :

$$\lim_{س \leftarrow أ} د(س) = ل$$

مع ملاحظة أن :

1. س $\neq$ أ ،ولكن س تقترب قرباً كبيراً من أ
2. د(س) $\neq$ ل ، ولكن $\lim_{س \leftarrow أ} د(س) = ل$
3. عندما نقول أن النهاية ليس لها وجود ،فإننا نعني أن النهاية لا تساوي عدداً حقيقياً وحيداً وهذا يعني أن النهاية تكون لها أكثر من قيمة ، أو أكبر من أي عدد حقيقي نتصوره أو أصغر من أي عدد حقيقي نتصوره وفي هذه الحالة نكتب : $\lim_{س \leftarrow أ} د(س) = \pm \infty$

قواعد لحساب النهايات

قاعدة (1)

إذا كانت أ، ب جـ $\in$ ح فإن : $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ب س + جـ = ب أ + جـ

قاعدة (2)

إذا كانت د(س) = س فإن : $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ س = أ

قاعدة (3)

إذا كانت د(س) = م فإن $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ م = م ، حيث م $\in$ ح

قاعدة (4)

إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ $د_1$(س) = ل ، $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ $د_2$(س) = م ، حيث ل ، م $\in$ ح

فإن $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ [$د_1$(س) $\pm$ $د_2$(س)] = $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ $د_2$(س) $\pm$ $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ $د_2$(س)

= ل $\pm$ م

وهذا يعني أن حساب النهاية لأي دالة حدودية يمكن حسابها لكل حد من حدود الدالة الحدودية.

مثال 3 :

أحسب قيمة النهاية الأتية إن كان لها وجود

عندما تقترب س من 2 ، د(س) = 5 س ^{3} + 3 س ^{2} - 4 س + 6

فإن :

$\lim\limits_{س \leftarrow 2}$ [5 س^3 + 3س ^{2} - 4 س + 6] = $\lim\limits_{س \leftarrow 2}$ 5 س ^{3} + $\lim\limits_{س \leftarrow 2}$ 3 س ^{2} - $\lim\limits_{س \leftarrow 2}$ 4 س + $\lim\limits_{س \leftarrow 2}$ 6

= 40 + 12 - 8 + 6 = 50

قاعدة (5)

إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ د(س) = ل ، $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = م

فإن $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ [د(س) . ق(س)] = $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ د (س) . $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق (س)

= ل . م

مثال 4:

أحسب قيمة النهاية الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{س \to 2} (5 س + 3) \cdot \sqrt{2 س}$$

فإن $\lim_{س \to 2} (5 س + 3) \cdot \sqrt{2 س} = \lim_{س \to 2} (5 س + 3) \cdot \lim_{س \to 2} \sqrt{2 س}$

$= (13) \cdot (2)$

$= 26$

قاعدة (6)

إذا كانت $\lim_{س \to أ} د(س) = ل$ ، $\lim_{س \to أ} ق(س) = م$ ، $\lim_{س \to أ} ق(س) \neq 0$

$$\lim_{س \to أ} \frac{د(س)}{ق(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} د(س)}{\lim_{س \to أ} ق(س)}$$

$$= \frac{ل}{م}$$

مثال 5:

أحسب قيمة النهاية الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{س \to 1} \frac{(5 س + 4)}{\sqrt{س}}$$

الحل:

$$\frac{\lim_{س \to 1} (5 س + 4)}{\lim_{س \to 1} \sqrt{س}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{1}}$$

$= 9$

مثال 6:

أحسب قيمة النهاية الآتية إن كان لها وجود عند س ≠ - 2

$$\lim_{س \to 2} \frac{2س^2 + 5س + 4}{2 + س}$$

الحل:

$$= \frac{\lim_{س \to 2} (2س^2 + 5س + 4)}{\lim_{س \to 2} (2 + س)}$$

$$= \frac{8 + 10 + 4}{2 + 2} = \frac{22}{4}$$

قاعدة (7)

$$\lim_{س \to أ} \left(د(س) \right)^{ن} = \left(\lim_{س \to أ} د(س) \right)^{ن}$$

مثال 7:

أحسب قيمة النهاية الآتية إن كان لها وجود

الحل:

$$\lim_{س \to 1} \left(2 س^2 + 5س \right)^9 = \left(\lim_{س \to 1} 2 س^2 + 5 \right)^9$$

$$= (7)^9$$

قاعدة (8)

$$\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{د(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} د(س)}$$

مثال 8:

$$\lim_{س \to -2} \sqrt{س^4 + 4 س + 1}$$

الحل:

$$= \sqrt{\lim_{س \to -2} س^4 + 4 س + 1}$$

$$= \sqrt{16 + 8 + 1}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

قاعدة (9)

$$\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن\, أ^{ن-1}$$ حيث ن عدد صحيح لا يساوي الصفر

مثال 9:

أوجد قيمة $\lim_{س \to 3} \frac{س^{4} - 81}{س - 3}$

الحل:

$$\lim_{س \to 3} \frac{س^{4} - 81}{س - 3} = \lim_{س \to 3} \frac{س^{4} - 3^{4}}{س - 3} \quad ، \quad س \neq 3$$

$$= 4(3)^{4-1}$$

$$= 4 \times 3^{3}$$

$$= 108$$

❖ **نتيجة (1)**

$$\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م}\, أ^{ن-م}$$ حيث ن ، م عددان نسبيان لايساوي الصفر

مثال 10:

احسب قيمة

$$\lim_{س \to 3} \frac{س^{5} - 243}{س^{3} - 27}$$

الحل:

$$\lim_{س \to 3} \frac{س^{5} - 243}{س^{3} - 27} = \lim_{س \to 3} \frac{س^{5} - 3^{5}}{س^{3} - 3^{3}} = \frac{5}{3}(3)^{5-1}$$

$$= 15$$

❖ **نتيجة (2)**

$$\lim_{س \to 0} \frac{(أ + س)^{ن} - أ^{ن}}{س} = \lim_{(أ + س) \to أ} \frac{(أ + س)^{ن} - أ^{ن}}{(أ + س) - أ}$$

$$= ن\, أ^{ن-1}$$

مثال 11:

احسب

$$\lim_{س \to 0} \frac{(2 + س)^{3} - 8}{س}$$

الحل:

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{(2+\text{س})^3 - 8}{\text{س}} = \lim_{(\text{س}+2) \to 2} \frac{(2+\text{س})^3 - 2^3}{(\text{س}+2) - 2}$$

$$= 3(2)^{3-1}$$

$$= 12$$

تمرين 5 – أ :

احسب قيمة النهايات الأتية إن كان لها وجود

1. $\lim_{\text{س} \to 0} (2\text{س}^2 + 5\text{س} - 3)$

2. $\lim_{\text{س} \to 1} (4\text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 16\text{س} + 4)$

3. $\lim_{\text{س} \to 0} \sqrt{4\text{س} + 16}$

4. $\lim_{\text{س} \to -1} \frac{\text{س}^2 - \text{س}}{\text{س}^3 - 1}$

5. $\lim_{\text{س} \to 0} \sqrt[3]{2\text{د(س)}}$ حيث $\lim_{\text{س} \to 0} \text{د(س)} = 4$

6. $\lim_{\text{س} \to 3} (3\text{س} - 2) \cdot \sqrt{\text{س}^2 + 1}$

7. $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{5\text{س} + 5}{4\text{س} + 3}$ ، $\text{س} \neq -\frac{3}{4}$

8. $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{2\text{س} + 1}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq 0$

9. $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}^3 - 3^3}{\text{س}^2 - 9}$

10. $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^{10} - 2^{10}}{\text{س}^7 - 2^7}$

11. $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}^5 - 243}{\text{س}^4 - 81}$

12. $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^{-5} + \frac{1}{32}}{\text{س} - 2}$

13. $\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^{\frac{17}{2}} - \text{س}^{\frac{5}{2}}}{\text{س}^{\frac{11}{2}} - \text{س}^{\frac{1}{2}}}$

5 - 3 حساب النهايات بطرق مختلفة

رأينا من الأمثلة السابقة أنه يمكن حساب النهايات بالتعويض المباشر عن قيمة س ولكن في بعض المسائل نجد أن قيمة النهاية ليس لها وجود عندما نعوض عن س بالطرق المباشرة وبالتالي نلجأ إلى أساليب اخرى لحساب مثل هذه النهايات تتمثل في الآتي :

أ) حساب النهاية بالتحليل :

مثال 15 :

$$\lim_{س \to 3} \frac{س^2 - 9}{س - 3}$$

الحل :

نلاحظ أن هذه النهاية ليس لها وجود عند التعويض برقم 3 عن س

$$\lim_{س \to 3} \frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{9 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0} = \text{(كمية غير معرفة)}$$

إذا نلجأ إلى التحليل أي أن

$$\lim_{س \to 3} \frac{س^2 - 9}{س - 3} = \lim_{س \to 3} \frac{(س - 3)(س + 3)}{(س - 3)}$$

$$= 6$$

مثال 13 :

احسب قيمة النهايات الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{س \to 2} \frac{س^2 - س + 6}{س - 2}$$

الحل :

$$\lim_{س \to 2} \frac{س^2 - س + 6}{س - 2} = \lim_{س \to 2} \frac{(س - 3)(س - 2)}{س - 2}$$

$= -1$ لاحظ أن $س \neq 2$

مثال 14 :

احسب قيمة النهايات الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{س \to 2} \frac{س - 2}{س^2 - س - 2} = \lim_{س \to 2} \frac{س - 2}{(س + 1)(س - 2)}$$

$$= \frac{1}{3}$$

مثال 15:

احسب قيمة النهايات الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{س \to 3} \frac{س^2 + س - 12}{س^2 + 3س - 18}$$

الحل:

$$\lim_{س \to 3} \frac{س^2 + س - 12}{س^2 + 3س - 18} = \lim_{س \to 3} \frac{(س - 3)(س + 4)}{(س - 3)(س + 6)}$$

$= \frac{7}{9}$ لاحظ أن س $\neq 3$

مثال 16:

احسب قيمة النهايات الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{س \to \sqrt{3}} \frac{س^2 - 3}{س - \sqrt{3}}$$

الحل:

$$\lim_{س \to \sqrt{3}} \frac{س^2 - 3}{س - \sqrt{3}}$$

$$= \lim_{س \to \sqrt{3}} \frac{(س - \sqrt{3})(س + \sqrt{3})}{س - \sqrt{3}}$$

$= \sqrt{3} + \sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3}$

مثال 17:

احسب قيمة النهايات الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{س \to 4} \frac{س^2 - 16}{\sqrt{س} - 2}$$

الحل:

$$\lim_{س \to 4} \frac{س^2 - 16}{\sqrt{س} - 2} = \lim_{س \to 4} \frac{(س - 4)(س + 4)}{(\sqrt{س} - 2)}$$

$$= \lim_{س \to 4} \frac{(\sqrt{س} - 2)(\sqrt{س} + 2)(س + 4)}{(\sqrt{س} - 2)}$$

$$\lim_{\text{س} \to 4} (\sqrt{\text{س}} + 2)(\text{س} + 4) = (\sqrt{4} + 2)(4 + 4)$$

$$= (4)(8)$$

$$= 32$$

مثال 18 :

احسب

$$\lim_{\text{س} \to 1} \left(\frac{1 - \frac{1}{\text{س}}}{1 - \text{س}} \right) \quad ، \quad \text{س} \neq 1$$

الحل :

$$\because \quad 1 - \frac{1}{\text{س}} = \frac{\text{س} - 1}{\text{س}}$$

$$\therefore \quad \frac{1 - \frac{1}{\text{س}}}{1 - \text{س}} = \frac{\text{س} - 1}{\text{س}\,(1 - \text{س})} \quad \text{لاحظ أن س} \neq 1$$

$$= -\frac{1}{\text{س}}$$

بهذا فإن

$$\lim_{\text{س} \to 1} \left(\frac{1 - \frac{1}{\text{س}}}{1 - \text{س}} \right) = -\lim_{\text{س} \to 1} \frac{1}{\text{س}}$$

$$= -1$$

مثال 19 :

احسب $\lim_{\text{س} \to -3} \sqrt[3]{\dfrac{\text{س}^3 + 27}{\text{س}^2 - 9}}$

الحل :

$$\lim_{\text{س} \to -3} \sqrt[3]{\frac{\text{س}^3 + 27}{\text{س}^2 - 9}} = \lim_{\text{س} \to -3} \sqrt[3]{\frac{\text{س}^2 - 3\,\text{س} + 9}{\text{س} - 3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9 + 9 + 9}{-6}} = \sqrt[3]{\frac{-9}{2}}$$

ب) حساب النهاية بطريقة الضرب في المرافق

مثال 20 :

احسب قيمة النهاية الآتية إن كان لها وجود

$$\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{\text{س} + 4} - 2}{\text{س}}$$

الحل

نلاحظ أن قيمة هذه النهاية كمية غير معينة بالتعويض المباشر ، وبذلك نضرب طرفي البسط والمقام في مرافق البسط فنجد أن :

$$\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{\text{س} + 4} - 2}{\text{س}} \cdot \frac{(\sqrt{\text{س} + 4} + 2)}{(\sqrt{\text{س} + 4} + 2)}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{س} + 4 - 4}{\text{س} \, [\sqrt{\text{س} + 4} + 2]}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \frac{1}{\sqrt{\text{س} + 4} + 2} = \frac{1}{4}$$

مثال 21:

احسب قيمة النهاية الأتية إن كان لها وجود

$$\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}}{(\sqrt{\text{س} + 3} - \sqrt{3})}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}}{(\sqrt{\text{س} + 3} - \sqrt{3})} \cdot \frac{(\sqrt{\text{س} + 3} + \sqrt{3})}{\sqrt{\text{س} + 3} + \sqrt{3}}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \sqrt{\text{س} + 3} + \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

جـ) حساب النهايات بتوحيد المقامات

مثال 22 :

احسب قيمة النهايات الأتية إن كان لها وجود

$$\underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهــا}} \left(\frac{\text{س}^2}{\text{س} - 2} - \frac{4}{\text{س} - 2} \right)$$

الحل :

نلاحظ أن قيمة هذه النهاية ليس لها وجود ، توحيد المقامات وتكون كالآتي :

$$\underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهــا}} \left(\frac{\text{س}^2}{\text{س} - 2} - \frac{4}{\text{س} - 2} \right) = \underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} - 2)(\text{س} + 2)}{(\text{س} - 2)}$$

$$= 4$$

تمرين 5 – ب :

احسب قيمة النهايات الآتية إن كان لها وجود

1. $\underset{\text{س} \to 12}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^2 - 144}{\text{س} - 12}$

2. $\underset{\text{س} \to -2}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^2 + 10\text{س} + 16}{\text{س} + 2}$

3. $\underset{\text{س} \to -5}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} + 5}{\text{س}^2 - 25}$

4. $\underset{\text{س} \to -9}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^2 - 81}{\text{س}^2 + 7\text{س} - 18}$

5. $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + 4)^2 - 16}{\text{س}}$

6. $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{\text{س}^6 - 64}{\text{س}^4 - 16}}$

7. $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + 5} - \sqrt{5}}{\text{س}}$

8. $\underset{\text{س} \to 5}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^2 - 2\text{س} - 15}{\text{س}^3 - 4\text{س}^2 - 5\text{س}}$

9. $\underset{\text{س} \to 4}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{س}^2}{\text{س} - 4} - \dfrac{16}{\text{س} - 4} \right)$

10. $\underset{\text{س} \to 4}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{\text{س}^2 - 16}{\text{س} - 4}}$

4 - 5 النهايات من الجهتين اليمنى واليسرى

للبحث عن نهاية د (س) عند نقطة أ والتي تتغير بجوارها قاعدة الدالة نتبع مايلي :

أولاً : نبحث وجود النهاية اليمنى للدالة عند أ وهي :

$$\underset{\text{س} \to \text{أ}^{+}}{\text{نهــا}} \text{د(س)} = \text{د(أ)} \quad ، \quad \text{س} > \text{أ}$$

ثانياً : نبحث وجود النهاية اليسرى للدالة عند أ وهي :

$$\underset{\text{س} \to \text{أ}^{-}}{\text{نهــا}} \text{د (س)} = \text{د (أ)} \quad ، \quad \text{س} < \text{أ}$$

فيكون لدينا الحالات الآتية :

1) إذا كان د $(\text{أ}^{-}) = \text{د} (\text{أ}^{+}) = \text{ل}$

2) $\underset{\text{س} \to \text{أ}^{-}}{\text{نهــا}} \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to \text{أ}^{+}}{\text{نهــا}} \text{د(س)} = \text{ل}$

ملحوظة:
لا يشترط لوجود د النهاية عند س = أ أن تكون دالة معرفة عند أ

إذا توفرت تلك الشروط تكون للدالة د(س) نهاية بمعنى إذا تتساوى النهايتان اليمنى واليسرى للدالة تكون للدالة نهاية عند س = أ

مثال 23 :

إذا كانت
$$\text{د(س)} = \begin{cases} 3 & ، \text{س} \geqslant 0 \\ 3 - \text{س} & ، \text{س} < 0 \end{cases}$$

فابحث وجود نهاية الدالة عند س = 0

الحل

$$\underset{\text{س} \to 0^{-}}{\text{نهــا}} \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to 0^{-}}{\text{نهــا}} (3 - \text{س}) \quad ،$$

$$\therefore \underset{\text{س} \to 0^{-}}{\text{نهــا}} \text{د(س)} = 3$$

$$\underset{\text{س} \to 0^{+}}{\text{نهــا}} \text{د(س)} = 3$$

$$\therefore \underset{\text{س} \to 0^{-}}{\text{نهــا}} \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to 0^{+}}{\text{نهــا}} \text{د(س)}$$

مثال 24:

أوجد نهاية الدالة د(س) عند النقطة المبينة إن وجدت :

$$د(س) = \begin{cases} 4س - 5 & ، \quad س < 3 \\ \dfrac{س^2 + س - 12}{س - 3} & ، \quad س > 3 \end{cases}$$ عند س = 3

الحل :

$$\lim_{س \to 3^+} د(س) = \lim_{س \to 3^+} \frac{س^2 + س - 12}{س - 3}$$

$$= \lim_{س \to 3^+} \frac{(س - 3)(س + 4)}{س - 3}$$ لاحظ أن س = 3 ليست في نطاق الدالة

$$= \lim_{س \to 3^+} (س + 4)$$

$$= 3 + 4$$

$$= 7$$

$$، \quad \lim_{س \to 3^-} د(س) = \lim_{س \to 3^-} (4س - 5)$$

$$= 4 \times 3 - 5$$

$$= 12 - 5$$

$$= 7$$

$$\therefore \lim_{س \to 3^-} د(س) = \lim_{س \to 3^+} د(س)$$

∴ للدالة وجود عند س = 3

مثال 25:

ابحث نهاية الدالة $د(س) = \dfrac{|س + 2|}{س + 2} + 5$ عند س = - 2

الحل

$$\because |س + 2| = \begin{cases} (س + 2) & ، \quad س \geqslant -2 \\ -(س + 2) & ، \quad س < -2 \end{cases}$$

نعبر عن د(س) دون استحدام رمز القيمة المطلقة

$$\therefore\ \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 6 & \text{، } \text{س} \geq -2 \\ 4 & \text{، } \text{س} < -2 \end{cases}$$

$$\underset{\text{س} \to 2^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to 2^{-}}{\text{نهـا}}\ (4) = 4$$

$$\text{،}\ \underset{\text{س} \to 2^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to 2^{+}}{\text{نهـا}}\ (6) = 6$$

∴ **النهاية ليس لها وجود**

مثال 26:

إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - \text{ل} & \text{، } \text{س} < 3 \\ \text{م س}^2 - 4 & \text{، } \text{س} > 3 \end{cases}$

عين الثابتين ل ، م إذا كان $\underset{\text{س} \to 3}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = 5$

الحل

$$\because\ \underset{\text{س} \to 3^{-}}{\text{نهـا}}\ (\text{س} - \text{ل}) = 5 \Leftarrow 3 - \text{ل} = 5 \quad \therefore\ \text{ل} = -2$$

$$\text{،}\ \underset{\text{س} \to 3^{+}}{\text{نهـا}}\ (\text{م س}^2 - 4) = 5 \Leftarrow \text{م}\ (3)^2 - 4 = 5$$

$$\Leftarrow 9\ \text{م} = 9$$

$$\therefore\ \text{م} = 1$$

تمرين 5 – جـ :

1 **ابحث وجود وقيمة النهاية لكل من الدوال الآتية :**

أ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 3\text{س} - 4 & \text{، } \text{س} \geq 1 \\ 1 & \text{، } \text{س} = 1 \\ 2\text{س} + 1 & \text{، } \text{س} < 1 \end{cases}$

ب $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 3\text{س} - 1 & \text{، } \text{س} < 0 \\ 0 & \text{، } \text{س} = 0 \\ 2\text{س} + 5 & \text{، } \text{س} > 0 \end{cases}$

جـ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2}{\sqrt{\text{س}^2}} + 1$ عندما $\text{س} \to 0$

د $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{2\text{س} + 1} & \text{، } \text{س} < 0 \\ \sqrt{\text{س} + 3} & \text{، } \text{س} \geq 0 \end{cases}$

2 أوجد إذا أمكن $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$ بحيث

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{|\text{س} - 2|}{\text{س} - 2}$$

3 أدرس النهايات التالية :

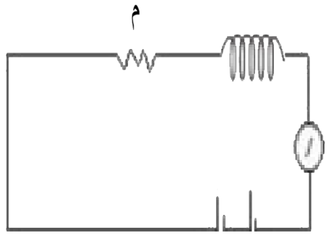
أ $\underset{\text{س} \to 0^{-}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}}{\text{س}^2 + |\text{س}|}$

ب $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} - 2}$

جـ $\underset{\text{س} \to 3}{\text{نهـا}}\ \sqrt{3 - \text{س}}$

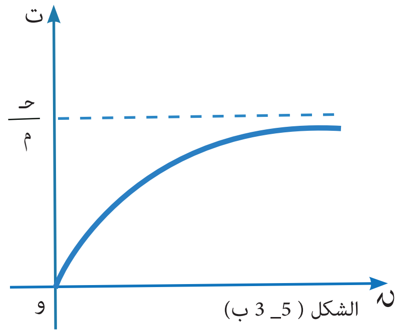
5 - 5 نهاية دالة عند اللانهاية

عند دراسة أنظمة تتطور مع الزمن غالباً ما نكون مهتمين بدراسة سلوك النظام لقيم ن الكبيرة، وقد يكون سلوك النظام معقداً بدرجة كبيرة إلا أنه قد يحدث أن يستقر النظام بعد فترة زمنية ليأخذ سمة أكثر بساطة وهو ما يعبر عنه بالسلوك التقريبي وكمثال لذلك ، إذا وصلنا ملفاً ومقاومة على التوالي بمصدر للتيار المستمر شكل (5 - 3 أ) وقسمنا التيار في تلك الفترة ، نجد أن التيار ت يبدأ في الزيادة حتى يصل إلى قيمة ثابتة تساوي $\frac{\text{جـ}}{\text{م}}$ امبير حيث :



الشكل (5_3 أ)

جـ القوة الدافعة الكهربية بالفولت ، م قيمة المقاومة بالأوم شكل (5 - 3 ب) ونعبر عن ذلك السلوك كما يلي:



الشكل (5_3 ب)

$$\underset{\text{ت} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\ \text{ت} = \frac{\text{جـ}}{\text{م}}$$

وفيما يلي نعطي المفهوم الرياض لنهاية دالة عند اللانهاية ثم طرق حساب تلك النهاية لنأخذ الدالة : د (س) = $\frac{1}{\text{س}}$ ، س $\neq 0$

عندما تأخذ س قيم كبيرة موجبة فإن $\frac{1}{\text{س}}$ تأخذ قيم صغيرة حتى تصل إلى قيمة قريبة جداً من الصفر والجدول التالي يبين هذه الحقيقة

س	10	100	1000	10000	←	∞
د (س)	0.1	0.01	0.001	0.0001	←	صفر

ونلاحظ أن ∞ موجبة وأن س تقترب منها ولا تساويها ونستطيع عند ئذ أن نكتب :

$$\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\ \frac{1}{\text{س}} = \text{صفر}$$

- **نتائج :** -

1) $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\ \frac{1}{\text{س}^{\text{م}}} = \text{صفراً حيث م} \in \text{ح}^{+}$

2) $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\ \text{ر}^{\text{س}} = \text{صفراً حيث } |\text{ر}| < 1$

مثلاً : - $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{س}} = 0$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\text{س}} = 0$

مثال 27:

احسب قيمة النهاية إن وجدت

$$\lim_{س \to \infty} \frac{2س^2 + 5س}{4س^2 - 3س}$$

الحل:

نلاحظ بالتعويض المباشر تكون قيمة النهاية $\frac{\infty}{\infty}$ وهذه كمية غير معينة

وعليه نقسم كل حد من حدود البسط والمقام على س بأكبر أس فتكون :

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{2س^2}{س^2} + \frac{5س}{س^2}}{\frac{4س^2}{س^2} - \frac{3س}{س^2}} = \lim_{س \to \infty} \frac{2 + \frac{5}{س}}{4 - \frac{3}{س}}$$

$$= \frac{2 + 0}{4 - 0} = \frac{1}{2}$$

مثال 28:

احسب قيمة النهاية إن وجدت

$$\lim_{س \to \infty} \frac{5س^3 + 2س^2 - 4\ س}{15\ س^2 + 3س}$$

الحل:

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{5س^3}{س^3} + \frac{2س^2}{س^3} - \frac{4س}{س^3}}{\frac{15س^2}{س^3} + \frac{3س}{س^3}} = \frac{5 + \frac{2}{س} - \frac{4}{س^2}}{\frac{15}{س} + \frac{3س}{س^2}}$$

$$= \frac{5 + 0 - 0}{0 + 0} = \frac{5}{0}$$

$$= \infty$$

مثال :29

احسب قيمة النهاية إن وجدت

$$\lim_{س \to \infty} \frac{4س + 2}{6س^2 + 3س + 4} = \frac{\frac{4}{س} + \frac{2}{س^2}}{6 + \frac{3}{س} + \frac{4}{س^2}}$$

$$= \frac{0 - 0}{6 + 0 + 0}$$

$$= \frac{0}{6} = 0$$

مثال :30

أوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{2س - 3}{\sqrt{س^2 + 1}}$

الحل :

بقسمة حدي الكسر على أكبر اس وهو س

$$\lim_{س \to \infty} \frac{2س - 3}{\sqrt{س^2 + 1}} = \lim_{س \to \infty} \frac{2 - \frac{3}{س}}{\sqrt{1 + \frac{1}{س^2}}}$$

$$= \frac{2 - 0}{\sqrt{1 + 0}}$$

مثال :31

$$\lim_{س \to -\infty} \frac{2س + 5}{\sqrt{9س^2 - 1}}$$

الحل :

بقسمة حدي الكسر على – س

$$\lim_{س \to -\infty} \frac{2س + 5}{\sqrt{9س^2 - 1}} = \lim_{س \to -\infty} \frac{-2 + \frac{5}{-س}}{\sqrt{9 - \frac{1}{س^2}}}$$

$$= \frac{-2 + 0}{\sqrt{9 - 0}}$$

$$= \frac{-2}{3}$$

ملحوظة:

لحساب $\lim$ د(س)

عندما س $\to -\infty$

نتبع نفس الإسلوب فقط

$\sqrt{س^2} = -س$

عندما تكون س سالبة

مثال 32:

أوجد $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{7 \times 4^{س} + 15 \times 8^{س}}{2 \times 3^{س} + 5 \times 8^{س}}$

الحل:

بقسمة حدي الكسر على $8^{س}$

المقدار $= \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{7\left(\frac{1}{2}\right)^{س} + 15}{2\left(\frac{3}{8}\right)^{س} + 5} = \dfrac{7 \times 0 + 15}{2 \times 0 + 5}$

$= 3$

تمرين 5 – د :

ناقش النهايات التالية

أ) $\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{5س + 1}{س^{2} + 1}$

ب) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt{س^{2} + 9}}{س + 9}$

جـ) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^{2} + 1} + س\right)$

د) $\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{\sqrt{س^{2} + 9}}{س + 9}$

هـ) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{2س^{3} + س - 1}{3س^{3} + 2}$

و) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{2}{س^{2} - 2س + 1}$

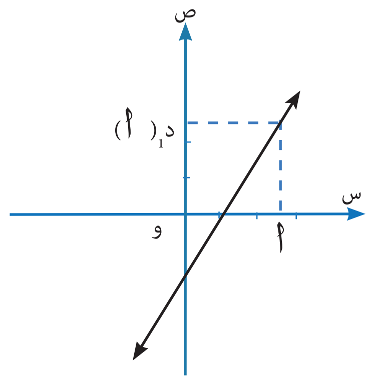
ز) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt{4س^{3} - 3س^{2}}}{\sqrt{س^{6} + 2س}}$

ح) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{3^{س+1} + 5^{س} - 2}{5^{س+1} + 3}$

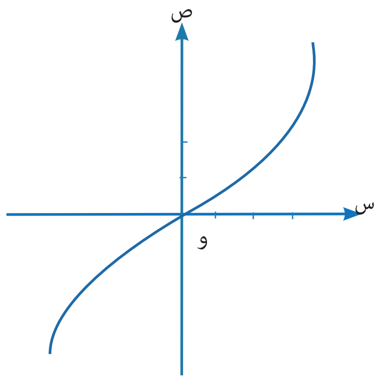
5 - 6 مفهوم اتصال الدالة عند نقطة

لنتأمل الأشكال (5 - 1) (5 - 2) ، (5 - 3) التي تمثل على الترتيب الدوال الأتية وجميعها دوال من ح ← ح

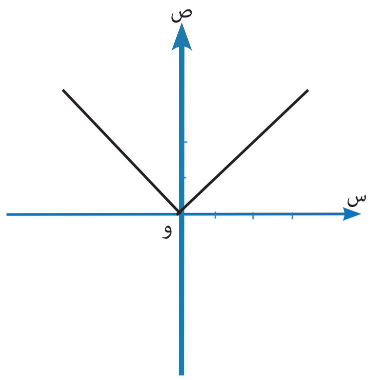
$د_1(س) = س - 1$ ، $د_2(س) = س^3$ ، $د_3(س) = |س|$



شكل (5 - 1)



شكل (5 - 2)



شكل (5 - 6)

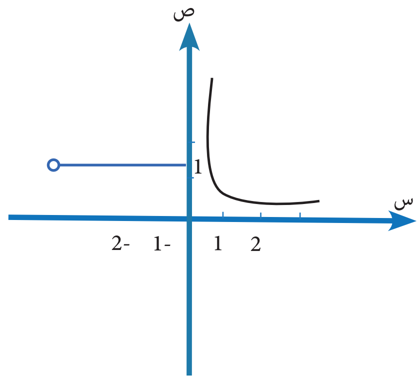
إن التمثيل لهذه الدّوال الثلاثة هي خطوط متصلة ، إي يمكن رسمها دون أن نرفع سن القلم عن الورقة التي ترسم عليها . بمعنى آخر لا يوجد بأي خط منها قفزة ، لهذا نقول أن الدوال $د_1$، $د_2$ ، $د_3$ هي دوال
متصلة عند جميع النقط .

ولنتأمل الأشكال (5 - 4) (5 - 5) ، (5 - 6) والتي تمثل على الترتيب الدوال الأتية :

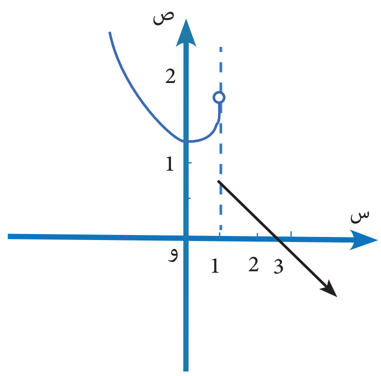
$$د_4(س) = \begin{cases} 1 & ، \quad 0 \geqslant س > 2 \\ \frac{1}{س} & ، \quad 2 \geqslant س > 0 \end{cases}$$

$$د_5(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، \quad 2 > س \\ 3 - س & ، \quad 2 \leqslant س \end{cases}$$

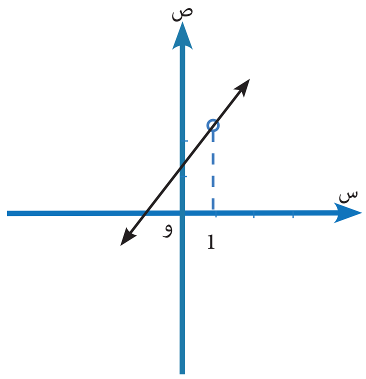
$$د_6(س) = \begin{cases} \frac{(2س + 3)(س - 1)}{(س - 1)} & ، \quad س \neq 1 \\ 0 & ، \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$



شكل (5 - 4)



شكل (5 - 5)



شكل (5 - 6)

إن التمثيل البياني لأي من هذه الدوال هو خط متصل فيما عدا عند نقطة ما وبالتالي نقول أن الدوال د4، د5، د6 غير متصلة على الترتيب عند س= 0 ، س = 2 ، س= 1

تعريف: تكون الدالة د متصلة عند نقطة س = أ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية مجتمعة :

1) **د(س) معرفة عند س = أ (د(أ) لها وجود)**

2) **د(س) لها نهاية عند س ← أ**

3) نهـــا د(س) = د(أ)
   س ← أ

مثال 33:

ابحث اتصال الدالة

د(س) = { 2س ، س ≤ 1 ؛ 3 - س ، س > 1 } عند س = 1

الحل :

د(1) = 2(1) = 2 ∴ الدالة معرّفة عند س=1

، نهـــا (س ← 1⁻) د(س) = نهـــا (س ← 1⁻) 2 س = 2

، نهـــا (س ← 1⁺) د(س) = نهـــا (س ← 1⁺) (3 - س) = 2

∴ نهـــا (س ← 1⁻) د(س) = نهـــا (س ← 1⁺) د(س) = نهـــا (س ← 1) د(س) = د(1)

∴ الدالة د(س) متصلة عند س = 1

مثال 34:

ابحث اتصال الدالة

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^2 - 9}{س - 3} & ، س \neq 3 \\ 6 & ، س = 3 \end{cases}$$ **عند س = 3**

الحل:

نبحث اتصال الدالة عند س = 3

$د(س) = \dfrac{س^2 - 9}{س - 3} = س + 3$ ، $س \neq 3$

$د(س) = 3 + 3 = 6$ ∴ الدالة د معرفة عند س = 3

، $\lim\limits_{س \to 3^-} د(س) = \lim\limits_{س \to 3^+} د(س) = 6$

∴ مما سبق ينتج أن د متصلة عند س = 3

مثال 35:

ابحث اتصال الدالة

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^3 - 8}{س - 2} & ، س < 2 \\ 3س + 6 & ، س \geq 2 \end{cases}$$ **عند س = 2**

الحل:

1) إذا كانت س < 2 ، فإن د(س) = $\dfrac{س^3 - 8}{س - 2}$

وعليه ، $د(س) = \dfrac{(س - 2)(س^2 + 2س + 4)}{(س - 2)}$

$= س^2 + 2س + 4$

، $د(2) = 2^2 + 2 \times 2 + 4 = 12$

$\lim\limits_{س \to 2^-} د(س) = \lim\limits_{س \to 2^+} د(س) = 12$

∴ الدالة د متصلة عند كل س : س < 2 ⇐

متصلة على الفترة (-∞، 2)

2) إذا كانت س $\geqslant$ 2 ، فإن د(2) = 3× 2 + 6 . د(2) = 12

نهـــا د(س) = نهـــا = نهـــا (3 س + 6) = 12
س←2⁻ س←2⁺ س←2

∴ الدالة د متصلة عند س كل س > 2 ⟸
متصلة على الفترة (2، ∞)

∵ نهـــا د(س) = 12 = د(2)
س←2

∴ الدالة متصلة عند س = 2

مثال 36

ناقش استمرارية الدالة الآتية عند س = 0

$$\text{د(س)} = \begin{cases} 3\text{س}^2 - 2\text{ س} & \text{، س} < 0 \\ 0 & \text{، س} = 0 \\ 5\text{س} & \text{، س} > 0 \end{cases}$$

الحل :

نناقش استمرارية الدالة من خلال تطبيق الشروط الثلاث :

1 . د(0) = 0 ، نهـــا 3 س ^{2} - 2س = 0
س←0⁻

2. نهـــا د(س) = نهـــا 5س = 0
س←0⁺ س←0⁺

∵ النهاية اليسرى = النهاية اليمنى

∴ نهاية الدالة لها وجود أي أن نهـــا د(س) = 0 ، د(0) = نهـــا د(س) = 0
س←0⁻ س←0⁺

∴ الدالة متصلة عند س = 0

ملاحظات :

❖ الدالة الحدودية تكون متصلة على جميع الأعداد الحقيقية .

تمرين 5 – هـ :

أ ناقش استمرارية الدوال عند عند النقطة المبينة أمام كل الدالةمن الدوال الأتية :

1 $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + 1 & ، \ \text{س} < 3 \\ & ، \ \text{س} = 3 \\ \text{س} - 1 & ، \ \text{س} > 3 \end{cases}$

2 $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - 2\,\text{س} - 5}{5\text{س} - \text{س}^2} & ، \ \text{س} > 5 \\ \sqrt{5 - \text{س}} & ، \ \text{س} \leqslant 5 \end{cases}$ عند $\text{س} = 5$

3 $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} - 2} & ، \ \text{س} \neq 2 \\ 4 & ، \ \text{س} = 2 \end{cases}$ عند $\text{س} = 2$

ب أوجد القيمة ك التي تجعل الدوال الأتية متصلة :

1 $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س} - 2}{\text{س}^2 - 4} & ، \ \text{س} \neq 2 \\ \text{ك} & ، \ \text{س} = 2 \end{cases}$ عند $\text{س} = 2$

2 $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - 9}{5\text{س} - 15} & ، \ \text{س} \neq 3 \\ \text{ك} & ، \ \text{س} = 3 \end{cases}$ عند $\text{س} = 3$

جـ إذا كانت :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 (\text{هـ} + 1) + \text{س} + \text{هـ}}{\text{س} - 3} & ، \ \text{س} \neq -1 \\ 4\,\text{س} - 1 & ، \ \text{س} = 1 \end{cases}$

متصلة عند $\text{س} = 1$ فما هي قيمة هـ

6

التفاضل

التفاضل

Differentiation

يعتمد مفهوم اشتقاق الدالة على معنى النهاية يعتبر هذا المفهوم بداية لدراسة التفاضل ويستخدم لحساب المعادلات التي تتغير فيها قيمة متغير أو كمية .

في نهاية هذا الفصل سيكون الطالب قادراً على :

- ❖ استيعاب مفهوم التغير .
- ❖ استخدام المبادئ الأولية .
- ❖ التعرف على قواعد المشتقة وحساب تفاضلات بسيطة .
- ❖ يصنف هندسياَ القاطع والمماس لمنحنى الدالة عند نقطة .
- ❖ يستخدم قواعد الإشتقاق لإيجاد مشتقة دوال جبرية صريحة .
- ❖ يستخدم رموزاً مختلفة للتعبير عن المشتقة الأولى
- ❖ يميز بين الأشتقاق والأتصال عند نقطة .

6 - 1 التغير The chang

التغير

دالة التغير | دالة متوسط التغير | معدل التغير

ليكن ص = د(س) حيث : د معرّفة على ف ⊃ ح

عندماتتغير س من س$_1$ إلى (س$_1$ + هـ) فإن ص تتغير من

د(س$_1$) إلى د(س$_1$ + هـ)

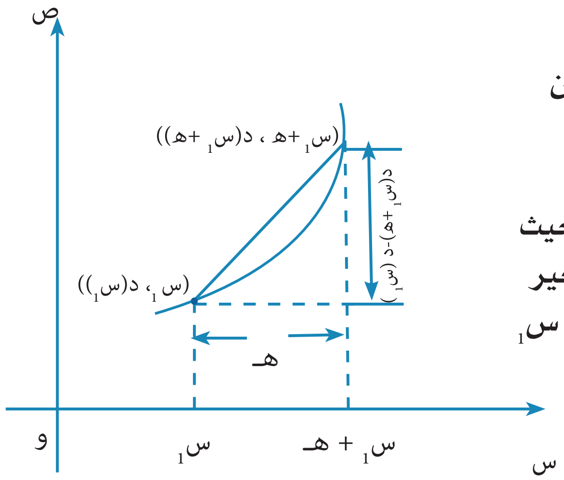
أي تغير ل في س يقابله التغير :

د(س$_1$ + هـ) − د(س$_1$) في ص ومع ذلك فإن ∀ هـ حيث

س$_1$ + ل ∈ف يتعين عدد حقيقي يمثل مقدار التغير

في قيمة الدالة المناظر للتغير في قيمة س من س$_1$

إلى س$_1$ + هـ .



سنرمز للتغير في س بالرمز Δ س (ويقرا دلتا س) ومقدار التغير في قيمة الدالة نرمز لها بالرمز Δص حيث $\Delta س = س_2 - س_1$ ، $\Delta ص = ص_2 - ص_1$

، $\Delta ص = د(س_1 + \Delta س) - د(س_1)$ تسمى دالة التغير وبقسمة هذه الدالة على Δس حيث $\Delta س \neq 0$

نحصل على متوسط التغير في ص عندما تتغير س من $س_1$ إلى $س_2$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_1 + \Delta س) - د(س)}{\Delta س}$$

وإذا أخذنا $\lim\limits_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ فنحصل على معدل التغير للدالة د عند النقطة س وتكتب

$$ر(\Delta س) = \frac{\Delta ص}{\Delta س} \Leftarrow$$

معدل التغير الدالة عند $س_1 = \lim\limits_{\Delta س \to 0} \frac{د(س_1 + \Delta س) - د(س)}{\Delta س}$ ، $\Delta س \neq 0$

مثال 1:

إذا كانت $د(س) = س^2 + 1$

(أولاً) أوجد دالة التغير عندما س = 3 ثم أحسب قيمة د التغير عند $\Delta س = 0.01$

(ثانياً) أحسب متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من 3 إلى 3.2

(ثالثاً) معدل تغير الدالة س عند = 3

الحل :

(أولاً) دالة التغير

$\Delta ص = د(س_1 + \Delta س) - د(س_1)$

$\Delta ص = د(3 + \Delta س) - د(3)$

$\Delta ص = [(3 + \Delta س)^2 + 1] - [3^2 + 1]$

$\Delta ص = 9 + 6\Delta س + (\Delta س)^2 + 1 - 10$

$\Delta ص = (\Delta س)^2 + 6\Delta س$

دالة التغير عندما $\Delta س = 0.01$

$\Delta ص = (0.01)^2 + 6(0.01)$

$= 0.0601$

(ثانياً) متوسط تغير الدالة :

$$\frac{د(س_1 + \Delta س) - د(س_1)}{\Delta س} = \frac{د(3 + \Delta س) - د(3)}{\Delta س}$$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{(\Delta س)^2 - 6\Delta س}{\Delta س} = \Delta س + 6$$

عندما تتغير س من 3 إلى 3.02 تكون Δس = 0.02

متوسط تغير الدالة = 0.02 + 6 = 6.02

(ثالثاً) معدل تغير الدالة عندما س = 3

$$\underset{\Delta س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \underset{\Delta س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} (\Delta س + 6) = 6$$

تمرين 6 - أ :

1 أوجد متوسط التغير في كل من الحالات التالية :-

أ د(س) = 5 س^2 + س عندما تتغير س من 2 إلى 1.8

ب د(س) = $\sqrt{س^2 - 1}$ عندما تتغير س من 10 إلى 11.24 حيث س $\geqslant$ 1

2 يعطي حجم مزرعة للبكتريا عند لحظة زمنية ن (مقاسة بالساعات)

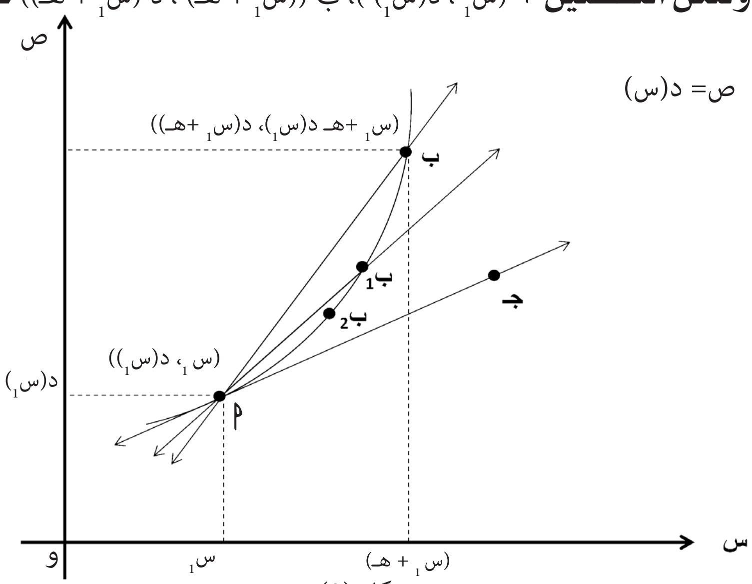
ح(ن) = 12000 + 6000 ن - 120 ن^2

أوجد متوسط نمو المزرعة عند ن من ساعتان إلى 3 ساعات ثم أوجد معدل النمو عند ن = 4 ساعات .

6 - 2 مشتقة الدالة Der ived Function

6 - 2 - 1 ميل المماس للمنحنى : Thetangantf of the curve

بفرض أن د دالة معطاة حيث ص = د(س)، شكل (2) يمثل جزء من منحنى هذه الدالة ، ولتكن النقطتين أ (س$_1$ ، د(س$_1$))، ب (س$_1$ + هـ) ، د (س$_1$ + هـ)) على منحنى الدالة



شكل (2)

إذا ثبتنا النقطة أ وتحركت النقطة ب على المنحنى بحيث تقترب شيئا فشيئا من النقطة أ وتأخذ الأوضاع ب1، ب2، ...... وهكذا فإنه في النهاية يؤول المستقيم القاطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ إلى الوضع النهائي $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ وذلك عندما ب ⟵ أ أي هـ ⟵ 0 ويصبح $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ مماساً لمنحنى الدالة عند النقطة (س$_1$، د(س$_1$)) ومن ذلك نستنتج أن :

ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة س1 هو :

$$\text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$$

وإذا استبدلت هـ بـ Δ س فيكون ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة د :

$$\text{نهـا}_{\Delta\text{س} \to 0} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} \quad \text{نهـا}_{\Delta\text{س} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\Delta\text{س}}$$

6 - 2 - 2 مشتقة الدالة عند نقطة

The function is derived at a point

إذا كان ص = د(س) حيث د دالة معَرفة عند س$_1$ كذلك في جوارها ، و

$\text{نهـا}_{\Delta\text{س} \to 0} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$ موجودة فإنها تسمى المشتقة الأولى للدالة عند س$_1$ و

نرمز لها بالرمز دَ(س) أو $\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}_1}$

أي أن :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{نهـا}_{\Delta\text{س} \to 0} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$$

مشتقة الدالة للدالة ص= د(س) عند أي نقطة س يرمز لها بالرمز دَ(س) كما يرمزلها برموز آخرى :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \text{ ، } \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}) \text{ ، صَ}$$

❖ الرمز $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ يمثل رمزاً مفرداً ولا يجب النظر إليه وتفسيره على أنه النسبة بين مقدارين ءص ، ءس

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ تعني مشتقة ص بالنسبة للمتغير س إذا كانت ص دالة في المتغير س (س متغير مستقل ، ص متغير تابع)

وكذلك يمكن التعبير :

* $\frac{دص}{دس}$ تعني معدل تغير ص بالنسبة للمتغير س ، تعني المعامل التفاضل الأول

وإذا تحقق وجود مشتقة دالة د عند نقطة معينة ،فإننا نقول أن د قابلة للإشتقاق عند هذه النقطة .

مثال 2 :

أوجد مشتقة د(س) = $س^2$ عند س = 2

الحل :

نتوجه مباشرة إلى الخطوة التالية :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س) - د(2)}{س - 2}$$

$$= \frac{س^2 - 4}{س - 2}$$

$$دَ(س) = \lim_{س \leftarrow 2} \frac{س^2 - 4}{س - 2}$$

$$= \lim_{س \leftarrow 2} \frac{س^2 - 2^2}{س - 2}$$ (باستخدام القاعدة في النهايات)

$$= 2(2)^{2-1}$$

$$= 4$$

حل آخر :

$$دَ(س) = \lim_{س \leftarrow 2} \frac{(س - 2)(س + 2)}{س - 2}$$

$$= \lim_{س \leftarrow 2} (س + 2)$$

$$= 2 + 2$$

$$= 4$$

مثال 3:

باستخدام تعريف المشتقة أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س = 4

إذا كانت ص = س + $\sqrt{\text{س}}$

$$\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}=4} = \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\text{د(س)} - \text{د}(4)}{\text{س} - 4}$$

$$\text{دَ}(4) = \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\text{س} + \sqrt{\text{س}} - 6}{\text{س} - 4}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\text{س} + \sqrt{\text{س}} - 6}{\text{س} - 4}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 4} \frac{(\text{س} - 4) + (\sqrt{\text{س}} - 2)}{\text{س} - 4}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 4} \frac{(\text{س} - 4)}{\text{س} - 4} + \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\sqrt{\text{س}} - 2}{\text{س} - 4}$$

$$= 1 + \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\sqrt{\text{س}} - 2}{\text{س} - 4} \cdot \frac{\sqrt{\text{س}} + 2}{\sqrt{\text{س}} + 2}$$

$$= 1 + \lim_{\text{س}\to 4} \frac{(\text{س} - 4)}{(\text{س} - 4)(\sqrt{\text{س}} + 2)}$$

$$= 1 + \lim_{\text{س}\to 4} \frac{1}{\sqrt{\text{س}} + 2}$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{4} + 2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + 2}$$

$$= 1 + \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{دَ}(4) = \frac{5}{4}$$

طريقة آخرى في الحل .

افرض أن ع = $\sqrt{س}$ ومنه ع^2 = س

فعندما س = 4 فإن ع = 2

$$د َ(4) = \lim_{ع \to 2} \frac{(ع + 3)(ع - 2)}{(ع - 2)(ع + 2)}$$

$$= \lim_{ع \to 2} \frac{2 + 3}{2 + 2}$$

$$\therefore د َ(4) = \frac{5}{4}$$

تمرين 6-ب :

1 - أوجد مشتقة الدالة ص = $\sqrt{س}$ ثم أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (4،2) الواقعة عليه

2 - أوجد المشتقة الأولى في كل مما يأتي باستخدام التعريف :

أ) ص = $\frac{1}{س - 2}$ ، س ≠ 2 عند س = 3

ب) ص = 4س^7 - 3 ، س = 1

جـ) ص = س^2 - 3س + 2 عند النقطة (3،2)

ملحوظة (1)

ميل المماس عند أي نقطة ، ماهو إلا معدل التغير في الإحداثي الصادي ص بالنسبة للأحداثي السيني عند هذه النقطة

ملحوظة (2)

$\frac{دص}{دس}$ = + كانت الزاوية هـ حادة

$\frac{دص}{دس}$ = - كانت الزاوية منفرجة

$\frac{دص}{دس}$ = 0 كانت الزاوية هـ = 0

(المماس موازياً لمحور السينات) حيث م = $\frac{دص}{دس}$ = ظا هـ

عند نقطة (س، ص) ، هـ الزاوية التي يميل بها المماس في الإتجاه الموجب لمحور السينات

3 - 6 الإتصال والإشتقاق

Continuity and Differentiatian

إذا كانت د قابلة للإشتقاق عند س$_1$ فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة

البرهان

∵ دَ(س) موجودة

∴ د معرفة عند س$_1$

$$\text{د(س)} - \text{د(س}_1) = \frac{\text{د(س)} - \text{د(س}_1)}{(\text{س} - \text{س}_1)} \cdot (\text{س} - \text{س}_1)$$

، س $\neq$ س$_1$

وبأخد النهاية للطرفين عندما س $\longrightarrow$ س$_1$

$$\lim_{\text{س}\to\text{س}_1} [\text{د(س)} - \text{د(س}_1)] = \lim_{\text{س}\to\text{س}_1} \frac{\text{د(س)} - \text{د(س}_1)}{\text{س} - \text{س}_1} \times \lim_{\text{س}\to\text{س}_1} (\text{س} - \text{س}_1)$$

$$= \text{دَ(س}_1) \times 0$$

$$\lim_{\text{س}\to\text{س}_1} \text{د(س)} - \text{د(س}_1) = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{\text{س}\to\text{س}_1} \text{د(س)} = \text{د(س}_1)$$

∵ د(س$_1$) معرفة فإن د(س) متصلة عند س$_1$

ملحوظة: هامة

اتصال دالة عند نقطة لا يعني بالضرورة أنها قابلة للإشتقاق عند تلك النقطة

❖ لتكن ص = | س | ، $\forall$ س $\in$ ح

بين أنها متصلة وغير قابلة للإشتقاق عند س = 0

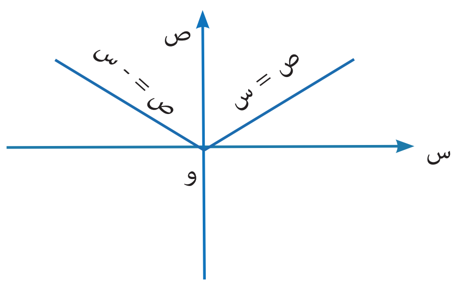
الحل

إذا كانت $\text{هـ} > 0$

فإن $\frac{|\text{هـ}|}{\text{هـ}} = \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}} = 1$

وإذا كانت $\text{هـ} < 0$

فإن $\frac{|\text{هـ}|}{\text{هـ}} = -\frac{\text{هـ}}{\text{هـ}} = -1$



شكل - 3

ومن ذلك نستنتج أن :

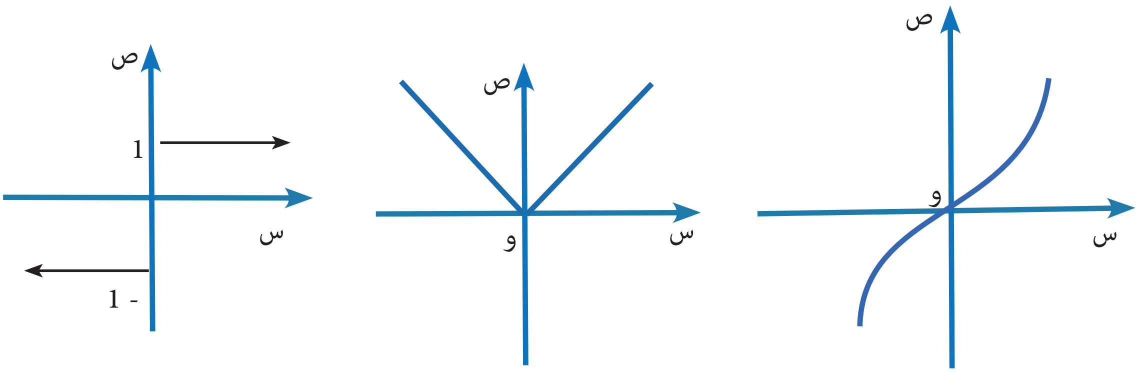
$$\lim_{\text{هـ}\to 0^+} \text{د(س)} = 1 \quad ، \quad \lim_{\text{هـ}\to 0^-} \text{د(س)} = -1$$

$$\text{نهـا}_{\text{هـ} \leftarrow 0^{+}} \text{د(س)} \neq \text{نهـا}_{\text{هـ} \leftarrow 0^{-}} \text{د(س)}$$

يعني $\text{نهـا}_{\text{هـ} \leftarrow 0^{+}} \dfrac{\text{د}(0 + \text{هـ}) - \text{د}(0)}{\text{هـ}} \neq \text{نهـا}_{\text{هـ} \leftarrow 0^{-}} \dfrac{\text{د}(0 + \text{هـ}) - \text{د}(0)}{\text{هـ}}$

وبالتالي $\text{نهـا}_{\text{هـ} \leftarrow 0} \dfrac{\text{د}(0 + \text{هـ}) - \text{د}(0)}{\text{هـ}}$ ليس لها وجود

، دَ (0) ليس لها وجود (لا يمكن إيجاد مماساً واحداً عند (0، 0) لمنحنى د)



ص = س^3
دالة متصلة و قابلة للإشتقاق
عند س= 0

ص = | س |
دالة متصلة و قابلة للإشتقاق
عند س= 0

$$\text{ص} = \begin{cases} 1 & \text{، ص} > 0 \\ 1- & \text{، ص} < 0 \end{cases}$$
دالة غير متصلة و غير قابلة للإشتقاق
عند س= 0

❖ قواعد الإشتقاق

Differentiation Rules

قاعدة (1)

إذا كانت د(س) = ك حيث ك عدد ثابت فإن

دَ (س) = صفر $\forall$ س $\in$ ح

البرهان

بإستخدام تعريف المشتقة يكون

$$\text{دَ(س)} = \text{نهـا}_{\text{هـ} \leftarrow 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د(س)}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{ك - ك}{هـ}$$

= صفراً

مثال 4:

أوجد دَ(س) ، دَ (- 3)

إذا كان د(س) = 8

الحل:

∵ د(س) = 8 دالة ثابتة ∴ دَ (س) = 0

∀ س ∈ ح ومنه : دَ (– 3) = 0

> **قاعدة (2) : إذا كانت ص = س^{ن} حيث ن عدد صحيح موجب فإن**
>
> $\frac{دص}{دس} = ن\, س^{ن-1}$

البرهان

$$∵ \quad \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{(س+\Delta س)^{ن} - س^{ن}}{\Delta س}$$

$$∴ \quad \frac{دص}{دس} = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{(س+\Delta س)^{ن} - س^{ن}}{\Delta س}$$

وحيثما Δس ⟵ 0 فإن س + Δس ⟵ س

$$∴ \quad = \lim_{س+\Delta س \to س} \frac{(س+\Delta س)^{ن} - س^{ن}}{(س+\Delta س) - س}$$

$\frac{دص}{دس} = ن\, س^{ن-1}$ **حسب قاعدة 2 ونظراً لإن ن س$^{ن-1}$ هي عدد حقيقي دائماً ، فإن**

الدالة المعطاة تكون قابلة للتفاضل ولجميع قيم س

مثال 5:

إذا كانت ص = $س^{3}$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = 3س^{2}$

مثال 6:

إذا كانت ص = $س^{-5}$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = -5س^{-6}$

مثال 7:

إذا كانت ص= $س^{4}$ + $س^{-3}$ - 11 فاوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل:

$$\frac{ءص}{ءس} = 4\ س^{3} + (-3)\ س^{-4} - 0$$

$$= 4س^{3} - 3\ س^{-4}$$

مثال 8:

إذا كانت ص= $\frac{1}{\sqrt{س}}$ فاوجد $\frac{ءص}{ءس}$ ، س

الحل:

$$ص = \frac{1}{\sqrt{س}} = \frac{1}{س^{\frac{1}{2}}}$$

$$ص = س^{-\frac{1}{2}} \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = -\frac{1}{2}\ س^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = -\frac{1}{2}\ س^{-\frac{3}{2}}$$

قاعدة (3)

إذا كانت د دالة قابلة للإشتقاق عند س ، ك ثابت فإن ك د(س) تكون أيضاً قابلة للإشتقاق ويكون

$$\frac{ء}{ءس}\ (ك\ د(س)) = ك\ دَ\ (س)$$

❖ مشتقة حاصل ضرب مقدار ثابت في دالة للمتغير س يساوي حاصل ضرب المقدار الثابت في مشتقة الدالة

مثلاً :-

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{2}{3}\text{س}^{6}\right) = \frac{2}{3}\,\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{س}^{6}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \times 6\text{س}^{5}$$

$$= 4\text{س}^{5}$$

مثال 9 :

إذا كانت ص = $6\text{س}^{3} + 2\sqrt{\text{س}}$

فاوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{دَ(س)} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(6\text{س}^{3}\right) + \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(2\sqrt{\text{س}}\right)$$

$$= 6\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{س}^{3}\right) + 2\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\sqrt{\text{س}}\right)$$

$$= 6 \times 3\text{س}^{2} + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(6\text{س}^{3} + 2\sqrt{\text{س}}\right) = 18\text{س}^{2} + \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}$$

مثال 10 :

إذا كانت ص = $\frac{1}{\text{س}} + \frac{2}{\text{س}^{2}} + \frac{3}{\text{س}^{3}}$

فاوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل :

$$\because \text{ص} = \frac{1}{\text{س}} + \frac{2}{\text{س}^{2}} + \frac{3}{\text{س}^{3}}$$

$$\therefore \text{ص} = \text{س}^{-1} + 2\text{س}^{-2} + 3\text{س}^{-3}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (-1)\,\text{س}^{-2} + (2)(-2)\,\text{س}^{-3} + (3)(-3)\,\text{س}^{-4}$$

$$= -\text{س}^{-2} - 4\text{س}^{-3} - 9\text{س}^{-4}$$

$$= -\left(\frac{1}{\text{س}^{2}} + \frac{4}{\text{س}^{3}} + \frac{9}{\text{س}^{4}}\right)$$

*** نتيجة :**

إذا كانت د دالة كثيرة الحدود ، فإن د قابلة للإشتقاق لكل س $\in$ ح

مثال 11 :

إذا كانت

د(س) = 5س^{9} - 3س^{5} + 4 س + 8 فاوجد دَ (س)

الحل :

$$\text{دَ(س)} = 5 \times 9\text{س}^{8} - (3)(5)\text{س}^{4} + 4 + 0$$

$$= 45\text{س}^{8} - 15\text{س}^{4} + 4$$

مثال 12:

إذا كانت ص = $\dfrac{(3\text{س}^{4} + \text{س}^{3} - 5\,\text{س}^{2})}{2\text{س}^{2}}$

فأوجد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :

$$\text{ص} = \frac{3\text{س}^{4}}{2\text{س}^{2}} + \frac{\text{س}^{3}}{2\text{س}^{2}} - \frac{5\text{س}^{2}}{2\text{س}^{2}}$$

$$\text{ص} = \frac{3}{2}\,\text{س}^{2} + \frac{1}{2}\,\text{س} - \frac{5}{2}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \left(\frac{3}{2}\right)(2\text{س}) + \frac{1}{2}$$

$$= 3\text{س} + \frac{1}{2}$$

مثال 13:

فاضل (2س - 3)^{2} بالنسبة إلى س

الحل :

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}(2\text{س} - 3)^{2} = \frac{\text{د}}{\text{دس}}(4\text{س}^{2} - 12\text{س} + 9)$$

$$= 8\text{س} - 12$$

تمرين 6 -جـ :

فاضل الأتي بالنسبة إلى س

أ $3 + 4\text{س} - \text{س}^2$

ب $\frac{1}{5}\text{س}^{10} - \frac{1}{\text{س}}$

جـ $\sqrt{\text{س}} - \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}$

د $(\text{س} + 1)(2\text{س} - 1)$

هـ $4\text{س}^5 - 5\text{س}^2$

و $\text{س}(\text{س}^2 + 3\text{س} - 1)$

ز $\text{س} - \frac{2}{\text{س}^2}$

ح $3\text{س}(\text{س} + 1)$

ط $(1 - 2\text{س})^2$

ى $\frac{(4\text{س}^3 - \text{س}^2)}{\text{س}^2}$

ك $2\text{س}^2 - \frac{3}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}^2}$

قاعدة 4 : مشتقة حاصل ضرب دالتين

Differentia tion multiply of two function^s

إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين قابلتين للإشتقاق وحاصل ضربهما يعرف دالة فإن :

$$\frac{d}{d\text{س}}\left(\text{د(س)}\ \text{ر(س)}\right) = \text{د(س)}\ \frac{d}{d\text{س}}\left(\text{ر(س)}\right) + \text{ر(س)}\ \frac{d}{d\text{س}}\left(\text{د(س)}\right)$$

أي أن :

$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}$ = الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

مثال 14:

إذا كانت ص = $(\text{س}^2 - \text{س})(\text{س}^2 + 4)$

فأوجد $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}$

الحل :

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = (\text{س}^2 - \text{س})(2\text{س}) + (\text{س}^2 + 4)(2\text{س} - 1)$$

$$= 2\text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 2\text{س}^3 + 8\text{س} - \text{س}^2 - 4$$

$$= 4\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 8\text{س} - 4$$

مثال 15:

اوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته :

$ص = (2س^2 + 3)(1 - س^2)$ عندما س = 1

الحل :

$\frac{ءص}{ءس} = (2س^2 + 3)(-2س) + (1 - س^2)(4س)$

$= -4س^3 - 6س + 4س - 4س^3$

$= -8س^3 - 2س$

عندما س = 1

$\therefore \left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=1} = -8(1)^3 - 2(1)$

$= -8 - 2 = -10$

$\therefore$ **ميل المماس لمنحنى الدالة عند س = 1** يساوي -10

مثال 16:

أوجد النقط الواقعة على المنحنى الذي معادلته

$ص = 2س^3 + 3س^2 - 120س + 7$ والتي يكون فيها المماس عندها موازياً لمحور السينات

الحل :

$\frac{ءص}{ءس} = 6س^2 + 6س - 120$

$\because$ **المماس // محور السينات**

$\therefore \frac{ءص}{ءس} =$ **صفراً**

$0 = 6س^2 + 6س - 120$

$0 = 6(س^2 + س - 20)$

0 = 6 (س + 5)(س - 4)

∴ س = - 5 أو س = 4

وبالتعويض في ص = 2س^3 + 3س^2 - 120 س + 7 بقيمة س = - 5 ، س = 4 ينتج أن :

ص = 432 أو ص = - 297

∴ المماس للمنحنى ص = 2س^3 + 3س^2 - 120 س + 7

يوازي محور السينات عند كل من النقطتين (- 5 ، 432) ، (4 ، - 297)

قاعدة 5 : مشتقة خارج قسمة دالتين

Differentia tion division of two function

إذا كانت كل من الدالتين د$_1$ ، د$_2$ قابلتين للتفاضل في فترة ما ن وكانت د$_2$ ≠ 0 في نفس القيمة فإن ص = $\frac{د_1}{د_2}$ تكون قابلة للتفاضل في ف يكون

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{د_2 \frac{ءد_1}{ءس} - د_1 \frac{ءد_2}{ءس}}{د_2^2}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$$

مثال 17:

إذا كانت ص = $\frac{(س + 1)}{2س - 1}$ **فاوجد** $\frac{ءص}{ءس}$

الحل :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{(2س - 1)(1) - (س + 1)(2)}{(2س - 1)^2}$$

$$= \frac{(2س - 1 - 2س - 2)}{(2س - 1)^2}$$

$$= \frac{-3}{(2س - 1)^2}$$

مثال 18:

إذا كانت ص = $\frac{\sqrt{س}}{1+\sqrt{س}}$ فاوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل :

ص = $\frac{\sqrt{س}}{1+\sqrt{س}} = \frac{س^{\frac{1}{2}}}{1+س^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{(1+\sqrt{س})(\frac{1}{2}س^{-\frac{1}{2}}) - س^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2}س^{-\frac{1}{2}}}{(1+\sqrt{س})^2}$

$= \frac{\frac{1}{2}س^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{(1+\sqrt{س})^2}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2\sqrt{س}(1+\sqrt{س})^2}$

- **المعنى الهندسي لمشتقة الدالة عند نقطة**

إذا كانت : د قابلة للإشتقاق عند نقطة $س_1$ فإن ميل المماس لمنحنى الدالة عند $س_1$ = قيمة المشتقة عند $س_1$

= دَ($س_1$)

إذا كان :

(1) دَ ($س_1$) > 0 ⟺ θ حادة

(2) دَ ($س_1$) < 0 ⟺ θ منفرجة

(3) دَ ($س_1$) = 0 ⟺ θ = 0° (المماس // محور السينات)

(4) دَ ($س_1$) = ∞ ⟺ θ = 90° (المماس / / محور الصادات)

مع ملاحظة أن دَ($س_1$) = ظا θ حيث θ هي قياس الزاوية التي يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

(5) **معادلة المماس عند ($س_1$، $ص_1$) الواقعة عليه هي :**

ص - $ص_1$ = دَ($س_1$)× (س - $س_1$)

(6) معادلة العمودي عند ($س_1$ ، $ص_1$) الواقعة عليه هي :

ص - $ص_1$ = $\frac{-1}{دَ(س_1)}$ (س - $س_1$)

مثال 19:

أوجد الإحداثيات السينية للنقط على المنحنى $ص = \frac{س}{1 - س^2}$ **التي يكون المماس عندها مائلاً على محور السينات بزاوية مقدارها 45°**

الحل:

$\because م = \frac{ءص}{ءس}\Big|_{(س،ص)} = ظا 45°$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{(1 - س^2) \times 1 - س \times - 2س}{(1 - س^2)^2}$

$= \frac{1 - س^2 + 2س^2}{(1 - س^2)^2}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{1 + س^2}{(1 - س^2)^2}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس}\Big|_{(س،ص)} = ظا 45° = 1$

$\therefore 1 = \frac{1 + س^2}{(1 - س^2)^2} \quad \therefore (1 - س^2)^2 = 1 + س^2$

$1 - 2س^2 + س^4 = 1 + س^2$

$س^4 - 3س^2 = 0$

$س^2(س^2 - 3) = 0$

أما $س^2 = 0$ ومنها $س = 0$

أو $س^2 - 3 = 0 \quad \therefore س^2 = 3$

$|س| = \sqrt{3} \quad \therefore س = \pm\sqrt{3}$

مثال 20:

أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى $ص = س^3 + 2س^2 + - 4س - 3$ عند النقطة $(2، - 5)$

الحل:

$\frac{ءص}{ءس} = 3س^2 + 4س - 4$

$د'(2) = 3(2)^2 + (4)(2) - 4$

$د'(2) = 12 + 8 - 4$

$د'(2) = 16 \quad ، \quad - \frac{1}{د'(2)} = \frac{-1}{16}$

معادلة المماس: $ص + 5 = 16(س - 2)$

$16س - ص - 37 = 0$

معادلة العمودي: $ص + 5 = \frac{-1}{16}(س - 2)$

$س + 16ص + 78 = 0$

تمرين 6 - د:

1 أوجد المعامل التفاضلي لكل مما يأتي :

أ $\frac{س}{س - 2}$

ب $(س - 2)\sqrt{1 - س^2}$

جـ $\frac{3س + 2}{\sqrt{س + 1}}$

د $\frac{(س - 1)^2}{س + 1}$

هـ $(س + 1)(س^2 + 2س)$

و $(4س^2 - 1)(7س^3 + س)$

2 **أوجد** النقط التي على المنحنى $ص = س^3 - 3س$ ويكون المماس عندها موازيا لمحور السينات.

3 أوجد قيمة ك التي تجعل المستقيم $4س - ص - ك = 0$ مماساً للمنحنى $ص = 2س^2 - س + 1$

4 إذا كانت $ص = \frac{س + 1}{1 - س^2}$ فاوجد قيمة $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = -1$

5 إذا كانت $ص = س$ فاوجد $\frac{دص}{د\sqrt{س}}$ ، $س > 0$

6 اوجد النقط التي تقع على المنحنى $ص = \frac{1}{1 - س^2}$ ، $س \neq \pm 1$ ويصنع مماس عندها زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات.

7 أوجد معادلة المماس العمودي للمنحنى $ص = س^2 - 6س + 15$ عند النقطة (4، 7)

7 التكامل

التكامل

Integration

تعتبر المشتقة والتكامل المحدود أهم موضوعين في علم التفاضل و التكامل، حيث تعالج المشتقة إيجاد ميل المماس و تعريف السرعة والتسارع ، بينما يعالج التكامل المحدود ايجاد مساحات مناطق محدودة بمنحنيات يصعب حسابها بالقوانين العادية.

❖ في نهاية هذا الفصل يكون الطالب قادراَ على أن:

❖ يتعرف مفهوم الدالة البدائية لدالة ما ويجده.

❖يستخدم قواعد التكامل غير المحدود لحساب تكاملات لدوال كثيرات حدود .

❖يصل إلى مفهوم عمليتي الإشتقاق والتكامل متعاكستان .

❖يتعرف مفهوم التكامل المحدود ويجد قيمة تكامل محدود مستخدماً قواعد التكامل .

7 - 1 الدالة البدائية Primitive Function

لتكن د(س) = 2س ، فما هي الدالة التي مشتقتها 2س ستجد أن هناك عدداً لا نهائي من الدوال التي مشتقتها 2س مثل: $س^2$ ، $س^2 + 1$ ، $س^2 - 3$ ، $س^2 + 1000$ ، ....الخ

ويمكن كتابة هذه الدوال على صورة :

م(س) = $س^2$ + جـ حيث جـ عدد ثابت ، تسمى الدالة م الدالة البدائية للدالة د أي أن م(س) المشتقة العكسية المناظرة للدالة د ⟸

م َ(س) = د(س) حيث د دالة متصلة على مجال تعريفها

مثال 1:

بين أن الدالة م التي قاعدتها م(س) = $س^3$ + 2س هي مشتقة عكسية مناظرة للدالة د

الحل :

∵ م َ(س) = $3س^2 + 2$

= د(س) دالة متصلة لأنها كثيرة الحدود

∴ م (س) دالة بدائية للدالة د

عرفنا أن الصورة العامة لمقابل المشتقة للدالة د

هي : م (س) + جـ حيث م َ(س) = د(س)

الأمر يتطلب عملية عكسية للتفاضل

$\frac{ءم}{ءس} = د(س) \Leftarrow ءم = د(س)\ ءس$

لنرمز للعملية العكسية بالرمز $\int$ أي أن

$\int د(س)\ ءس = م(س) + جـ$ **يسمى العددجـ ثابت الإختياري وعليه**

$\int م'(س)\ ءس = م(س) + جـ$

وهو مايعرف بالتكامل غير المحدود للدالة د والعدد جـ اختياري غير مقيد إلا إذا نصّت معطيات المسألة بشروط معينة تربط المتغيرات فتتعين قيمة جـ تبعاً لذلك

مثال :2

أوجد $\int 3\, س^2\ ءس$

الحل :

$\because$ $م'(س) = 3س^2 \Leftarrow م(س) = س^3 + جـ$

$\therefore$ $\int 3س^2\ ءس = س^3 + جـ$ **حيث جـ ثابت الأختياري**

مثال :3

أوجد $\int 3\ ءس$

الحل :

$\because$ $م(س) = 3س + جـ$ لأن $م'(س) = 3$

$\therefore$ $\int 3\ ءس = 3س + جـ$ **حيث جـ ثابت الأختياري**

مثال :4

أوجد $\int \frac{1}{2\sqrt{س}}\ ءس$

الحل :

$م(س) = \sqrt{س} + جـ$ لأن $م'(س) = \frac{1}{2\sqrt{س}}$

$\therefore$ $\int \frac{1}{2\sqrt{س}}\ ءس = \sqrt{س} + جـ$ **حيث جـ ثابت الأختياري**

مثال 5:

إذا كانت $\int$ د(س) ءس = $س^3$ - 2 س + 11

فأوجد د(2)

الحل:

اشتق الطرفين

$\frac{ء}{ءس}\int$ د(س) ءس = د(س)

أي أن عمليتي الأشتقاق والتكامل (متعاكستان)

$\frac{ء}{ءس}$ ($\int$ د(س) ءس) = $3س^2$ - 2

∴ د(س) = $3س^2$ - 2

د(2) = $3(2)^2$ - 2

د(2) = 10

❖ **ليكن** $م_1$(س) = $س^4$ ، $م_2$(س) = $س^4$ + 3 ، $م_3$(س) = $س^4$ - 1

دوال بدائية للدالة التي قاعدتها د(س) = $4س^3$

حيث $مَ_1$(س) = د(س)، $مَ_2$(س) = د(س) ، $مَ_3$(س) = د(س)

نلاحظ أن هناك ثلاث دوال بدائية $م_1$، $م_2$، $م_3$ **للدالة د تختلف في الحد الثابت فقط ، وأنه يمكن ايجاد دوال أخرى للدالة د لاحظ أن الفرق بين أي دالتين بدائيتين يساوي ثابتاً.**

❖ **عرفنا أن الصورة العامة لمقابل المشتقة للدالة د**

هي : م(س) + جـ حيث مَ (س) = د(س)

وأن $\int$ د(س) ءس = م(س) + جـ ....(1)

عليه فإن :

$\int$ مَ(س) ءس = م(س) + جـ

يسمى العدد الثابت جـ ثابت الأختياري

وباشتقاق الطرفين في (1) ينتج أن :

$\frac{ء}{ءس}\int$ د(س) ءس = مَ (س)

∵ مَ (س) = د(س)

∴ $\frac{ء}{ءس}$ ($\int$ د(س) ءس) = د(س)

إي أن عمليتي الأشقتاق والتكامل متعاكستان

7 - 2 عكس التفاضل

نعلم أن $ص = س^{3}$

$$\frac{ءص}{ءس} = 3س^{2}$$

بالمثل $ص = س^{4}$

$$\frac{ءص}{ءس} = 4س^{3}$$

نفرض أن لدينا $\frac{ءص}{ءس} = 3س^{2}$. كيف نوجد ص ؟

هيا نقرب المسألة بسرد بعض الدوال ومشتقاتها

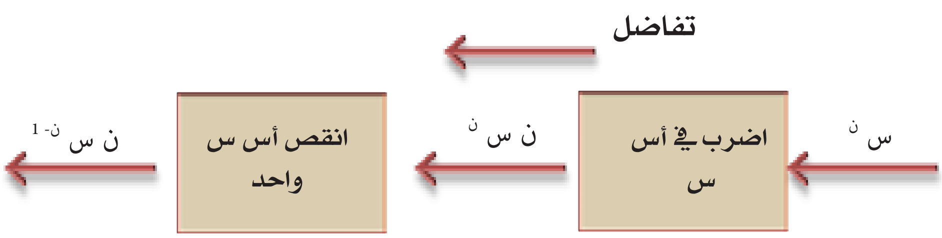
الدالة	المشتقة
$ص = 2س$	$\frac{ءص}{ءس} = 2$
$ص = س^{2}$	$\frac{ءص}{ءس} = 2س$
$ص = س^{3}$	$\frac{ءص}{ءس} = 3س^{2}$
$ص = س^{4}$	$\frac{ءص}{ءس} = 4س^{3}$
$ص = س^{ن}$	$\frac{ءص}{ءس} = ن\, س^{ن-1}$

بمقارنة العمودين نلاحظ أننا نحصل على المشتقة من الدالة.

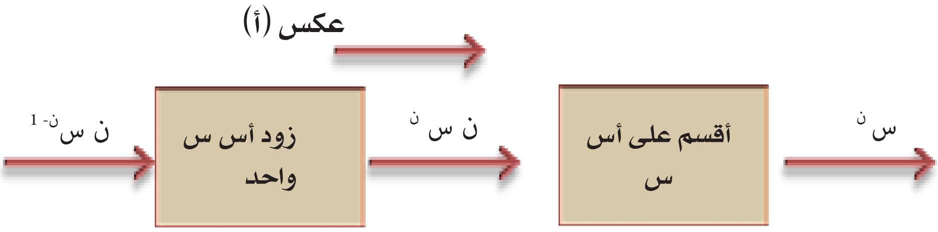
1 . نضرب الدالة بأس س .ثم .

2. أس س في حاصل الضرب ينقص 1 .

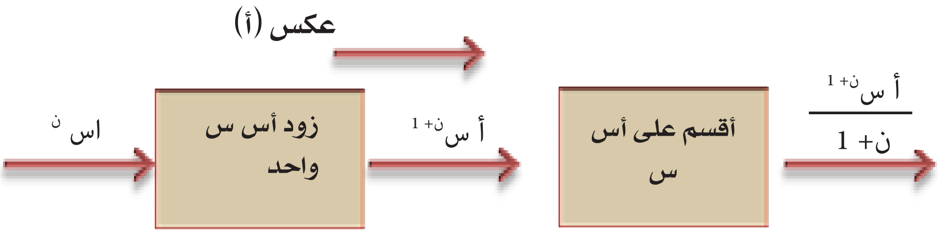
هذا واضح في الشكل الأتي



لإنشاء الخريطة عكس السابقة

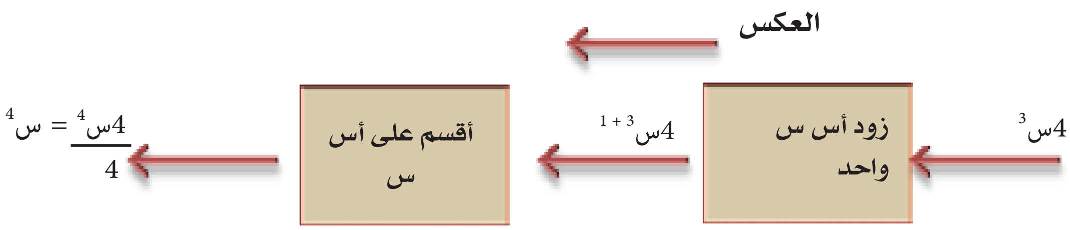


بدلاً من استخدام ن س ن-1 كمدخل للعكس نحن نستخدم الأن أ سن (ن ≠ - 1) هذه دالة أكثر عمومية



شكل 7 - 1

معكوس الخريطة أوضحت الحركة من اليسار إلى اليمين أي في الأتجاه العكسي لتأكيد العملية العكسية للتفاضل . بمجرد فهم هذا . إتجاه الخريطة يمكن أن يكون من اليمين إلى اليسار للتسهيل لذا استخدام 4س^{3} كمدخل نجد أن :



شكل 7 - 2

وبالمثل للمدخل 3س^{2} نجد أن :

$$3س^{2} \longrightarrow 3س^{2+1} \longrightarrow \frac{3س^{3}}{3} = س^{3}$$ (بحذف المستطيلات)

عموماً ليست هذه هي العملية العكسية كاملة بعد.

بفرض الدالة ص = س^{2} + 2

$\frac{ءص}{ءس} = 2س$

أيضاً إذا كان ص = س^{2} + 4

$\frac{ءص}{ءس} = 2س$

بالمثل ص = س^{2} - 3

$\frac{ءص}{ءس} = 2س$

فيما يلي مشتقات ثلاث دوال تساوي 2س . هذا يعني أنه للدوال
ص = س^2 + 2 ، ص= س^2 + 4 ، ص = س^2 - 3 ، $\frac{ءص}{ءس}$ = 2س

بالمثل 2س هو مشتقة ص= س^2 – 10 ، ص = س^2 + 8 ولمزيد من التعميم ص = س^2 + جـ حيث جـ أي ثابت . حيث جـ يسمى ثابت الإختياري . تعتمد قيمته على محموعة من القيم لكل من س، ص في الدوال المعينة .
وعلى ذلك . لكي نكمل عكس التفاضل يجب أن نضيف (ثابت إختياري) عن الخطوة النهائية .
هذه العملية العكسية تسمى التكامل. الدالة المراد تكاملها تسمى دالة مكاملة والناتج تكامل غير محدود للدالة المعلومة .

بوضع هذا في شكل خريطة نجد أن :

التكامل		التكامل		تكامل غير محدد	
اس^ن ← زد أس س بمقدار 1	← أ س$^{ن+1}$	أقسم على أس س لاحظ ن ≠ - 1	← $\frac{أ س^{ن+1}}{ن+1}$	اضف ثابت اختياري جـ	← $\frac{أ س^{ن+1}}{ن+1}$ + جـ

شكل (7 - 3)

الرمز الرياضي للتكامل هو $\int$ حيث أن التكامل المشروح هو بالنسبة إلى س
والرمز الكامل لهذا التكامل هو : $\int$ أس^ن ءس = $\frac{أ س^{ن+1}}{ن+1}$ + جـ حيث أن جـ ثابت
ن ≠ - 1

ملحوظة
ليس من الممكن أن نقسم على ن + 1 عندما ن= - 1، بمعنى آخر نقسم على صفر يعطي نتيجة غير معرفة . $\int \frac{1}{س}$ ءس سوف يعاد تعريفه فيما بعد

التكامل قابل للتطبيق لمتغيرات أخرى ذلك أن تكامل أت^4 بالنسبة إلى ت . حيث أ ثابت يعطى بالعلاقة :

$$\int أت^4 ءت = \frac{أت^5}{5} + جـ$$

نقطة مهمة هي إذا أردنا أن تكامل دالة بالنسبة لـ : س مثلاً حينئذٍ الدالة يجب أن تكون بدالالة س فقط .

بوضع ص = د(س) = $\frac{س^{ن+1}}{ن + 1}$ + جـ ، ن ≠ - 1

دَ(س) = $\frac{1}{ن + 1}$. (ن + 1) س^ن

$\frac{ء}{ءس}$ (د(س)) = س^ن بأخذ $\int$ للطرفين نحصل على

∴ $\int$ س^ن ءس = د(س)

7 - 3 قواعد التكامل غير المحدود

Rules of Indefinite Integrals

سبق أن قمت بإيجاد التكامل غير المحدود للدوال كثيرة الحدود وأعتمدت على المشتقة لإيجاد هذه التكاملات ، وهذه الطريقة تقوم على التذكير ، عليه لابد من وجود طريقة اخرى تعتمد على قواعد محددة لإيجاد التكاملات غير المحدود منها

■ **قاعدة (1)**

$\int \text{أ}\ \text{ءس} = \text{أس} + \text{جـ}$ حيث أ عدد ثابت، جـ ثابت اختياري

مثلاً $\int 6\ \text{ءس} = 6\text{س} + \text{جـ}$

، $\int \pi\ \text{ءس} = \pi\text{س} + \text{جـ}$

، $\int \dfrac{\text{ءص}}{3} = \dfrac{1}{3}\text{ص} + \text{جـ}$

■ **قاعدة (2)**

$\int \text{س}^{\text{ن}}\ \text{ءس} = \dfrac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن} + 1} + \text{جـ}$ ، $\text{ن} \neq -1$

■ **قاعدة (3)**

1) $\int \text{أ}\ \text{د(س)ءس} = \text{أ} \int \text{د(س)}\ \text{ءس}$

2) $\int (\text{د}_1\text{(س)} \pm \text{د}_2\text{(س)} \pm \ldots\ldots \pm \text{د}_{\text{ن}}\text{(س)})\ \text{ءس}$

$= \int \text{د}_1\text{(س)ءس} \pm \int \text{د}_2\text{(س)}\ \text{ءس} \pm \ldots\ldots \pm \int \text{د}_{\text{ن}}\text{(س)}\ \text{ءس}$

مثلاً :-

$\int (4\text{س}^3 - 2\text{س} + 6)\ \text{ءس} = \int 4\text{س}^3\ \text{ءس} - \int 2\text{س}\ \text{ءس} + \int 6\ \text{ءس}$

$= 4 \int \text{س}^3\ \text{ءس} - 2 \int \text{س}\ \text{ءس} + 6 \int \text{ءس}$

$= 4 \times \dfrac{\text{س}^4}{4} - \dfrac{2\text{س}^2}{2} + 6\text{س} + \text{جـ}$

$\therefore \int (4\text{س}^3 - 2\text{س} + 6)\ \text{ءس} = \text{س}^4 - \text{س}^2 + 6\text{س} + \text{جـ}$

مثال 1:

كامل كلاً مما يأتي بالنسبة إلى س :

(أ) 3س (ب) س^2

(جـ) $\text{أ س}3$ (د) 5

(هـ) 3س^{-2} (و) $\frac{1}{\text{س}^3}$

(ز) $\text{س}^{\frac{2}{5}}$ (ح) $\text{س}^{\frac{3}{4}}$

الحل :

(أ) $\int 3\text{س}\ \text{ءس} = \frac{3\text{س}^2}{2} + \text{جـ}$ ، **حيث جـ ثابت .**

(ب) $\int \text{س}^2\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^3}{3} + \text{جـ}$ ، **حيث جـ ثابت .**

(جـ) $\int \text{أس}^5\ \text{ءس} = \frac{\text{أس}^6}{6} + \text{جـ}$ ، **حيث جـ ثابت .**

(د) $\int 5\text{ءس} = \int 5\text{س}^0\ \text{ءس}$ **حيث** $(\text{س}^0 = 1)$.

$= \frac{5\text{س}^1}{1} + \text{جـ}$ ، **حيث جـ ثابت .**

$= 5\text{س} + \text{جـ}$

(ليس من الضروري أن توضح أن $5 = 5\text{س}^0$ **)**

(هـ) $\int 3\text{س}^{-2}\ \text{ءس} = 3\ \frac{\text{س}^{-2+1}}{-2+1} + \text{جـ}$ ، **حيث جـ ثابت اختياري**

$= \frac{3\text{س}^{-1}}{-1} + \text{جـ}$

$= -\frac{3}{\text{س}} + \text{جـ}$

(و) $\int \frac{1}{\text{س}^3}\ \text{ءس} = \int \text{س}^{-3}\ \text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^{-3+1}}{-3+1} + \text{جـ}$ ،

$= \frac{1}{-2\text{س}^2} + \text{جـ}$ **حيث جـ ثابت اختياري**

(ز) $\int \text{س}^{\frac{2}{5}}\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + \text{جـ}$ ، **جيث جـ ثابت اختياري**

$$\therefore \int \text{س}^{\frac{2}{5}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{5\text{س}^{\frac{7}{5}}}{7} + \text{جـ}$$

(ح) $\int \text{س}^{-\frac{3}{4}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + \text{جـ}$ ، حيث جـ عدد ثابت

$$= \frac{\text{س}^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + \text{جـ}$$

$$= 4\text{س}^{\frac{1}{4}} + \text{جـ}$$

مثال 2:

أوجد ص إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 6\text{س}^2 + 1$

الحل:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 6\text{س}^2 + 1$$

كامل بالنسبة إلى س

$$\int \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\,\text{ءس} = \int (6\text{س}^2 + 1)\,\text{ءس}$$

$\text{ص} = \frac{6\text{س}^3}{3} + \text{س} + \text{جـ}$ ، حيث جـ ثابت اختياري

$$\text{ص} = 2\text{س}^3 + \text{س} + \text{جـ}$$

مثال 3:

كامل $8\text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 5\text{س} - 2 + \frac{1}{\text{س}^2}$ **بالنسبة إلى س**

الحل:

نكامل حد بعد حد

$$\int \left(8\text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 5\text{س} - 2 + \frac{1}{\text{س}^2}\right)\text{ءس}$$

$= \frac{8\text{س}^4}{4} - \frac{2\text{س}^3}{3} + \frac{5\text{س}^2}{2} - 2\text{س} + \frac{\text{س}^{-1}}{-1} + \text{جـ}$ ، **حيث جـ ثابت اختياري**

$= 2\text{س}^4 - \frac{2}{3}\text{س}^3 + \frac{5\text{س}^2}{2} - 2\text{س} - \frac{1}{\text{س}} + \text{جـ}$ ، **حيث جـ ثابت اختياري**

مثال 4:

كامل $\dfrac{3س^5 - 2س^3 + 11}{س^2}$ بالنسبة إلى س

الحل:

بالقسمة : $\dfrac{3س^5 - 2س^3 + 11}{س^2} = 3س^3 - 2س + \dfrac{11}{س^2}$

ثم بإجراء تكامل حد بعد حد

$$\int \dfrac{3س^5 - 2س^3 + 11}{س^2}\, ءس$$

$$= \dfrac{3س^4}{4} - \dfrac{2س^2}{2} + \dfrac{11س^{-2+1}}{-2+1} + جـ$$ (حيث جـ ثابت اختياري)

$$= \dfrac{3}{4}س^4 - س^2 - \dfrac{11}{س} + جـ$$

ملحوظة:
في الحالة التي يكون فيها المقدار الجبري على شكل خارج قسمة كما سيق يجب إجراء القسمة قبل إجراء التكامل

مثال 5:

أوجد تكامل $(ع^2 + 1)(ع - 3)$ بالنسبة إلى ع

الحل:

$$(ع^2 + 1)(ع - 3) = ع^3 - 3ع^2 + ع - 3$$

$$\int (ع^3 - 3ع^2 + ع - 3)\, ءع$$

$$= \dfrac{ع^4}{4} - ع^3 + \dfrac{ع^2}{2} - 3ع + جـ$$ (حيث جـ ثابت اختياري)

تمرين 7 - أ :

أوجد تكامل كل من الأتي بالنسبة إلى س

أ $3س$ ب $س^2$ جـ $\dfrac{1}{\sqrt{س}}$

د $\sqrt[3]{س}$ هـ $6س^5$ و $\dfrac{س^3\sqrt{س}}{س}$

ز $\sqrt{\text{س}}$ ل $\text{س}^2 + \text{س} - 5$ م $(\text{س} + 1)^2$

ن $2\text{س}^2 - \frac{1}{\text{س}^2}$ س $(1 - 3\text{س})(2 + \text{س})$

2 احسب كل من التكاملات غير المحدودة الآتية

$\int \frac{2\text{س}^3 + \text{س}^2}{\text{س}^2}\, \text{ءس}$

ب $\int (1 - \text{س}^2 + 5\text{س}^4)\, \text{ءس}$

جـ $\int \frac{2\text{ت}^2 - \text{ت} - 1}{\text{ت} - 1}\, \text{ءت}$

د $\int \frac{1}{\sqrt{\text{ت}}}\, \text{ءت}$

هـ $\int \frac{\text{س}^2 + \text{س} + 1}{\sqrt{\text{س}}}\, \text{ءس}$

و $\int \frac{5\text{س}^4 + 6\text{س}^2 - 1}{3}\, \text{ءس}$

ز $\int (\text{ز} + \text{أ ت})\, \text{ءت}$ حيث أ ، ز ثابتان

ح $\int 5\,(\text{س}^2 - \frac{2}{\text{س}^2})\, \text{ءس}$

ل $\int (\text{س}^2 + \frac{1}{\text{س}})^2\, \text{ءس}$

ي $\int \frac{3}{5}(\text{س} + 3)(\text{س} + 1)\, \text{ءس}$

7 - 4 تحديد قيمة الثابت الإختياري

قيمة الثابت الإختياري في التكامل يمكن إيجاده إذا علمت مجموعة من القيم المتناظرة للمتغيرين . بعد تكامل الدالة . عوض عن القيم المعلومة ومن ثم احسب الحد الثابت .

مثال 6:

إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س} - 3$ ، ص = 3 عندما س = 2 فأوجد ص بدلالة س

الحل :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س} - 3$$

$$\int \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\, \text{ءس} = \int (2\text{س} - 3)\, \text{ءس}$$

$\text{ص} = \text{س}^2 - 3\text{س} + \text{جـ}$ (حيث جـ ثابت اختياري)

ولكن ص = 3 عندما س = 2

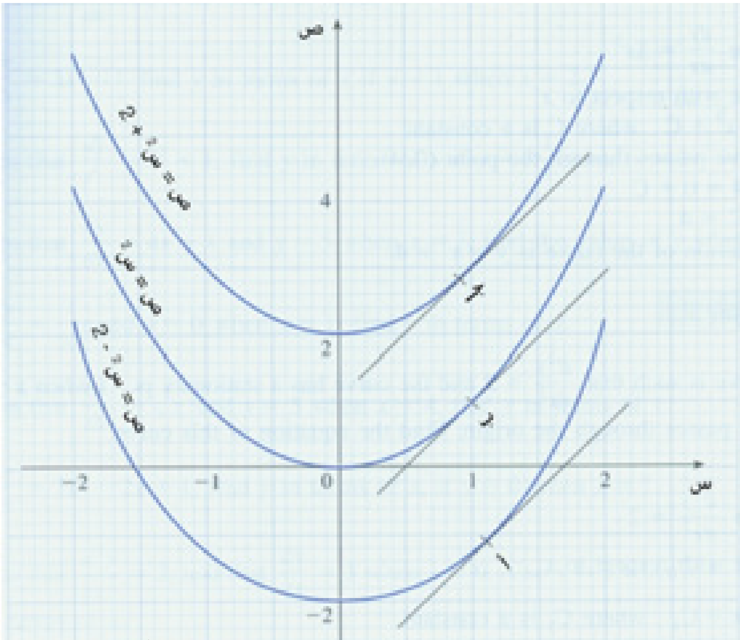
$\Longleftarrow 3 = 2^2 - 3(2) + \text{جـ}$

$\Longleftarrow \text{جـ} = 5$

$\therefore \text{ص} = \text{س}^2 - 3\text{س} + 5$

7 - 5 التفسير الهندسي

$\frac{ءص}{ءس} = 2س$ يمكن أن يعني أيضاً أن دالة الميل لمنحنى هي 2س . إذن ماهي معادلة المنحنى ؟ .



شكل 7 - 4

لذينا $\frac{ءص}{ءس} = 2س$ كامل بالنسبة إلى س

ص = $س^2$+جـ حيث جـ ثابت

بالتعويض عن جـ بالقيم - 2 ، 0 ، 2 نجد أن ص = $س^2$ - 2 ، ص = $س^2$ ، ص = $س^2$ + 2 على الترتيب

هذه دوال تربيعة وأشكالها البيانية موضحة في شكل(7 - 4) الثابت جـ يمكن أن يأخذ أي قيمة حقيقية . في هذه الحالة الدالة ص = $س^2$+جـ سوف تكون المعادلة العامة لعائلة المنحنيات المتطابقة والمزاحة رأسياً في المستوى الكارتيزي أحد عناصر هذه العائلة من المنحنيات يمكن تعيينه إذا علمنا نقطة على المنحنى . قيمة جـ يمكن حينئذٍ أن تحسب ويمكن إيجادمعادلة المنحنى .

لاحظ أن في شكل (7 - 4) عندما س = 1 ،فإن ميل كل من المنحنيات يساوي 2 . هذا واضح من المماسات المتوازية للمنحنيات عند أ ، ب ، جـ

الثابت الإختياري للتكامل يتضح هندسياً هنا هو العنصر الذي يميز عناصر عائلة المنحنيات .

مثال 7:

منحنى يمر بالنقطة (0، 4) و دالة ميل $\frac{ءص}{ءس} = 3س^2$. أوجد معادلة المنحنى

الحل :

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3\text{س}^2$.

نكامل بالنسبة إلى س

ص = س^3 + جـ (حيث جـ ثابت)

المنحنى يمر بالنقطة (0،4)

4 = 0 +جـ

جـ = 4

معادلة المنحنى هي ص = $\text{س}^3 + 4$

تمرين 7 - ب:

1 إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3\text{س} - 2$. فأوجد ص بدلالة س إذا كانت ص = 1 عندما س = 2.

2 إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^2 + 1$. فأوجد ص بدلالة س إذا كانت ص = $2\frac{1}{3}$ عندما س = 1.

3 إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}^2}$ ، ص = 0 عندما س = 1 . فأوجد قيمة ص بدلالة س .

4 إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt{\text{س}}$ ، ص = 5 عندما س = 4. فأوجد قيمة ص بدلالة س .

5 إذا علم أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4\text{س}^3 - 6\text{س}^2 + 1$ ، ص = 8 عندما س = 2 . فأوجد قيمة ص بدلالة س .

الخواص الخطية

- **خاصية (1)**

1) $\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{ك د(س) ءس} = \text{ك} \int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس}$

2) $\int_{\text{م}}^{\text{ب}} [\text{د}_1(\text{س}) \pm \text{د}_2(\text{س})]\, \text{ءس} = \int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{د}_1(\text{س})\, \text{ءس} \pm \int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{د}_2(\text{س})\, \text{ءس}$

- **خاصية (2) خاصية الإضافة**

إذا كانت د(س) قابلة للتكامل على فترة تنتمي إليها الأعداد م، ب ، جـ فإن

$\int_{\text{م}}^{\text{جـ}} \text{د(س) ءس} = \int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{د(س) ءس}$

خاصية (3)

إذا كانت د(س) قابلة للتكامل على [ٲ،ب] فإن :

1) $\int_{ٲ}^{ٲ}$ د(س) ءس = صفراً

2) $\int_{ٲ}^{ب}$ د(س) ءس = - $\int_{ب}^{ٲ}$ د(س) ءس

مثال 8:

أوجد $\int_{5}^{5} (3س^2 - 7)$ ءس

الحل :

$\int_{5}^{5} (3س^2 - 7)$ ءس = 0 حسب الخاصية رقم (3) ، 1.

مثال 9:

إذا كان $\int_{1}^{3}$ د(س) ءس = 8 فأوجد $\int_{3}^{1} 5$ د(س) ءس

الحل :

$\int_{3}^{1} 5$ د(س) ءس = 5 $\int_{3}^{1}$ د(س) ءس = (5)(- 1) $\int_{1}^{3}$ د(س) ءس

= (- 5) (8)

= - 40

7 - 6 النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

F undemented theorem of Calculus

فيما سبق عرفنا بأن عمليتي الإشتقاق والتكامل متعاكستان

أي أن $\int$ د(س) ءس = م (س) + جـ حيث د(س) = م َ (س)

هذه النظرية تربط بين مفهوم التفاضل ومفهوم التكامل وتنص النظرية

إذا كانت د= { (س، ص) : ص = د(س) ، س ∋ ف } متصلة في الفترة [ٲ ، ب] فإن :

$\int_{أ}^{ب}$ د(س)ءس = م(ب) – م(أ) حيث

م(س) هي أي مشتقة عكسية للمناظر د(س) ، مَ(س) =د(س)

ملحوظة: المقدار م(ب) – م(أ) يكتب عادة على الصورة

م(س) $\Big|_{أ}^{ب}$ ويقراء قيمة م(س) بين س = أ ، س = ب

فمثلاً $\int_{2}^{5}$ 3 س^2 ءس ، مَ(س) = 3س^2 ⟸ م(س) = س^3

$\int_{2}^{5}$ 3س^2 ءس = س^3 $\Big|_{2}^{5}$ = 5^3 - 2^3

= 125 - 8

= 117

قاعدة : $\int_{أ}^{ب}$ ك ءس = ك (ب – أ) حيث ك عدد حقيقي

مثال 10 :

إذا كانت $\int_{1}^{أ}$ 8 ءس = 32 فأوجد قيمة أ

الحل :

$\int_{1}^{أ}$ 8 ءس = 3 ∴ 8 (أ - 1) = 32

∴ أ - 1 = 4 ⟸ أ = 5

مثال 11:

أوجد $\int_{4}^{9} \frac{1}{2}$ س$^{-\frac{1}{2}}$ ءس

الحل :

$\int_{4}^{9} \frac{1}{2}$ س$^{-\frac{1}{2}}$ ءس = $\frac{1}{2} \int_{4}^{9}$ س$^{-\frac{1}{2}}$ ءس

= $\frac{1}{2}$. 2 س$^{\frac{1}{2}}$ $\Big|_{4}^{9}$

= $\sqrt{9}$ - $\sqrt{4}$

= 3 - 2

= 1

مثال 12:

احسب (أ) $\int_{0}^{2} (3\text{س}^{2} + \text{س} - 1)\, \text{ءس}$ (ب) $\int_{1}^{3} (\frac{1}{3}\text{س} - 5)\, \text{ءس}$

(جـ) $\int_{-1}^{0} (6\text{س}^{2} + \text{س} - 2)\, \text{ءس}$ (د) $\int_{-3}^{-1} (\text{س}^{4} + 1)\, \text{ءس}$

الحل:

(أ) $\int_{0}^{2} (3\text{س}^{2} + \text{س} - 1)\, \text{ءس} = \left[\text{س}^{3} + \frac{\text{س}^{2}}{2} - \text{س}\right]_{0}^{2}$

$= (8 + 2 - 2) - 0$

$= 8$

(ب) $\int_{1}^{3} (\frac{1}{3}\text{س} - 5)\, \text{ءس} = \left[\frac{\text{س}^{2}}{6} - 5\text{س}\right]_{1}^{3}$

$= (\frac{9}{6} - 15) - (\frac{1}{6} - 5)$

$= -8\frac{2}{3}$

(جـ) $\int_{-1}^{0} (6\text{س}^{2} + \text{س} - 2)\, \text{ءس} = \left[2\text{س}^{3} + \frac{\text{س}^{2}}{2} - 2\text{س}\right]_{-1}^{0}$

$= (0) - (-2 + \frac{1}{2} + 2)$

$= -\frac{1}{2}$

(د) $\int_{-3}^{-1} (\text{س}^{4} + 1)\, \text{ءس} = \left[\frac{\text{س}^{5}}{5} + \text{س}\right]_{-3}^{-1}$

$= (-\frac{1}{5} - 1) - (-\frac{243}{5} - 3)$

$= (-\frac{6}{5}) - (-\frac{258}{5})$

$= \frac{252}{5}$

$= 50\frac{2}{5}$

مثال 13:

احسب $\int_{-1}^{2} (2\text{س}^3 + 1)\, \text{ءس}$

الحل:

$$\int_{-1}^{2} (2\text{س}^3 + 1)\, \text{ءس} = \left[\frac{2\text{س}^4}{4} + \text{س} \right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^4}{2} + \text{س} \right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{16}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= 10 + \frac{1}{2}$$

$$= 10\frac{1}{2}$$

مثال 14:

ليكن $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^2 & 0 \leqslant \text{س} \leqslant 2 \\ \text{س} + 3 & 2 < \text{س} \leqslant 6 \end{cases}$

أوجد $\int_{0}^{6} \text{د(س)}\, \text{ءس}$

الحل:

$$\int_{0}^{6} \text{د(س)}\, \text{ءس} = \int_{0}^{2} \text{د(س)}\, \text{ءس} + \int_{2}^{6} \text{د(س)}\, \text{ءس}$$

باستخدام خاصية رقم (2) الإضافة

$$= \int_{0}^{2} \text{س}^2\, \text{ءس} + \int_{2}^{6} (\text{س} + 3)\, \text{ءس}$$

$$= \left. \frac{\text{س}^3}{3} \right|_{0}^{2} + \left. \left(\frac{\text{س}^2}{2} + 3\text{س} \right) \right|_{2}^{6}$$

$$= 30\frac{2}{3}$$

مثال 15:

إذا كان ميل المنحنى $3س^2 - 4$. وأن المنحنى يمر بالنقطة (- 1، 6) . أوجد معادلة المنحنى .

الحل :

$$\frac{ءص}{ءس} = 3س^2 - 4$$

$$ص = \int (3س^2 - 4)\ ءس = \frac{3س^3}{3} - 4س + جـ$$

وحيث أن المنحنى يمر بالنقطة (- 1 ، 6) .

$6 = (-1)^3 - 4(-1) + جـ$

$6 = -1 + 4 + جـ$

$جـ = 6 - 3 = 3$

إذن معادلة المنحنى هي : $ص = س^3 - 4س + 3$

مثال 16:

إذا كان $\int_1^2 2د(س)\ ءس = 10$ فأوجد $\int_1^2 (د(س) + 6)\ ءس$

الحل :

$$\int_1^2 2\ د(س) = 10 \quad \therefore \int_1^2 د(س)\ ءس = 5$$

$$\therefore \int_1^2 (د(س) + 6)\ ءس = \int_1^2 د(س)\ ءس + \int_1^2 6\ ءس$$

$$= 5 + 6\ (2 - 1)$$

$$= 11$$

تمرين 7 - جـ :

1 احسب التكاملات المحدودة الأتية

أ) $\int_{0}^{2} 2\text{س}\ \text{ءس}$

ب) $\int_{-1}^{0} \text{س}^{2}\ \text{ءس}$

جـ) $\int_{1}^{2} \frac{1}{\text{س}^{2}}\ \text{ءس}$

هـ) $\int_{1}^{3} (\text{س} + 1)(\text{س} - 1)\ \text{ءس}$

د) $\int_{1}^{16} \sqrt{\text{س}}\ \text{ءس}$

و) $\int_{0}^{1} \text{س}^{\frac{2}{3}}\ \text{ءس}$

ز) $\int_{1}^{4} \sqrt{\text{س}}\ \text{ءس}$

ك) $\int_{-1}^{2} (\text{س}^{2} - \text{س} - 2)\ \text{ءس}$

س) $\int_{1}^{3} \frac{3\text{س}^{4} + 1}{\text{س}^{2}}$

ن) $\int_{4}^{9} \frac{\text{س} + 1}{\sqrt{\text{س}}}$

ع) $\int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{2}\text{س}^{2} + 5\right)\ \text{ءس}$

- إذا كان $\int_{0}^{2} (\text{د(س)} - 2\text{س})\ \text{ءس} = 20$ فأوجد $\int_{0}^{2} 3\ \text{د(س)}\ \text{ءس}$

8

المتتابعات و المتسلسلات

المتتابعات والمتسلسلات

Series and Sequencs

المتتابعات والمتسلسلات من المواضع الأساسية في الرياضيات فداكرة الكمومبيوتر عبارة عن متتابعة هندسية 2 ، 4 ، 8 ، 16 ، 32 ،..........كما أن متسلسة تايلور (Taylorseries) أدت دوراً مهماً ، تطوير حساب التفاضل والتكامل وكذلك متسلسة فورية (Fourier series) والتي تستخدم لدراسة الموجات كما أنها استخدمت في حساب الدوال المثلثية واللوغاريتمات في الحاسبات وحساب بعض التوابث المهمة مثل π النسبة التقريبية ، هـ أساس اللوغاريتم الطبيعي.

❖ أشهر صفعة في التاريخ :

هذه القصة حدثت في احد القرون الوسطى تقريباً في القرن السادس عشر في احدى القرى الألمانية كان هناك طفل يدعى جاوس (Gauuss) كان جاوس طالباً ذكياً وكلما سأل مدرس الرياضيات سؤالاً كان جاوس هو السباق للإجابة فيحرم بذلك زملائه في الصف ويمنع فرصة التفكير في الإجابة ، وفي احدي المرات سأل المعلم سؤالاً صعباً فأجاب عليه جاوس وبشكل سريع مما اغضب المدرس فأعطاه المدرس مسألة حسابيه قال أوجد لي ناتج جميع الأعداد من 1 إلى 100 طبعاً حتى يلهيه عن الدرس وتفسح المجال للأخرين .

بعد 5 دقائق قال جاوس وبصوت منفعل 5050 فصفعه المدرس صفعة قوية وقال له هل تمزح ؟ أين حساباتك ؟ فقال جاوس :

اكتشفت أن هناك علاقة بي 99 ، 1 ومجموعهما 100 ، 98 ، 2 مجموعهما 100 ، 97 ، 3 ومجموعهما 100 وهكذا إلى أن وصل إلى 51 ، 49 واكتشفت أنني حصلت على 50 زوجاً من الأعداد وبذلك الفت قانوناً عاماً وهو $\frac{ن}{2}$ (ن + 1) حيث في هذه المسألة ن = 100 فاندهش المدرس من هذه العبقرية ولم يعلم أنه صفع العالم الكبير «فريدريك جاوس» " Frederick Gauss " أحد اشهر ثلاثة علماء في الرياضيات

في نهاية هذا الفصل سوف يكون الطالب قادراً على :

❖ التعرف على المتتابعات والمتسلسلات .

❖ التعرف على المتتابعات الحسابية و الهندسية

❖ إيجاد الحد العام للمتتابعات الحسابية والهندسية

❖ إيجاد المتوسطات الحسابية

❖ إيجاد مجموع عدد معين من حدود متتابعة حسابية ومتتابعة هندسية .

❖ فهم المتتابعات الهندسية اللانهائية .

❖ إيجاد مجموع حدود المتتابعة الهندسية التنازلية اللانهائية .

❖ إيجادقيمة الكسر الدائري على صورة كسر اعتيادي باستخدام المتتابعات الهندسية اللانهائية .

8 - 1 معنى المتتابعات :

لقد درست العلاقات والدوال ومن بينها دوال نطاقها مجموعة جزئية من الأعداد الطبيعية.

ط= { 1 ، 2 ، 3 ، .... ، ن ، ....}

مثلاً : بالنظر إلى :

1. 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، ....
2. 3 ، 5 ، 7 ، 9 ، ....
3. 4 ، 4 ، 4 ، 4 ، ....
4. 1^2 ، 2^2 ، 3^2 ، 4^2 ، ....
5. 2 ، 0 ، 2 ، 0 ، ....

متتابعات يمكن تحديد الجملة التي تعّرف الحد الذي رتبته (ن) لأي عدد طبيعي ن ويسمى بالحد العام ويرمز له بالرمز $أ_ن$.

الحد الثاني في المتتابعة (1) هو $أ_2 = 2$

، الحد الخامس في المتتابعة (2)هو $أ_5 = 11$

،، الحد الحادي عشر في المتتابعة (3)هو $أ_{11} = 4$

،، الحد الرابع في المتتابعة (4)هو $أ_4 = 4^2$

و الحد الثالث في المتتابعة (5)هو $أ_3 = 2$

والمتتابعة السابقة يمكن كتابتها على النحو التالي

م	المتتابعة	معادلة الدالة المعّرفة لها
1	1 ، 2 ، 3 ، 4،	د(ن) = ن ، ن ∈ ط
2	3 ، 5 ، 7 ، 9	د(ن) = 2ن + 1 ، ن ∈ ط
3	4 ، 4 ، 4 ، 4	د(ن) = 4ن⁰ ، ن ∈ ط
4	1^2 ، 2^2 ، 3^2 ، 4^2	د(ن) = $ن^2$ ، ن ∈ ط
5	0 ، 2 ، 0 ، 2	د(ن) = 1 + $(-1)^ن$ ، ن ∈ ط

تعريف 1: المتتابعة هي مجموعة من العناصر المتتابعة مأخوذة بترتيب محدد مكونة قائمة معرّفة تعريفاً كاملاً ويسمى كل عنصر بحد المتتابعة .

ملحوظة 1:
المتتابعة هي دالة نطاقها مجموعة من الأعداد الطبيعية ، ومدى الدالة هي حدود المتتابعة

ونود الإشارة هنا عندما تكون دالة المتتابعة نطاقها مجموعة منتهية من الإعداد الطبيعة تسمى بالمتتابعة المنتهية ، وذلك لأن عدد حدودها منته . كما يمكن أن يكون نطاق دالة المتتابعة مجموعة لا نهائية من الأعداد الطبيعية (ط) وتكون في هذه الحالة المتتابعة لا نهائية وذلك لأحتوائها على عدد لا نهائي من الحدود.

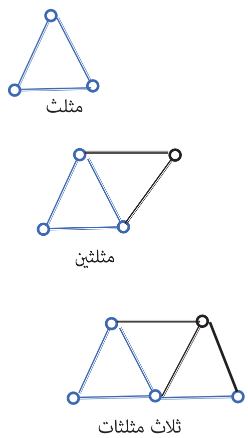
تعريف 2: المتسلسلة
إذا إستبدلنا العلامة (،) في المتتابعة بالعلامة (+) فإن التعبير الرياضي الذي نحصل عليه يسمى «المتسلسلة »

8 - 1 - 1 متتابعات الأعداد Number Sequence

توضع بعض الأعداد على شكل متتابعات عددية ، ندرس في المتتابعة العددية كيفية إكمال النمط العددي .

أنشطة

في نهاية هذا النشاط ، سوف يستطيع الطلبة استنتاج النمط العددي بطرق مثل« تكوين شكل ، والجدولة المنظمة ، والبحث عن النمط » .



1 - فيما يلي نشاط بإستخدام أعواد الثقاب لبناء واكمال الأنماط العددية
نفرض أن لدينا الأنماط المبينة في الأشكال جهة اليمين
(أ) احسب عدد أعواد الثقاب في كل شكل
(ب) كون الشكلين التاليين لهذه الأشكال
(جـ) أوجد عدد أعواد الثقاب للشكلين الرابع والخامس

(د) اذكر عدد أعواد الثقاب المطلوب اضافتها

(i) للشكل الثالث لتكوين الشكل الرابع

(ii) للشكل الرابع لتكوين الشكل الخامس

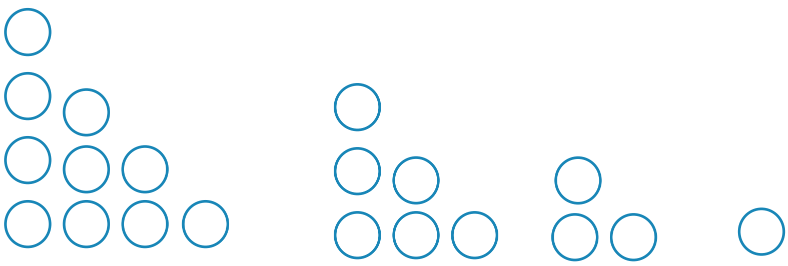
(هـ) انقل ثم اكمل الجدول الأتي :

عدد المثلثات	1	2	3	4	5
عدد أعواد اثقاب	3	5			

(و)اذكر نوع الأعداد الممثلة بعدد أعواد الثقاب

(ز) اذكر عدد أعواد الثقاب للشكل الذي يحتوي 10 مثلثات بدون رسم الشكل

2 - النشاط الأتي عن «المثلثات العددية» سبب هذه التسمية واضح من الشكل الأتي:



(أ) أحسب عدد الخرزات في كل شكل

(ب) أرسم الشكليين التاليين لهذه الأشكال .

(جـ) اذكر عدد الخرزات اللازم إضافتها إلى .

(i) الشكل الرابع لتكوين الشكل الخامس .

(ii) الشكل الخامس لتكوين الشكل السادس .

(د) انقل ثم أكمل الجدول الأتي :

الشكل	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس
عدد الخرزات	1	3				

(هـ) أوجد بدون رسم آخر عدد الخرزات في الشكل العاشر .

3 - النماذج التالية هي أنماط تؤدي إلى إكتشاف «الأعداد المربعة».

كون جدولاً يؤدي إلى إكتشاف عدد الخرزات في الشكل العاشر

يعرف عدد الخرزات في الشكل العاشر بالحد العاشر في المتتابعة العددية فمثلاً : الحد الثالث في مجموعة الأعداد الزوجية

(التي هي أيضاً متتابعة أعدد) 2 ، 4 ،6 ،8.................. هو 6

تمرين 8 - أ :

1 - أذكر الحد الخامس في متتابعات الأعداد الأتية :

أ 1 ،3 ، 5 ، 7 ، 9 ، 11 ، 13،...........

ب 5 ، 10 ، 15 ، 20 ، 25 ، 30 ....

جـ 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، ....

د - 6، - 4، - 2، 0 ، 2 ،4..................

هـ 1 ، 2 ، 3 ، 6 ، ....

2 أكمل كلاً من أنماط الأعداد بإيجاد العدد التالي .

اذكر بكلمات من عندك ماهي قاعدة النمط التي تراها .

أ 3 ، 5 ، 7 ، 9 ....

قاعدة النمط ، اضف 2 للحصول على العدد التالي.

ب 19 ، 16 ، 13 ، 10 ،...............

جـ 5 ، 20 ، 80 ، 230 ، ....

د 160، 80 ، 40 ، 20 ، 10 ،................

هـ 1 ، 3 ، 6 ، 10 ، ....

و 1 ،4 ، 9، 16..............................

ز 1 ، 8 ، 27 ، 64 ، ....

ح 60 ، 140 ، 240 ، 360 ، ....

ط 2 ، 8 ، 18، 32 ،50 ....

ى 1، 1، 2 ، 3 ، 5 ، 8 ،13 ....

(ملحوظة الأعداد في (ى) تعرف بإعداد فيبو ناتشي)

3 انقل ثم أكمل

أ 7 ، 4، 1 ، - 2 ، .... ، - 8 ، - 11.

ب - 2 ، 4، - 8، 16.................... - 128

جـ 2 ، 5 ، 10، 37

د ....37، 50، 101

هـ 1 ، 1، 1 ، 3، 5 ، 9، .... 31، 57

و 1 ،2، 6، 15، .... 92، 141

ز 3 ، 5، 8 ، 13 ، .... 31 ، 44

ح 3 ،9 ، 27 ، .... 243 ، 729

ط 1 ، 8 ، 27 ، .... 125 ، 216

8 - 2 المتتابعات الحسابية

مثال تمهيدي:

اشترى أحمد حصالة نقود وكان معه آن ذاك 3 دنانير فوضع نقوده فيها وأخذ يوفر كل شهر 5 دنانير في الحصالة ، فيكون نقوده في الشهور العشرة الأولى :

3 ، 8 ، 13 ، 18 ، 23 ، 28 ، 33 ، 38 ، 43 ، 48

نلاحظ أن الحد الأول $\text{أ}_1 = 3$ ، **الحد الثاني** $\text{أ}_2 = 8$، **الحد الثالث** $\text{أ}_3 = 13$........

فيكون : $\text{أ}_2 = \text{أ}_1 + (2 - 1) \times 5 = 3 + 5 = 8$

$$\text{أ}_3 = \text{أ}_1 + (3 - 1) \times 5 = 3 + 10 = 13$$

$$\text{أ}_4 = \text{أ}_1 + (4 - 1) \times 5 = 3 + 15 = 18$$

$$\vdots$$

$$\text{أ}_{10} = \text{أ}_1 + (10 - 1) \times 5 = 3 + 15 = 48$$

8 - 2 - 1 المتتابعة الحسابية

هي متتابعة يكون الفرق بين أي حد من حدود ها والحد السابق له مباشرة ثابتاً دائماً .

هذا الفرق يسمى (اساس المتتابعة) ويرمز له بالرمز د

$\text{أ}_1 ، \text{أ}_2 ، \text{أ}_3 ،$ .... $\text{أ}_\text{ن}$ **هي حدود متتالية حسابية منتهية فيكون :**

$$\text{أ}_2 - \text{أ}_1 = \text{أ}_3 - \text{أ}_2 = \ldots\ldots = \text{أ}_\text{ن} - \text{أ}_{\text{ن}-1} = \text{د}$$

نود الإشارة هنا بأن المتتابعة الحسابية المنتهية أو غير المنتهية تسمى متتابعة حسابية إذا وجدنا عدداً ثابتاً بحيث يكون طرح أي حد لاحقاً من الحد الذي يسبقه يساوي مقداراً ثابتاً ، أي

$\text{أ}_{\text{ن}+1} - \text{أ}_\text{ن} = \text{د}$ **لجميع قيم** ن **ويسمى د الفرق الثابت (أساس المتتابعة)**

مما تقدم نصل إلى الأتي : -

$$\text{أ}_2 - \text{أ}_1 = \text{د} \Longleftarrow \text{أ}_2 = \text{أ}_1 + \text{د} \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\text{أ}_3 - \text{أ}_2 = \text{د} \Longleftarrow \text{أ}_3 = \text{أ}_2 + \text{د} = \text{أ}_1 + \text{د} + \text{د}$$

$$\text{أ}_3 = \text{أ}_1 + 2\text{د} \quad \ldots\ldots(2)$$

$$\text{أ}_4 - \text{أ}_3 = \text{د} \Longleftarrow \text{أ}_4 = \text{أ}_3 + \text{د} = \text{أ}_1 + 2\text{د} + \text{د}$$

$$\text{أ}_4 = \text{أ}_1 + 3\text{د} \quad \ldots\ldots(3)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\text{أ}_\text{ن} = \text{أ}_1 + (\text{ن} - 1)\,\text{د} \quad \ldots\ldots(4)$$

القانون (4) يسمى الحد النوني بمعلومية الحد الأول وأساس المتتابعة أو الحد العام

8 - 2 - 2 الحد العام في المتتابعة

General Term of a Sequence

في دراسة تتابع الأعداد ، نتعلم إزاحة النقاب عن كيفية تنامي المتتابعات . ثم نقوم بالتعميم حول تتابع متتابعة عن طريق صياغة حدها العام في صورة جبرية .

نشاط

مهارات التفكير الإستقراء

سوف يستطيع الطلاب في نهاية النشاط استخدام استراتيجيات «عمل رسوم إيضاحية ، والتقويم المنظم ، والبحث عن النماذج »للحصول على الحد العام في المتتابعة العددية ، وذلك عن طريق الإستقراء

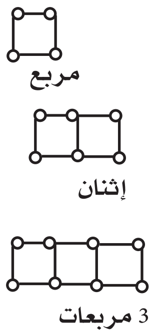
فيما يلي نشاط استخدم فيه أعواد الثقاب أو (أعواد تخليل الأسنان)لبناء وايجاد مفكوك نموذج عددي .

للنماذج المعطاة والموجودة في الأشكال الموضحة على اليمين .

(أ) احسب عدد أعواد الثقاب في كل شكل

(ب) ارسم الشكلين التاليين .

(جـ) أوجد كم عود ثقاب سوف تحتاجه في الشكلين الرابع والخامس



ملاحظة :
عدد أعواد الثقاب في الشكل الرابع يعرف بإسم الحد الرابع ، وعدد أعواد الثقاب في الشكل الخامس يعرف بإسم الحد الخامس

(د) حدد أعواد الثقاب المطلوب إضافتها إلى :

(i) الحد الثالث للجصول على الحد الرابع .

(ii) الحد الرابع للحصول على الحد الخامس.

(ح) انقل الجدول الأتي ثم أكمله

الحد	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس
عدد أعواد الثقاب	4	7			

(ف) حدد عدد أعواد الثقاب في الحد العاشر من دون رسم شكل المربعات العشرة .

(ق) حدد عدد أعواد الثقاب في الحد (النوني) بدلالة ن في أبسط صورة (قد يساعدك الجدول التالي .

الحد	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	النوني
عدد أعواد الثقاب	4	4 +3	4 + 2×(3)	4 + 3 ×(3)	4 + 4 ×(3)	؟

مثال 1:

إذا كانت الحددود الأربعة الأولى من متتابعة 1، 3 ، 5 ، 7 اكتب

(أ) الحد الخامس
(ب) الحد العاشر
(جـ) الحد النوني بدلالة ن
(د) الحد الذي يساوي (55)

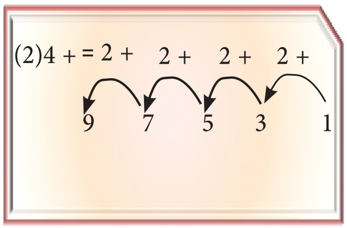
الحل :

(أ) **الحد الخامس** = 7 + 2 = 9   أو الحد الخامس = 1 + 4 (2) = 1 + 8 = 9

(ب) الحد العاشر = 1 + 9 (2) = 1 + 18 = 19   ($أ_{10}$ = $أ_{1}$ + 9 د)

(جـ) الحد النوني = 1 + 2 (ن-1) = 1 + 2ن - 2

= 2ن - 1



(د) 2ن - 1 = 55

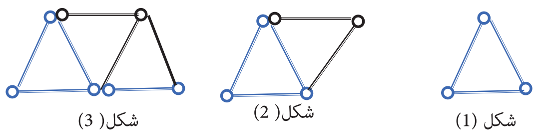
2ن = 56

ن = 28

∴ 55 **هو الحد الثامن والعشرين**

تمرين 8 – ب :

1 أدرس المثلثات المتساوية الأضلاع الأتية والمكونة باستحدام أعواد الثقاب



أ ارسم الشكلين التاليين

ب انقل وأكمل الجدول التالي

رقم الشكل	1	2	3	4	5
عدد أعواد الثقاب	3				

جـ من دون رسم أشكال أخرى أوجد عدد أعواد الثقاب المستخدمة في :

(i) الشكل العاشر   (ii) الشكل 20

د اكتب عدد اعواد الثقاب بدلالة (ن) في أبسط صورة للشكل رقم (ن)

مثال :2

أثبت ما إذا كانت المتتابعة

- 4، 8 ، 20 ، 32 ، ....متتابعة حسابية أم لا .

الحل :

نختبر المتتابعة بأيجاد الفرق (الأساسي د) بين كل حدين متتاليين منها .

د = 8 - (- 4) = 20 - 8 = 32 - 20

∴ د = 12 (مقدار ثابت)

∴ المتتابعة - 4، 8 ، 20 ، 32 ، .... حسابية

مثال 3

أوجد الحد الثامن من المتتابعة الحسابية 6 ، 10 ، 14 ، ....

الحل :

$أ_1$ = 6 ، د = 10 - 6 = 14 - 10 = 4

بمعلومية الحد الأول والأساسي يمكن إيجاد الحد الثامن وذلك بالتعويض في القانون :

$أ_ن$ = $أ_1$ +(ن - 1) د .

$أ_8$ = 6 +(8 - 1) 4 .

$أ_8$ = 34 (الحد الثامن)

مثال : 4

أوجد المتتابعة الحسابية التي حدها الأول 13 وحدها الثامن يساوي – 43

الحل :

∵ $أ_ن$ = $أ_1$ +(ن - 1) د .

- 43 = 13 + (8 - 1) د

- 43 = 13 + 7د

7 د = - 43 - 13

7د = - 56

∴ د = - 8 وهو أساس المتتابعة

بمعلومية الحد الأول وأساس المتتابعة يمكن تحديد المتتابعة الحسابية

13 ، 5 ، - 3.............

مثال 5 :

متتابعة حسابية حدها السابع 20 ومجموع حديها الثالث والسادس يساوي 25 أوجد هذه المتتابعة .

$أ_7 = 20 \Leftarrow 20 = أ_1 + 6د$ ....(1)

$أ_3 + أ_6 = 25 \Leftarrow أ_1 + 2د + أ_1 + 5د = 25$

$2أ_1 + 7د = 25$ .... (2)

نضرب (1) في العدد(2)ثم نطرح 2 من ناتج (1)

$2أ + 12د = 40$..(1َ)

$2أ + 7د = 25$..(2)

بطرح المعادلتين (1َ) ، (2) نحصل على

د = 3

بالتعويض بقيمة د = 3 في المعادلة (1)

$أ_1 = 2$ وهو الحد الأول

∴ المتتابعة الحسابية هي :

2 ، 5 ، 8 ، 11................

مثال 6 :

إذا كان الحد الثالث في متتابعة حسابية تساوي 3 ، الحد العاشر يساوي 24 . أوجد كلاً من الحد الأول ، والحد المئوي (الذي ترتيبه 100)

الحل :

حيث $أ_3 = 3 \Leftarrow 3 = أ_1 + 2$ د ....(1)

$أ_{10} = 24 \Leftarrow 24 = أ_1 + 9$ د ....(2)

بطرح المعادلتين (1) ، (2) نحصل على :

21 = 7د ∴ د = 3(أساس المتتابعة)

بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن الحد الأول = - 3

∴ المتتابعة الحسابية هي : - 3، 0 ، 3 ، 6 ، ....

$أ_{100} = -3 + 99 \times 3$

= 294

تمرين 8 – جـ :

1. أوجد الحد الثاني والثلاثين من المتتابعة 6، 10 ، 14 ، ....
2. أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية - 1، 3 ، 7 ، 11 ، .... ، 87
3. أوجد ترتيب الحد الذي قيمته 257 في المتتابعة.
   - 3 ، 2 ، 7 ، 12 ، ....[- 3 +(ن + 1) د] ، ....
4. إذا كان الحد الثامن والحد العاشر من متتابعة حسابية هما 30 ، 24 على التوالي فأوجد الحد الذي ترتيبه ن والحد السادس عشر
5. أوجد المتتابعة الحسابية التي حدها الأول يساوي 12 وحدها السابع يساوي – 36 ؟

8 - 3 الوسط الحسابي

لتكن أ ، ب ، جـ في تتابع عددي فإنه :

ب – أ = جـ – ب

∴ 2ب = أ + جـ ⟸

$$ب = \frac{أ + جـ}{2}$$

8 - 3 - 1

إدخال جملة أوساط حسابية من كميتين معلومتين يكون دائماً أن ندخل أي عدد من الحدود بين كميتين معلومتان بحيث تكون جميع هذه الحدود بما فيها الكميتان المعلومتان متتابعة حسابية ، وتسمى هذه العملية بعملية إدخال جملة من الأوساط الحسابية بين الكميتين المعلومتين .

مثال 7:

ادخل 15 وسطاً حسابياً بين 69 ، 21

الحل :

عدد الحدود في المتتابعة الحسابية الناتجة من ادخال الأوساط بين 69 ،21 يساوي 17

∴ $أ_1$ = 69 ، $أ_{17}$ = 21

21 = 69 + 16د ∴ د = - 3 وهو أساس المتتابعة وعلى ذلك المتتابعة هي :

69 ، 66 ، 63 ، 60 ، .... 27 ، 24 ، 21 ،

∴ الأوساط هي : 66 ، 63 ، 60 ، .... ، 27 ، 24 ، 21

8 - 4 مجموع $ن$ حداً من حدود متتابعة حسابية :

نرمز للمجموعة $ح_ن$ حيث :

$ح_ن = \frac{ن}{2}(أ_1 + أ_ن)$ بمعلومية الحد الأول والحد الأخير وإذا كان أساس المتتابعة

هو د فإن :

$ح_ن = \frac{ن}{2}[2أ_1 + (ن - 1) د]$ بمعلومية الحد الأول وأساس المتتابعة .

الإثبات :

نفرض أن المتتابعة الحسابية هي :

$أ_1 ، أ_1 + د ، أ_1 + 2د ، .... ، ل - 2د ، ل - د ، ل$

$\therefore ح_ن = أ_1 + أ_1 + د + 2د ، .... +(ل - 2د)+(ل - د) +ل$

، $ح_ن = ل + (ل - د) + (ل - 2د) + ... + أ_1 + 2د + أ_1 + د + أ_1$

بالجمع $= (أ_1 + ل) + (أ_1 + ل) + (أ_1 + ل) + ... + (أ_1 + ل) + (أ_1 + ل) + (أ_1 + ل)$

$2ح_ن = ن(أ_1 + ل)$

$\therefore ح_ن = \frac{ن}{2}(أ_1 + ل)$ حيث $ل = أ_ن$ (الحد الأخير) المطلوب الأول .

، $\because ل = أ_1 + (ن - 1) د$

$ح_ن = \frac{ن}{2}[أ_1 + أ_1 + (ن - 1) د]$

$ح_ن = \frac{ن}{2}[2أ_1 + (ن - 1) د]$ المطلوب الثاني

مثال 8 :

أوجد مجموع المتتابعة الحسابية التي حدها الأول 2 وأساسها 3 وعدد حدودها 40

الحل :

$\because ح = \frac{ن}{2}[2أ_1 + (ن - 1) د]$

$ح_ن = \frac{40}{2}[2\times2 + (39) \times 3]$

$\therefore ح_ن = 20\times121 = 2420$

مثال 9:

أوجد مجموع المتتابعة الحسابية التي حدها الأول 4 وحدها السادس 19 وعدد حدودها 15.

الحل:

∵ $ا_6 = ا_1 + 5د \Leftarrow$

$19 = 4 + 5د$

∴ $د = 3$ (أساس المتتابعة)

$ح_ن = \frac{ن}{2}[2ا_1 + (ن - 1)د]$

∴ $ح_ن = \frac{15}{2}[2\times4 + 14\times3]$

$ح_ن = \frac{15}{2}\times50$

$= 375$

مثال 10:

أوجد مجموع المتتابعة الحسابية

1 ، 2 ، 3 ، ....إلى ن من الحدود

الحل:

∵ **الحد الأخير هو الحد الذي رتبته ن فهو إذا يساوي ن**

∵ $ح_ن = \frac{ن}{2}(ا_1 + ا_ن)$

∴ $ج_ن = \frac{ن}{2}(1 + ن)$

$ج_ن = \frac{ن}{2}(ن + 1)$

∴ $1 + 2 + 3 + 4 + ... + ن = \frac{ن}{2}(ن + 1)$

مثال 11:

أوجد مجموع المتتابعة

1 ، 2 ، 3 ، ....إلى 20 حداً

الحل :

$$\because \text{ح}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{2}(\text{ن} + 1)$$

$$\because \text{ح}_{20} = \frac{20}{2}(20 + 1)$$

$$\text{ح}_{20} = (10)(21)$$

$$= 210$$

مثال 12:

الحد الأول من متتابعة حسابية 17 وأساسها – 2 ومجموع حدودها 80 أوجد عدد حدود المتتابعة . ثم فسر لماذا كان هناك جوابان يحققان المسألة

الحل :

نستخدم القانون $\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{2}[2\,\text{أ}_1 + (\text{ن} - 1)\,\text{د}]$

$$80 = \frac{\text{ن}}{2}[2 \times 17 + (\text{ن} - 1) \times -2]$$

$$80 = \frac{\text{ن}}{2}(36 - 2\,\text{ن})$$

$$80 = 18\,\text{ن} - \text{ن}^2 \Leftarrow$$

$$\text{ن}^2 - 18\,\text{ن} + 80 = 0$$

$$(\text{ن} - 8)(\text{ن} - 10) = 0$$

$$\therefore \text{ن} = 8 \quad \text{أو} \quad \text{ن} = 10$$

أي أن عدد حدودالمتتابعة يساوي 8 أو 10وتبين السبب في وجود جوابين تحققان المسألة إذا ما لاحظنا أن الحد التاسع في المتتابعة

$$= 17 + 8 \times (-2) = 1$$

$$\text{أ}_9 = 1 \text{ ،}$$

$أ_{10} = 17 + 9 \times (-2)$

$أ_{10} = -1$ وعلى ذلك فإن مجموع الحدين التاسع والعاشر = 0 أي إضافة الحدين التاسع والعاشر إلى الثمانية الحدود الأولى من المتوالية لا غير من مجموعها .

مثال 13 :

مجموع ثلاثة أعداد وفي توال عددي – 3 وحاصل ضربهما 8 أوجد الأعداد .

الحل :

بفرض أن الأعداد الثلاثة هي :

$أ_1 - د ، أ_1 ، أ_1 + د$

$أ_1 - د + أ_1 + أ_1 + د = -3$

$3أ_1 = -3 \quad \therefore \quad أ_1 = -1$

$\therefore$ الحد الأول = -1

، $(أ_1 - د)(أ_1)(أ_1 + د) = 8$

$(-1 - د)(-1)(-1 + د) = 8$

$(د - 1)(د + 1) = 8$

$د^2 - 1 = 8 \Longleftarrow د^2 = 9$

$\therefore |د| = 3 \Longleftarrow د = \pm 3$

$\therefore$ الأعداد هي :

* عندما $أ_1 = -1$ ، $د = 3$

-4 ، -1 ، 2

* عندما $أ_1 = -1$ ، $د = 3$

2 ، -1 ، -4

مثال 14 :

أوجد مجموع الأعداد المضروبة في 4 والتي تقع بين العددين 20 ، 200

الحل

اصغر واكبر عددين مضروبين في 4 ويقعان بين 20 ،200 هما 24، 196 على الترتيب

$أ_1 = 24$ ، $أ_ن = 196$ ، د = 4

$أ_ن = أ_1 + (ن - 1)$ د

$196 = 24 + (ن - 1) \times 4$

$172 = 4ن - 4 \therefore ن = 44$ حداً

، $جـ_{44} = \frac{44}{2}(24 + 196)$

$= 22 \times 220$

$جـ_{44} = 4840$

تمرين 8 – د:

1 أوجد رتبة الحد الذي قيمته 79 في المتتابعة الحسابية

3 ، 7 ، 11 ، 15 ، 19 ، ....

2 أوجد رتبة أول حد سالب في المتتابعة الحسابية

21 ، 18 ، 15 ، ....

3 أوجد الحد الأخير ومجموع الحدود في كل من المتتابعات الحسابية الآتية :

أ 1.2 ، 1.5 ، 1.8 ، ....إلى 100 حداً

ب - 7، - 4، - 1، 2 ، 5 ، .....إلى 60 حداً

4 أوجد عدد الحدود المحصورة بين 10 ، 100 وتقبل القسمة على 5

5 أوجد عدد الحدود المحصورة بين 100، 400 ولاتقبل القسمة على 7

6 أدخل 5 أوساط حسابية بين 5، 29

7 في متتابعة حسابية كان حدها الأخير 43 وأساسها = 4 ومجموع ن من حدودها الأولى = 250

أوجد :

أولاً عدد حدود المتتابعة . ثانياً المتتابعة الحسابية

8 أثبت أن $\frac{1 + 3 + 5 + ... + 91}{101 + 103 + 105 + ...+ 199} = \frac{1}{3}$

9 مجموع ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية هو 30 ومجموع مربعاتها 260 أوجد هذه الأعداد

10 متتابعة حسابية حدها الأول 17 وأساسها 5 أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها

8 - 5 المتتابعة الهندسية

المتتابعة الهندسية هي ماتكونت من مجموعة من الكميات المتتالية بحيث تكون النسبة بين أية كمية من هذه الكميات والكمية التي تسبقها مباشرة تساوي مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتتابعة .

فمثلاً المتتابعات الأتية :

3 ، 6 ، 12 ، 24 ، 48 ، ....

81 ، 27 ، 9 ، 3 ، 1 ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{9}$ ، ....

2 ، - 4، 8 ، - 16 ، 32 ، ....

كلها متتابعات هندسية

أساس الأولى 2 ، الثانية $\frac{1}{3}$ ، الثالثة -2 ،

ويتبين مما تقدم أن أية متتابعة هندسية يمكن أن تأخذ الوضع الأتي :

$$\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = \text{مقدار ثابتاً لكل } ن \in ص^+ ، ح_ن \neq 0$$

وتكون الصورة العامة للمتتابعة الهندسية هي :

$$أ ، أر ، أر^2 ، أر^3 ، .... \longrightarrow أر^{ن-1}$$

حدها الأول أ وأساسها ر

∴ الحد الذي رتبته ن حيث ن عدد صحيح موجب هو $أر^{ن-1}$ أي أن :

$ح_ن = أر^{ن-1}$ ويسمى الحد النوني .

مثال 15 :

أوجد الحد الحادي عشر في المتتابعة الهندسية

16 ، 8 ، 4 ، ....

الحل :

$أ = 16 ، ر = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

، ∵ $ح_ن = أر^{ن-1}$

∴ $ح_{11} = (16) (\frac{1}{2})^{11-1}$

$ح_{11} = (16) (\frac{1}{2})^{10}$

$= (16) (\frac{1}{2^{10}})$

$= \frac{2^4}{2^{10}} = \frac{1}{2^6}$

$\therefore ح_{11} = \frac{1}{64}$

مثال 16 :

أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الثاني عشر 128 وحدها الثامن 8 .

الحل :

$\because ح_{12} = ﻫ ر^{11} \leftarrow$

$128 = ﻫ ر^{11}$ .... (١)

$، ح_8 = ﻫ ر^7 \Leftarrow$

$8 = ر^7 ﻫ$ .... (2)

وبقسمة (1) على (2)

$\therefore ر^4 = 16$

$\Leftarrow ر^4 - 16 = 0$

$(ر^2 - 4) (ر^2 + 4) = 0$

إما $ر^2 - 4 = 0$ ومنها $ر = \pm 2$

أو $ر^2 + 4 = 0$ وهي مرفوظة لأن $ر \notin ح$

* عندما $ر = 2$ من (2) نجد أن $ﻫ = \frac{8}{2^7}$ $\therefore ﻫ = \frac{1}{16}$

وعلى ذلك فالمتتابعة هي :

$\frac{1}{16}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، 1 ، 2 ، .... **وجميع حدودها موجبة**

والمتسلسلة الهندسية $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + ...$

* **عندما تكون $ر = -2$ من (2) نجد أن**

$ﻫ = \frac{8}{-2^7}$ $\therefore ﻫ = \frac{-1}{16}$

وعلى ذلك فالمتتابعة هي :

$-\frac{1}{16}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $-\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، -1 ، 2 ، .... وحدودها سالبة وموجبة على التعاقب

مثال 17 :

أثبت أن المتتابعة 32 ، - 16 ، 8 ، .... متتابعة هندسية ، ثم أوجد قيمة حدها الثامن

الحل :

نختبر الأساس $ر$ أولاً :

$\frac{-16}{32} = \frac{8}{-16} = ... = \frac{-1}{2}$ **(مقدار ثابت)**

أي أن المتتابعة هندسية أساسها $ر = \frac{-1}{2}$

ولإيجاد قيمة حدها الثامن فإن : $أ_ن = أ_1 ر^{ن-1}$ حيث $ن = 8$

$أ_8 = 32 \left(\frac{-1}{2}\right)^7$

$أ_8 = 2^5 (-2)^{-7}$

$أ_8 = -2^{-2} \therefore أ_8 = \frac{-1}{4}$

مثال 18 :

إذا كانت ب - 6 ، ب ، ب + 18 الحدود الثلاثة الأولى من متتابعة هندسية فما قيمة ب وما حدها السابع ؟

الحل :

$ر = \frac{ب}{ب - 6} = \frac{ب + 18}{ب}$

$ب^2 = (ب - 6)(ب + 18)$

$ب^2 = ب^2 + 12ب - 108$

$\therefore 12ب = 108 \quad \therefore ب = 9$

وعلى ذلك فالمتتابعة هي : 3 ، 9، 27 ، ....

$\therefore$ الحد السابع $أ_7 = أ_1 ر^6$ ، $ر = 3$

$أ_7 = 3 \times (3)^6 \quad \therefore أ_7 = 2187$

8 - 6 الوسط الهندسي

إذا كونت المقادير الثلاثة ﺃ،ب ، جـ متتابعة هندسية سمى المقدار الأوسط ب بالوسط الهندسي للمقدارين ﺃ، جـ

$$\frac{ب}{ﺃ} = \frac{جـ}{ب} \quad \therefore \; ب^2 = ﺃ\,جـ$$

$$\therefore \; ب = \pm\sqrt{ﺃ\,جـ}$$

وقد اتفق على أخذ الجذر التربيعي الموجب إذا كان ﺃ، جـ موجبتين وأخذ الجذر التربيعي السالب إذا كانت سالبتين

تمرين 8 –هـ:

1 متتابعة هندسية حدها الأول 3 وحدها الخامس 48 أوجد :

ﺃ قيمة حدها الثامن ب حدها العام (النوني)

2 أوجد الحد التاسع في المتسلسلة الهندسية ثم أوجد الحد الأخير لها

3 متتابعة هندسية حدها الخامس 96 وحدها الثامن 768 أوجد :

ﺃ المتتابعة الهندسية ب حدها العاشر

4 أوجد رتبة الحد الذي قيمته 128 في المتتابعة الهندسية

2 ، 4 ، 8 ، 16 ، ....

5 متتابعة هندسية حدها السابع يزيد عن حدها السادس بمقدار 1458 ، وحدها السادس يزيد عن حدها الخامس بمقدار 486 أوجد المتتابعة

8 - 7 مجموع ن حداً من حدود متتابعة هندسية

نفرض أنه يراد إيجاد مجموع ن من الحدود المتوالية الهندسية

$\text{أ} ،\ \text{أ}\text{ر} ،\ \text{أ}\text{ر}^{2} ،\ \text{أ}\text{ر}^{3} ،\ ....$ ابتداء من الحد الأول أ

وبفرض أن المجموع = $\text{جـ}_{\text{ن}}$

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{أ} + \text{أ}\text{ر} + \text{أ}\text{ر}^{2} + ... + \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}}$$

وبضرب المتساوية (1) في ر .... (1)

$$\text{جـ}_{\text{ن}}(\text{ر}) = \text{أ}\text{ر} + \text{أ}\text{ر}^{2} + \text{أ}\text{ر}^{3} + ... + \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}-1} + \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}} .... \quad (2)$$

وبطرح (1) من (2) ينتج أن

$$\text{جـ}_{\text{ن}}(\text{ر}) - \text{جـ}_{\text{ن}} = \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}} - \text{أ}$$

$$\text{جـ}_{\text{ن}}(\text{ر} - 1) = \text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - 1)$$

$$\therefore \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - 1)}{\text{ر} - 1} .... (3)$$

وبتغير الإشارات في كل من البسط والمقام في (3) نحصل على

$\text{جـ}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{أ}(1 - \text{ر}^{\text{ن}})}{1 - \text{ر}}$ بمعلومية الحد الأول والأساس وعدد الحدود

$$\because \text{ح}_{\text{ن}} = \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}-1} \Leftarrow \text{ر}(\text{ح}_{\text{ن}}) = \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}} .... (4)$$

$\therefore \text{جـ}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{أ} - \text{ر}(\text{ح}_{\text{ن}})}{1 - \text{ر}}$ حيث $\text{ح}_{\text{ن}}$ الحد الأخير

وبفرض أن $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ل}$

$\therefore \text{جـ}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{أ} - \text{ر}\text{ل}}{1 - \text{ر}}$ بمعلومية الحد الأول والأساس والحد الأخير

مثال 19:

أدخل أربعة أوساط هندسية بين 64 ، 486

الحل:

عدد حدود المتتابعة الهندسية من إدخال الأوساط بين العددين المعلومين يساوي 6
وعلى ذلك المطلوب إيجاد متتابعة هندسية حدها الأول 64 وحدها السادس 486

∴ أ = 64 ....(1)

، 486 = 64 $ر^5$ ....(2)

بقسمة (2) على (1) يكون $ر^5 = \frac{486}{64}$

$ر^5 = (\frac{3}{2})^5$ ∴ $ر = \frac{3}{2}$

وعلى ذلك فالمتتابعة هي :

64 ، 96 ، 144 ، 216 ، 324 ، 486

∴الأوساط هي :

96 ، 144 ، 216 ، 324

مثال 20:

أوجد مجموع المتتابعة الهندسية الآتية

2 ، 4، 8 .... إلى تسعة حدود

الحل:

نستخدم القانون $جـ_ن = \frac{أ(1 - ر^ن)}{1 - ر}$

$جـ_9 = \frac{2(1 - 2^9)}{1 - 2} = -(2 - 2^{10})$

$جـ_9 = 2^{10} - 2$ ∴ $جـ_9 = 1022$

المتتابعة الهندسية $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{12}$ ، ....، $\frac{1}{3\,ن}$ ، ....

اساسها $ر = \frac{1}{2}$ ومجاميعها الجزئية :

$مج_1 = \frac{1}{3}$ ، $مج_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ ، $مج_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$ ، وهكذا..........

عند تمثيل المجاميع الجزئية على خط الأعداد نجد أنها تزداد في الكبر أكثر فأكثر إلى أن تقترب جـ$_ن$ قرباً كبيراً من الواحد

$\because أ_1 = \frac{1}{3}$ ، $ر = \frac{1}{2}$

، $جـ_ن = \frac{أ_1 (1 - ر^ن)}{1 - ر}$

$\therefore جـ_ن = \frac{\frac{1}{3}\left(1 - (\frac{1}{2})^ن\right)}{1 - \frac{1}{2}}$

وعندما ن تأخذ قيماً أكبر فأكبر فإن قيمة $(\frac{1}{2})^ن$ **تقترب تماماً من الصفر**

فمثلاً: إذا كانت $ن = 20$ فإن $(\frac{1}{2})^{20}$ **تكون أقل من** 0.000001 وعلى ذلك فإن $1 - (\frac{1}{2})^ن$

تقترب تماماً من الواحد .

ويكون قيمة 1 هي مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \infty\ 1$$

نكتبها على صورة : $\sum_{ك = 1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^ن}\right) = 1$

وبصورة عامة : إذا كانت المتسلسلة الهندسية اللانهائية :

$$أ_1 + أ_1 ر + أ_1 ر^2 + \ldots\ldots\ldots = \infty\ \sum_{ك = 1}^{\infty} أ_1 ر^ن$$

فإن : $جـ_ن = \frac{أ_1 (1 - ر^ن)}{1 - ر}$ ، $ر \neq 1$

$$جـ_ن = \frac{أ_1}{1 - ر} - \frac{أ_1 ر^ن}{1 - ر}$$

$$، \quad \underset{ن \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{أ_1(ر^ن - 1)}{ر - 1} = \frac{أ_1}{1 - ر} - \underset{ن \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{أ_1 ر^ن}{1 - ر}$$

فإذا كانت $|ر| < 1$ فإن $\underset{ن \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{أ_1 ر^ن}{1 - ر} = 0$

وتكون $حـ_ر = \frac{أ_1}{1 - ر} = \frac{\text{الحد الأول}}{1 - \text{الأساسي}}$ ، $|ر| < 1$

وإذا كانت $|ر| > 1$ فإن $\underset{ن \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{أ_1(ر^ن - 1)}{ر - 1}$ = قيمة غير محدودة وتكون $حـ_ر$ ليس لها نهاية

وبذلك تكون المتسلسلة

$$أ_1 + أ_1 ر + أ_1 ر^2 + \text{.........} \infty = \sum_{ن=0}^{\infty} أ_1 ر^ن ، أ_1 \neq 0$$

تكون تقاربية (Cnvergent) **إذا كان** $|ر| < 1$ ومجموعها هو $\frac{أ_1}{1 - ر}$ وتباعدية (Divergent)
إذا كان $|ر| > 1$

فمثلاً $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \text{.......}\infty$

تقاربية لأن $ر = \frac{2}{3} \Leftarrow |ر| < 1$

ويكون مجموعها $حـ = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2$

أما المتسلسلة $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \text{.............}\infty$

$ر = -\frac{2}{3}$ ، $أ_1 = \frac{2}{3}$

$$حـ_ر = \frac{\frac{2}{3}}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{2}{5}$$

والمتسلسلة

$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \text{.............}\infty$

$ر = 2$ ، $|ر| > 2$ فهي تباعدية ولايدل على أن لها مجموع

8 - 9 الكسور العشرية الدائرية

عند وضع كسرعشري مثل $\frac{1}{3}$ على صورة كسر عشري نجد أن عملية القسمة غير منتهية أي أن :

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots\ldots\infty$$

ولعملية الإختصار نضع نقطة أو شرطة على العدد الذي يتكرر فيكون

$\frac{1}{3} = 0,\dot{3}$ أو $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ ويقراء ثلاثة من عشرة دائري ويسمى الكسر في هذه الحالة كسراً دائرياً : مثلاً $\frac{2}{3} = \infty\ 0.666\ldots\ldots = 0.\dot{6}$

، $\frac{32}{99} = \infty\ 0.32\ 32\ 32\ldots\ldots = 0,\overline{32}$

* ويمكن وضع $0,\dot{3} = \infty\ 0,333\ldots\ldots$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots\ldots\infty$$

وهي متسلسلة هندسية لانهائية حدها الأول $\frac{3}{10}$ وأساسها $\frac{1}{10}$ ، $|\text{ر}| < 1$ فهي تقاربية ولها مجموع

$$\text{ح}_\infty = \frac{\text{أ}_1}{1 - \text{ر}} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$\therefore \text{ح}_\infty = \frac{1}{3}$$

$$\therefore 0,\dot{3} = \frac{1}{3}$$

مثال 21 :

إذا كان مجموع ثلاثة حدود في متتابعة هندسية أكبر من الحد الأول بمقدار 21 مرة فأوجد أساس المتتابعة الهندسية ؟

الحل

$$\because \text{ح}_\text{ن} = \frac{\text{أ}_1(1 - \text{ر}^\text{ن})}{1 - \text{ر}} \quad ، \quad \text{ح}_3 = 21\,\text{أ}$$

$$\therefore\ 21\text{ٲ} = \frac{\text{ٲ}(1 - \text{ر}^3)}{1 - \text{ر}}$$

$$21\text{ٲ}(1 - \text{ر}) = \text{ٲ}(\text{ر}^2 + \text{ر} + 1)(1 - \text{ر})\ ،\quad \text{ر} \neq 1$$

$$\therefore\ \text{ر}^2 + \text{ر} - 20 = 0$$

$$(\text{ر} - 4)(\text{ر} + 5) = 0$$

إما س = 4 أو س = - 5

مثال 22 :

إذا كان الحد الرابع من متسلسلة هندسية يساوي 6 والحد التاسع = 1458 اوجد كلاً من الحد العاشر ومجموع الحدود العشرة الأولى

الحل :

$\because\ \text{ٲ}_{\text{ن}} = \text{ٲ}\,\text{ر}^{\text{ن} - 1}\qquad \therefore\ 6 = \text{ٲ}_1\,\text{ر}^3$ ....(1)

$1458 = \text{ٲ}_1\,\text{ر}^8$ ....(2)

بالقسمة $\dfrac{1}{243} = \dfrac{1}{\text{ر}^5}\qquad \therefore\ \text{ر}^5 = 243 = 3^5$

$\therefore\ \text{ر} = 3$ وهو أساس المتوالية من (1) نجد أن $\text{ٲ}_1 = \dfrac{2}{9}$

$$\therefore\ \text{ٲ}_{10} = \frac{2}{9}(3)^9\qquad \therefore\ \text{ٲ}_{10} = 4374$$

$$\because\ \text{حـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ٲ}_1(\text{ر}^{\text{ن}} - 1)}{\text{ر} - 1}$$

$$\text{جـ}_{10} = \frac{\frac{2}{9}(3^{10} - 1)}{3 - 1} = \frac{2 \times 3^8 - \frac{2}{9}}{2}$$

$$\text{جـ}_{10} = 6560\frac{8}{9}$$

مثال 23 :

أوجد قيمة الكسر العشري الدائري $0.\overline{22}$

الحل :

$0.\overline{22} = 0.222222 \cdots\cdots \infty$

$= \frac{2}{100} + \frac{2}{10000} + \frac{2}{1000000} + \cdots\cdots + \infty$

$ر = \frac{1}{100}$ ، $ء_1 = \frac{22}{100}$ ، $|ر| < 1$ فهي تقاربية .

$ح_\infty = \dfrac{\frac{22}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{22}{99}$

$\therefore 0.\overline{22} = \frac{22}{99}$

مثال 24 :

أكتب الكسر العشري الدائري $3.\overline{75}$ على صورة عدد نسبي

الحل :

$3.\overline{75} = 3 + 0.75 + 0.0075 + 0.000075 + \cdots\cdots + \infty$

$= 3 + 75\,(0.01 + 0.00001 + 0.0000001 + \cdots\cdots \infty$

$= 3 + 75 \times \dfrac{0.01}{1 - 0.01}$

$= 3 + \frac{35}{33}$

$\therefore 3.\overline{75} = \frac{124}{33}$

تمرين 8 –و:

1 أوجد مجموع كل من المتسلسلات الهندسية اللانهائية في كل مما يأتي :

أ $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\ldots$

ب $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \ldots\ldots$

جـ 80 ، 40 ، 20 ، ....

2 حل المعادلة $\frac{2}{3} = 1 + س + س^2 + س^3 + \ldots\ldots \infty$

3 أوجد مجموع المتسلسلة

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3} + \ldots\ldots = \sum_{ن=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{ن}$$

4 أوجد قيمة مايلي على صورة كسر إعتيادي

أ $0{,}\overline{4}$ ب $0{,}\overline{32}$ جـ $2.\overline{6}$

تمرين للمراجعة العامة

القسم أ

1 الحدان الأول والثاني من متتابعة حسابية هما 1 ، 4 - أوجد الحد الخامس والعشرون وكذلك مجموع 20 حداً الأولى منها

2 في متتابعة هندسية $243\, أ_7 = 32\, أ_2$

i) أوجد أساسها

ii) وإذا كان مجموعها إلى ∞ هو 3^{11} فأوجد حدها الأول $أ_1$

3 مجموع ثلاثة حدود الأولى في متتابعة هندسية = 7 ومجموع الستة حدود الأولى منها 63 أوجد المتتابعة و مجموع العشرة حدود الأولى منها

4 أكمل المتسلسلة الأتية إلى ثماني حدود

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{21} - \frac{1}{28} + \dots\dots\dots\dots$$

القسم ب

1 إذا كان الحد الرابع يساوي 20 ، والحد الثامن يساوي صفراً في متتابعة عددية فأوجد كلا من الحد الأول والحد المئوي $أ_{100}$

2 أوجد مجموع الثلاثين حداً الأولى للأعداد الزوجية .

3 أوجد مجموع الأعداد الفردية التي تقع بين 27 ، 71

القسم جـ)

1 أثبت أن $0و\overline{4} = \frac{4}{9}$ (باستخدام المتسلسلات)

2 إذا كان الحدان الأولان في متتابعة هندسية هي 6 ، 3 فما هو الحد الذي رتبته $\frac{1}{1024}$؟

الإجابات
Answers

الفصل الأول

تمرين 1-ب

1. أ. أ > -2 ب. ب ≤ 8

جـ. ق ≥ 3 د. هـ < -5

هـ. س ≤ -1 و. س ≥ -1

تمرين 1-جـ

1. أ. 2، 2، 10 ب. ≤ ، ≤

2. أ. ص ≤ 18 ب. م > 16

جـ. د ≤ -9 د. هـ ≥ -2

3. أ. أ > 2 ب. ب < 6

جـ. م ≤ -2 د. هـ ≥ 3

4. أ. ع ≥ -4 ب. س ≥ -24

جـ. ز > 15 د. ي ≥ -12

تمرين 1-د

1. أ. س > 3 ب. د > 11

ج. د ≤ -12 د. س ≥ 4

هـ. ر ≥ 15

2. أ. أ > 0 ب. ب ≤ 10

جـ. ز > -9 د. س < $-5\frac{1}{2}$

3. أ. د ≤ 1 ب. ف > -14

جـ. س ≤ 18 د. ص < 3

هـ. ي > -3 و. ك > 2

تمرين 1-هـ

1. أ. 12 < س ≤ 17

ب. 1 ≤ س < 6

جـ. -4 ≤ س < -2

د. 2 < س < 3

هـ. س ≥ 5

2. أ. 4، 5

ب. 6، 7

جـ. 5، 6، 7

د. 7، 8، 9

تمرين 1-و

1. $(-\infty ، 2] \cup [4 ، +\infty)$

2 . $(-\infty، -6) \cup (6، +\infty)$

3 . $(-\infty، -2] \cup [-1، +\infty)$

4 . $(-1، -2)$ 5 . $[0، 1/2]$

6 . $(-5، -2)$ 7 . $(-4، -1)$

8 . $(-\infty، -5) \cup (1، +\infty)$

9 . $(-\infty، \frac{1}{3}) \cup (1، +\infty)$

10 . $[3، 7]$

تمرين 1- ز

1 . $(-\infty، -2] \cup [12، +\infty)$

2 . $(-\infty، \frac{2}{3}] \cup [2، +\infty)$

3 . $(-7، 3)$ 4 . $(-5، 11)$

5 . $(-4، 6)$

الفصل الثاني

تمرين 2-أ

1. أ . نعم ب . لا جـ . نعم د . لا

2. أ . س = 4.81م ، $\theta = 23°$

ب . س = 8.55م ، ص = 10.3م

$\theta = 29°$

جـ . س = 5.34 سم ، ص = 4.46 سم $\alpha = 69°$

د . $\alpha = 25.0°$ ، $\theta = 95.8°$

3. أ . (i) $80°$ (ii) 6.43 سم

ب . 4.08 سم 4. 14/3

تمرين 2- ب

1. أ . جتا أ غير موجودة

ب . "-" ، "+" تبادلا

جـ . "2" غير موجودة

د يجب أن تكون 2 س ع وليس 2 س ص ع

هـ . "2" غير موجودة

2. أ . $61.2°$ ب . 2.38 م

جـ . $41.4°$ د . 1.85 سم

هـ . 7.0 م و . 10.3م

ز . $70.5°$

3. أ . 6.57 سم ب . 9.37 سم

4. $32.16°$

تمرين 2 – ج

1. أ . 33.8 سم^2 ب . 16.6 سم^2
ج . 11.4 سم^2 د . 3.94 سم^2
2. أ . 6.10 سم^2 ب . 5.14 سم^2
ج . 5.01 سم^2
3. أ . 8.17 سم^2 ب . 27.1 سم^2
4. 230 سم^2
5. أ . 17.3 سم^2 ب . 48.0 سم^2
6. أ . 9.85 سم^2 ب . 48.0 سم^2
7. أ . 5.38 سم^2 ب . 20.8 سم^2
8. أ . 15.2 سم^2 ب . 6.24 سم^2
9. 1603.5 سم^2

تمرين 2– د

1. أ . 040° ب . 120° ج . 250°
د . 350°
2. أ . 278° ب . 087° ج . 104°
د . 295°
3. أ . 110° ب . 290° ج . 190°
د . 010°
4. أ . 040° ب . 250°

تمرين 2–هـ

1. 020.6°
2. أ . 300°
ب . 2.60 كم ج . 7 كم
3. أ . 290° ب . 90.8

الفصل الثالث

تمرين 3–أ

1. أ . 15 ب . 70 ج . 54 د . 70
هـ . 20 و . 60 ط . 20 ي . 70
ك . 70 ل . 40
2. أ . –0.5 ب . 0.6947
ج . – 0.7813 د . 0.6428
هـ . –0.5446 و . –1.4281
ز . 0.6428 ح . 0.9563
ط . –0.1763 ي . 0.6018
ك . – 0.4695 ل . – 0.3640
3. أ . جتا س ب . جا س
ج . ظتا س د . جا س
هـ . – جتا س و . – ظا س

ز . −جا س   ح . −جتا س

ط. ظا س   ي . − جتا س

ك . جتا س   ل. − ظا س

تمرين 3−ب

1. أ. 63.3° ، 116.7°

ب . 97.4° ،172.6° ،277.4 ، 352.6°

جـ . 30.4° ، 329.6°

د . 54.5° ، 125.6° ، 234.4° ، 305.6°

هـ . 47°

و. 57.1° ، 122.9° ، 237.1° ، 302.9°

ح . 67.5° ، 112.5° ، 247.5° ، 292.5°

ط . 17.4° ، 107.4° ، 197.4° ، 287.4°

2. أ . 30° .ب 240° .ج − 130°

د . 470.9°

3. أ. 55° ، 125° ب. 48° ، 312°

جـ. 240° ، 300° د. 220° ، 320°

هـ. 135° ، 315° و. 25° ،65° ،205° ،245°

ز. 70

4. أ. 30° ، 150°

ب. 27° ، 207°

جـ. 90°

د. 60° ، 300°

5. −0.8090 ، −0.7265 ، 0.9511

تمرين 3−هـ

1. أ. 90° ، 270°

ب. 0° ، 60° ، 180° ، 300° ، 360°

جـ. 0° ، 60° ، 300° ، 360°

د. 0° ، 360°

هـ. 0° ، 45° ، 180° ، 225° ، 360°

و. 45° ، 225°

2. أ. 19.5° ، 30° ، 150° ، 160.5°

ب. 35.5° ، 144.7° ، 215.3° ، 324.7°

جـ. 26.6° ، 63.4° ، 206.6° ، 243.4°

د . 90° ، 270°

هـ. 19.5° ، 160.5°

و. 35.8° ، 114.2° ، 215.8° ، 294.2°

ز. يترك للطالب

تمرين 3 – و

.1 $\pm\sqrt{2}$

.2 أ. ظا θ = $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ب) جتا θ = $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

جـ جا θ = $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

.3 أ. ظا θ = $\frac{-15}{8}$ ، جتا θ = $\frac{-8}{17}$

ب. ظتا θ = $\frac{-20}{21}$ ، جا θ = $\frac{-21}{29}$

.5 أ. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

ب) 0.636

.6 أ = 3 ، ب = –2

(i) 2 (ii) 3

.7 (1) 240° ، 300°

(2) 67.5° ، 157.5° ، 247.5° ، 337.5°

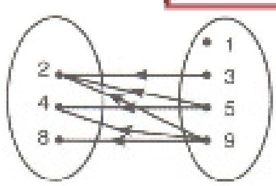
.10 أ. 121.3° ، 301.3°

ب. 210° ، 330°

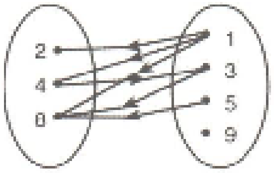
جـ. 0° ، 60° ، 180° ، 300° ، 360°

الفصل الرابع

.1

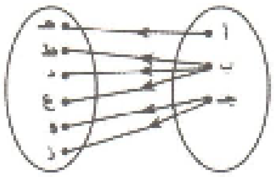


.2

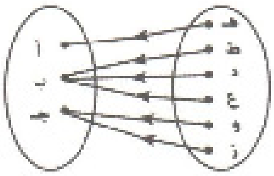


.3 (نصف أ)

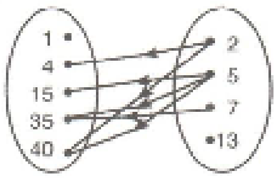
.4



.5



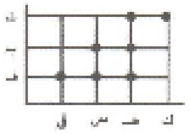
.6 (أ) عامل لـ (ب)



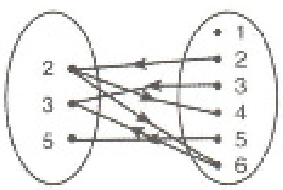
تمرين 4 – ب

.1 أ. { (ق،ف)، (س،ف)، (س،ب)، (هـ،ف)، (هـ،ب)، (هـ،ت)، (ك،ت)}

ب.



.2 أ. أ ب



(مضاعف لـ)

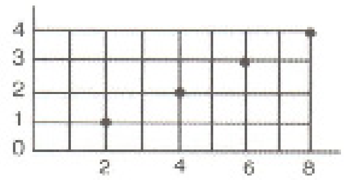
ب. {(2،2) ، (3،3) ، (4،2) ، (5،5) ، (6،2) ، (6،3)}

3. {-3،1،1، 5، 7} ، {2،4،6،8،10}؛

أقل بـ 3

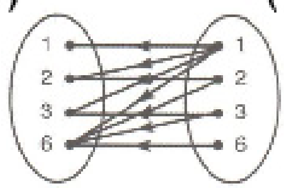
4. أ. {(2، 1)، (4، 2)، (6، 3)، (8، 4)}

ب.



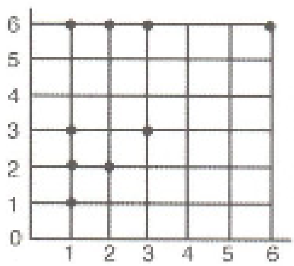
عامل لـ

5. (أ) (أ)

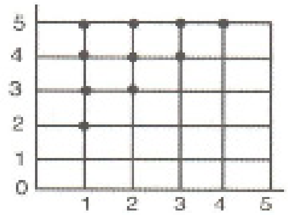


ب. {(1، 1)، (1، 2)، (1، 3)، (1، 6)، (2، 2)، (2، 6)، (3، 3)، (3، 6)، (6، 6)}

ج.



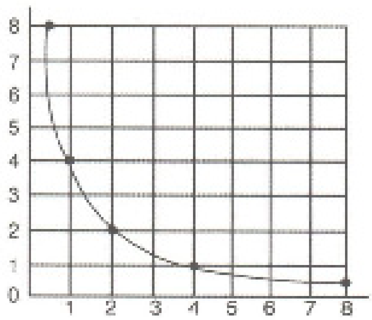
6. {(1، 2)، (1، 3)، (1، 4)، (1، 5)، (2، 3)، (2، 4)، (2، 5)، (3، 4)، (3، 5)، (4، 5)}



7. أ. {($\frac{1}{2}$، 1، 2، 4، 8)،(8، 4، 2، 1، $\frac{1}{2}$)}

العدد الأول مضروباً في العدد الثاني يعطي 4

ب.



تمرين 4-ج

1. {2، 6، 10، 14}

2. أ. 3 ب. 5 ج. 1 د. -1

3. أ. 3 ب. 5 ج. -1 د. 4

4. أ. 0 ب. 6 ج. -6 د. $-1\frac{1}{2}$

5. د(س) = 2س−5−3−13

6. أ. 0 ب. 8 ج. 3 د. 0

7. أ. $\frac{1}{2}$ ب. $2\frac{1}{2}$ ج. 1 د. 0.7660

8. أ. $\frac{1}{2}$ ب. 1 ج. 0 د. 0.9397

9. أ. 5 ب. 3 ج. 3 د. 15

10. أ. 8 ب. 7 ج. 1 د. 4

تمرين 4- د

أ. ∀ س ∈ ح ، المدى = {2}

ب. ∀ س ∈ [−2 ، ∞) ، ∀ ص ∈ [0 ، ∞)

ج. ∀ س ∈ ح − {1/2}

د. ∀ س ∈ ح ، ∀ ص ∈ [0 ، ∞)

هـ. س ∈ [−2 ، 2] ، ص ∈ [0 ، 2]

و. س ∈ (−∞ ، −2] ∪ [2 ، ∞) ، ص ∈ [0،∞)

تمرين 4-هـ

1. أ. $د_1$ ، − $د_2$ = 1÷(س+(2^_) س)

ب. $د_1.د_2$ = 1÷(س +1) س

ج. $د_1÷د_2$ = (س +1)÷ س ، س ≠ 0

د. $د_1÷د_2$ = س÷(س+1) ، س ≠ −1

2. يترك للطالب التمرين أ ، ب

تمرين 4-هـ

1. أ . $د_1$ ، − $د_2$ = 1÷(س+(2^_) س)

ب . $د_1.د_2$ = 1÷(س +1)س

ج . $د_1 ÷ د_2$ = (س+1)÷ س ، س ≠ 0

د) $د_1÷د_2$ = س÷(س +1) ، س≠ −1

2 . يترك للطالب التمرين أ ، ب

الفصل الخامس

تمرين 5-أ

1. −3 2. −6 3. 4 4. −1

5. 2 6. 4 $\sqrt{10}$ 7. 3/5

8. 7÷3 9. 9÷2 10. 80÷7

11. 15÷4 12. −5 ÷64 13. 6÷5

تمرين 5- ب

1. 24 2. 6 3. (−1)÷10

4. 18÷11 5. 8 6. 6 $\sqrt{6}$

7. 1÷(5×2) 8. 4÷15 9. 8

10. 2 2

تمرين 5-ج

1. أ. $\underset{\text{س} \to 1^+}{\text{نهـا}} (3\text{س}-4) = -1$

، $\underset{\text{س} \to 1^-}{\text{نهـا}} (2\text{س}+1) = 3$

النهاية ليس لها وجود

ب. $\underset{\text{س} \to 0^-}{\text{نهـا}} (3\text{س}-1) = -1$ ،

$\underset{\text{س} \to 0^+}{\text{نهـا}} (2\text{س}+5) = 5$

النهاية ليس لها وجود

ج. $\text{د(س)} = \begin{cases} -\text{س}+1 & \text{، س} < 0 \\ \text{س}+1 & \text{، س} > 0 \end{cases}$

$\underset{\text{س} \to 0^-}{\text{نهـا}} (-\text{س}+1) = 1$ ،

$\underset{\text{س} \to 0^+}{\text{نهـا}} (\text{س}+1) = 1$ ،

$\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = 1$

د. $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = 1$ ،

$\underset{\text{س} \to 0^+}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \sqrt{3}$

النهاية ليس لها وجود

2. $\text{د(س)} = \begin{cases} -1 & \text{، س} > 2 \\ 1 & \text{، س} < 2 \end{cases}$

النهاية ليس لها وجود.

3. أ) $\underset{\text{س} \to 0^-}{\text{نهـا}} \text{د(س)} =$

$\underset{\text{س} \to 0^-}{\text{نهـا}} \frac{1}{\text{س}-1} = -1$

ب. $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = 4$

لأن $\underset{\text{س} \to 2^-}{\text{نهـا}} = \underset{\text{س} \to 2^+}{\text{نهـا}} = 4$

ج. $\underset{\text{س} \to 3}{\text{نهـا}} \sqrt{3-\text{س}} =$

$\underset{\text{س} \to 3^-}{\text{نهـا}} \text{د(س)} =$

$\underset{\text{س} \to 3^+}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = 0$

تمرين 5-د

أ. صفر ب. 1 ج. ∞

د. -1 هـ. $\frac{2}{3}$ و. صفر

ز. 2 ل. $\frac{1}{5}$

تمرين 5-هـ

أ. 1. الدالة غير مستمرة عند س = 3

2. الدالة غير مستمرة عند س = 5

3. $\underset{\text{س} \to 2^-}{\text{نهـا}} \text{د(س)}$

= $\lim\limits_{س \to 2^+}$ د(س) = 4 ،

د(2) = 4

الدالة مستمرة عند س = 2

ب. 1. $\lim\limits_{س \to 2}$ د(س) = $\frac{1}{4}$ = أ

2. $\lim\limits_{س \to 3} \frac{(س-3)(س+3)}{5(س-3)} = \frac{6}{5}$ = أ

3. $\lim\limits_{س \to 1}$ د(س) = 2 = أ+1

∴ أ = 1

ج. $\lim\limits_{س \to 1}$ د(س)

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{(س-1)(س-ك)}{س-1}$

= 1−ك ، د(1) = 2

∴ 2 = 1−ك   ∴ ك = −1

الفصل السادس

تمرين 6-أ

أ. متوسط التغير =

$\frac{[5(1.8)^2 + 1.8] - (5 \times 2^2 + 2)}{-0.2}$

$= \frac{3.52}{0.2} = 17.6$

ب. متوسط التغير = $\frac{\sqrt{11.24-1} - \sqrt{10-1}}{1.24}$

$= \frac{3.2-3}{1.24} = \frac{2}{12.4} \cong 0.161$

2. متوسط نمو المزرعة = 5400

معدل النمو عند ن = 4 ساعات هو 5040

لأن معدل النمو عند أي لحظة

= 6000 − 240 ن

تمرين 6-ب

1. $\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2\sqrt{س}}$ = ميل المماس = $\frac{1}{4}$

2. أ. −1   ب. 28   ج. 3

تمرين 6-جـ

1. أ. 4 − 2س   ب. $2س^9 + \frac{1}{س^2}$

ج. $\frac{2س+1}{2س\sqrt{س}}$

د. 4س + 1   هـ. $20س^{-4} - 10س$

و. $3س^2 + 6س - 1$

ز. $1 + \frac{2}{س^3}$ م. 3 + 6س

ط. −4 + 8س   ي. 4

ك. $4س + \frac{3}{س^2} - \frac{2}{س^2}$

تمرين 6- د

1. أ. $\frac{-2}{(\text{س}-2)^{2}}$ ب. $\frac{-2\text{س}^{2}+4\text{س}+1}{\sqrt{1-\text{س}^{2}}}$

ج. $\frac{3\text{س}+4}{2(\text{س}+1)^{\frac{3}{2}}}$ د. $\frac{3\text{س}^{2}-3}{(1+\text{س})^{2}}$

هـ. $3\text{س}^{2}+6\text{س}+2$

و. $140\text{س}^{4}-9\text{س}^{2}-1$

2. $(1 ، -2)$ ، $(-1 ، 2)$

3. ك $=\frac{17}{8}$ 4. $\frac{1}{4}$

5. $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=2\sqrt{\text{س}}$

6. $(0، 1)$ ، $(2، -1)$

7. معادلة المماس هي

$\text{ص}-2\text{س}+1=0$

معادلة العمودي هي

$2\text{ص}+\text{س}-18=0$

إجابات الباب السابع

تمرين 7-أ

1. أ. $\frac{3}{2}\text{س}^{2}+\text{ج}$ ب. $\frac{\text{س}^{3}}{3}+\text{ج}$

ج. $2\sqrt{\text{س}}+\text{ج}$ د. $\frac{3}{4}\text{س}^{\frac{4}{3}}+\text{ج}$

هـ. $\text{س}^{4}+\text{ج}$

و. $\frac{2}{7}\text{س}^{\frac{7}{2}}+\text{ج}$ ز. $\frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}}+\text{ج}$

ل. $\frac{\text{س}^{3}}{3}+\frac{\text{س}^{2}}{2}-5\text{س}+\text{ج}$

م. $\frac{(\text{س}+1)^{3}}{3}+\text{ج}$

ط. $\frac{2}{3}\text{س}^{3}+\frac{1}{\text{س}}+\text{ج}$

س. $2\text{س}-\frac{5}{2}\text{س}^{2}-\text{س}^{3}+\text{ج}$

2. أ. $\text{س}^{2}+\text{س}+\text{ج}$

ب. $\text{س}-\frac{\text{س}^{3}}{3}+\text{س}^{5}+\text{ج}$

ج. $\text{ت}^{2}+\text{ت}+\text{ج}$ د. $2\sqrt{\text{ت}}+\text{ج}$

هـ. $\frac{2}{5}\text{س}^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{\text{س}}+\text{ج}$

و. $\frac{1}{3}\text{س}^{5}+\frac{2}{3}\text{س}^{3}-\frac{1}{3}\text{س}+\text{ج}$

ز. $\text{زت}+\frac{\text{أ}}{2}\text{ت}^{2}+\text{ج}$

ح. $\frac{5}{3}\text{س}^{3}+\frac{10}{\text{س}}+\text{ج}$

ل. $\frac{\text{س}^{5}}{5}+\text{س}^{2}-\frac{1}{\text{س}}+\text{ج}$

ي. $\frac{س^3}{5}+\frac{6}{5}س^2-\frac{9}{5}س+ج$

تمرين 7 – ب

1. $ص = \frac{2}{3}س^2 + 2س + 1$
2. $ص = \frac{س^3}{3} + س + 1$
3. $ص = 1 - \frac{1}{س}$
4. $ص = \frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}$

تمرين 7 –ج

1.
أ. 4 ب. $\frac{1}{3}$ ج. $\frac{1}{2}$
د. 42 هـ. $6\frac{2}{3}$ ز. $4\frac{2}{3}$
ح. $\frac{3}{5}$ ك. $-4\frac{1}{2}$ س. $26\frac{2}{3}$
ن. $14\frac{2}{3}$ ع. $-10\frac{4}{3}$

2. 72

الفصل الثامن

تمرين 8–أ ، تمرين 8 – ب

يترك للطالب

تمرين 8–ج

1. 130
2. عدد الحدود = 23
3. عدد الحدود = 53
4. $أ_ن = 3(16-ن)$ ، $أ_{16} = 6$
5. 12 ، 4 ، −4 ، ....

تمرين 8–د

1. عدد الحدود 20 حداً
2. الحد التاسع
3. أ. $أ_ن = 30.9$ ، $ج_ن = 1605$

ب. يترك للطالب.

4. 17
5. 255
6. الأوساط هي 9 ، 13 ، 17 ، 21 ، 25
7. ن = 7، 11، 15 ، ....
9. راجع مثال 11
10. $ج_{10} = 395$

تمرين 8-هـ

1. أ. -384

ب. $3(-2)^{ن-1}$

2. الحد الأخير $\frac{1}{16}$

3. أ. 6 ، 12 ، 24 ، ....

ب. حدها العاشر = 3072

4. الحد السابع

5. 3 ، 9 ، 27 ، ....

تمرين 8- و

1. أ. $\frac{1}{2}$ ب. $\frac{1}{4}$ جـ. 160

2. س = $-\frac{1}{2}$

3. جـ ن = $\frac{4}{3}$

4. أ. $0,\bar{4} = \frac{4}{9}$

ب. $0,\overline{32} = \frac{32}{99}$

جـ. $2,\bar{6} = 2\frac{2}{3}$